II. LA RETTA

LA RETTA

In un riferimento cartesiano ortogonale una qualunque retta si può orientare stabilendo la sua direzione e verso, secondo l'angolo che essa forma con il verso positivo dell'asse x, preso in senso antiorario.

RETTA PER L'ORIGINE.

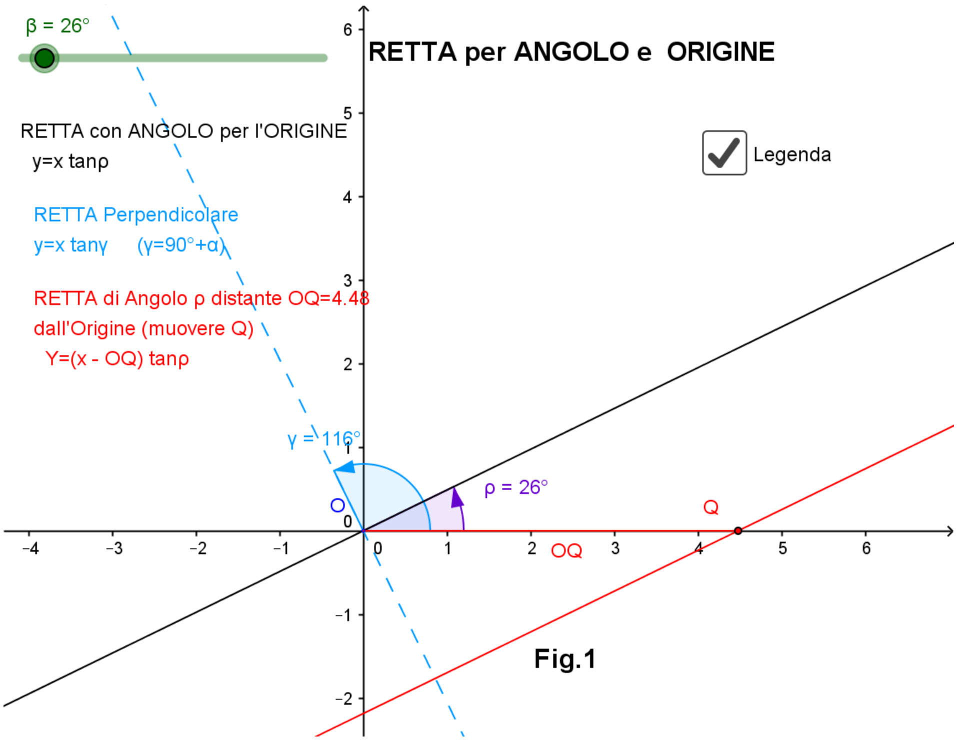


Fig.1

Consideriamo una retta passante per l'Origine in un riferimento; sarà una ed una sola la retta di quel dato angolo ρ a passare per l' Origine. Tale retta di angolo ρ, che indicheremo con r(ρ , passando per l'Origine del riferimento cartesiano, in realtà si presenta divisa in due semirette, ciascuna con angolo ρ e (180°+ ρ). La retta dunque avrà verso e direzione sia (ρ) che opposta (180+ρ) e sarà il valore dell'angolo a specificare il suo verso e direzione. Data dunque una retta orientata per ρ, tutti i suoi punti saranno determinati, e un qualunque valore x dell'ascissa la determinerà poiché

$$y = x\tan\rho \quad \text{oppure} \quad y = x\tan(180+\rho)$$

da cui: $y\cos\rho = x\sin\rho \qquad y\cos\rho - x\sin\rho = 0$

$y\cos(180+\rho) = x\sin(180+\rho) \qquad y\cos(180+\rho) - x\sin(180+\rho) = 0$

Un eventuale punto A(a,b) o B(c,d) avrà

$$b\cos\rho - a\sin\rho = d\cos\rho - c\sin\rho = 0$$

$$bcos(180+\rho) - \mathrm{asin}(180+\rho) = dcos(180+\rho) - csin(180+\rho) = 0$$

RETTA NON PER L'ORIGINE

Tuttavia una retta con direzione e verso, non passante per l'Origine non e' posizionata nel riferimento cartesiano, nel senso che sono infinite le rette con tale direzione e verso, e tutte parallele tra loro. Ma se nel nostro riferimento conosciamo un punto di tale retta, allora, tale retta risulterà posizionata e sarà unica, nel riferimento, ad avere quella direzione, quel verso e quel Punto: essa e' dunque orientata ed uguale orientamento avrà ogni suo punto o segmento.

Nella Fig.3a e Fig.3b il punto A è quello che permette di fissare la retta r(ρ nel riferimento cartesiano. In realtà i punti sono due: il punto A e il punto Q intersezione (tale punto esisterà sempre per qualunque retta non parallela alla ascissa, per impostazione stessa). A meno che non sia dato, il punto Q è ricavabile dal punto A stesso, come distanza OQ.
Infatti dato il punto A(a,b) appartenente alla retta, abbiamo $OQ = c = a - \frac{b}{tan\rho}$ ed ogni punto appartenente alla r(ρ dovrà soddisfare la condizione $OQ = c = x - \frac{y}{tan\rho} = a - \frac{b}{tan\rho}$ da cui l'eq. della retta

$$y = (x - c)tan\rho \quad \text{oppure} \quad y = (x - a)tan\rho + b$$

Per c=0 si riavrebbero le formule viste sopra: caso di retta per l'Origine.
Nella figura 3a e 3b che segue abbiamo:

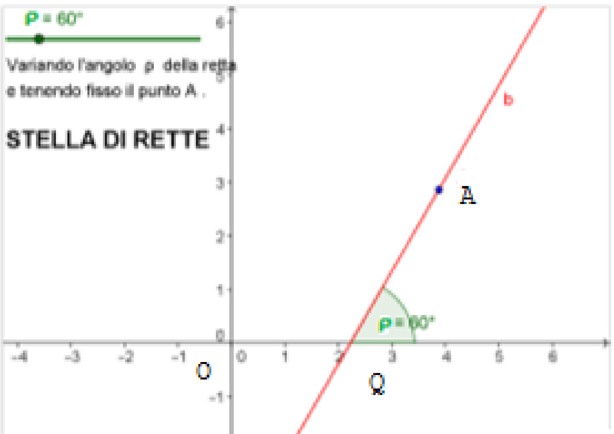


Fig.3a

Fig.3b

lasciando fisso A e variando l'angolo ρ come in Fig.3a abbiamo le infinite rette che ruotano intorno al punto A, cioè una Stella di Rette. Invece per un angolo ρ fisso, Fig.3b, e incrementando il valore dell'ascissa (con ordinata fissa) del punto A abbiamo un insieme di rette parallele, cioè un Fascio di Rette.

DATI DUE PUNTI DETERMINARE LA RETTA CONGIUNGENTE

Siano i punti A(a=OAcosα,b=OAsinα) e B(c=OBcosβ,d=OBsinβ).Il verso della loro congiungente sia per A verso B con angolo ρ e per B verso A con (180+ρ).Avremo:

$$tan\rho = \frac{b-d}{a-c} = \frac{OAsin\alpha - OBsin\beta}{OAcos\alpha - Obcos\beta} \quad \text{oppure} \quad \tan(180+\rho) = \frac{d-b}{a-c} = \frac{OBsin\beta - OAsin\alpha}{OBcos\beta - OAcos\alpha}$$

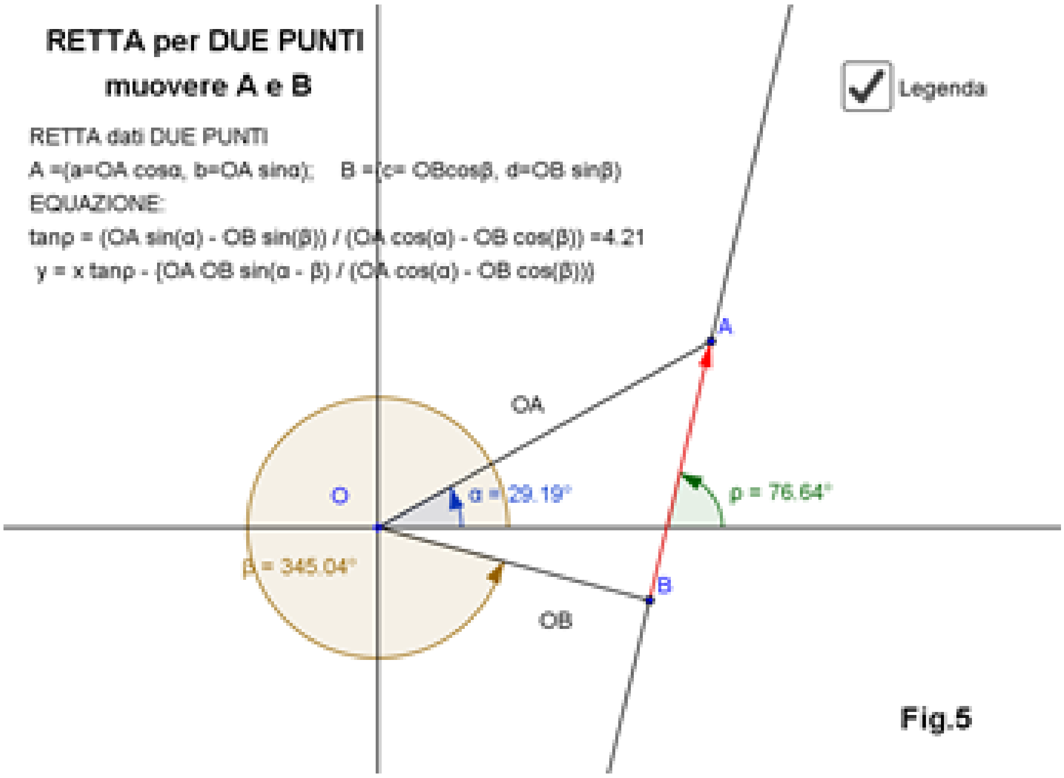


Fig.5

pertanto la scelta del verso r direzione della retta dipenderà dal problema posto. Un qualunque punto X(x,y) per appartenere alla retta, dovrà avere:

$$tan\rho = \frac{y-b}{x-a} = \frac{y - OAsin\alpha}{x - OAcos\alpha} \quad oppure \ \tan(180+\rho) = \frac{y-d}{x-c} = \frac{y - OBsin\beta}{x - OBcos\beta}$$

RETTA TRAMITE LA DISTANZA DALL'ORIGINE

In un riferimento cartesiano ortogonale una qualunque retta si può orientare stabilendo la sua direzione e verso, secondo l'angolo che essa forma con il verso positivo dell'asse x, preso in senso antiorario.
Tuttavia una retta con direzione e verso non e' posizionata nel riferimento cartesiano, nel senso che sono infinite le rette con tale direzione e verso, cioè tutte le parallele.
Se della retta conosciamo nel nostro riferimento cartesiano un suo punto o sappiamo che essa passa per un punto noto, allora, tale retta risulterà posizionata e sarà unica, nel riferimento, ad avere quella direzione, quel verso e quel punto: essa e' dunque orientata ed uguale orientamento avrà ogni suo segmento.
Delle infinite rette di uguale direzione e verso, indicate con r(ρ che ha il significato di retta r con angolo (ρ (preso in senso antiorario con il verso positivo delle x), consideriamone una e tracciamo come da figura Fig.1 la perpendicolare ad essa per l'origine. e sia $\overline{OA}$ la sua distanza data:

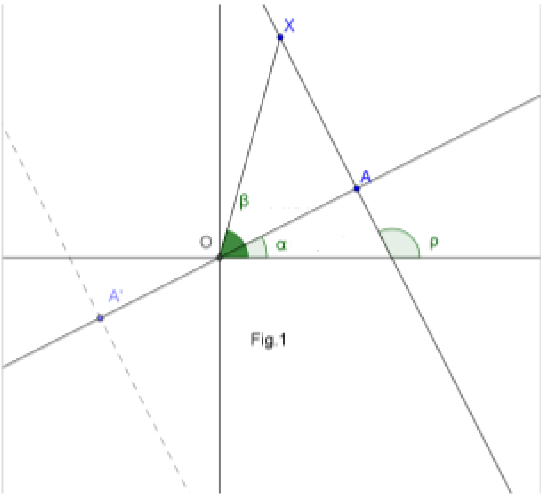


Fig.1

L'Eq. di Vag della distanza $\overline{OA}$ di punto A(a, b) e angolo α (ottenuto dall'angolo ρ (vedi avanti) è:

$$\begin{cases} \left|\overline{OA}\right|\cos\alpha = a & \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \\ \left|\overline{OA}\right| sen\alpha = b & \overline{OA}^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\left|\overline{OA}\right| = a\cos\alpha + bsen\alpha$$

dove il punto A(a,b) estremo di $\overline{OA}$ è punto della retta r(ρ, che risulta dunque essere posizionata.
Infatti tra tutte le parallele alla retta r(ρ due sole avranno dall'origine la distanza OA=OA' ma tale distanza e' unica per l'angolo α (infatti OA' avrà angolo (180 + α)).
Qualunque altro punto X(x,y) rispetto alla distanza OA darà:

$$a)\quad \left|\overline{OX}\right|\cos(\beta-\alpha) = \pm\overline{OA} = \left|\overline{OX}\right|(\cos\beta\cos\alpha + sen\beta sen\alpha) = x\cos\alpha + ysen\alpha$$

(dove è ±OA in quanto ora OA é il valore di una coordinata)
Si osservi che il generico angolo (β-α) essendo l'angolo interno di un triangolo rettangolo e' sempre minore di 90°; e che (β-α) sarà positivo o negativo a seconda di β > o < α

$$\cos\pm(\beta-\alpha) = \cos(\beta-\alpha) \qquad sen\pm(\beta-\alpha) = \pm sen(\beta-\alpha)$$

Analogamente accade per il valore dell'angolo OXA, dato da (ρ-β) quindi:

$$a)\quad \left|\overline{OX}\right| sen(\rho-\beta) = \pm\overline{OA} = \left|\overline{OX}\right|(sen\rho\cos\beta - \cos\rho sen\beta) = xsen\rho - y\cos\rho$$

$$\cos\pm(\rho-\beta) = \cos(\rho-\beta) \qquad sen\pm(\rho-\beta) = \pm(\rho-\beta)$$

Saranno punti di una retta orientata,distante OA dall'origine,tutti quei punti che soddisferanno le seguenti uguaglianze:

1) $x\,sen\rho - y\cos\rho = \pm\overline{OA}$ in funzione dell' angolo della retta

2) $x\cos\alpha + y sen\alpha = \pm\overline{OA}$ in funzione dell' angolo della distanza

3) $a\,sen\alpha - b\cos\alpha = 0$

4) $a\cos\rho + b\,sen\rho = 0$ in quanto punto della retta

$$180 - \rho = 90 - \alpha \qquad tan(90 - \rho) = tan - \alpha \qquad tan\,\alpha = -\frac{1}{tan\rho}$$

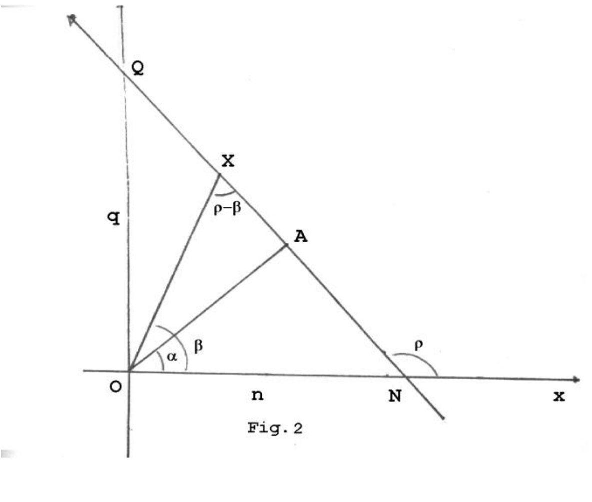
$$tan\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad tan\rho = -\frac{a}{b}$$

PROPRIETA' DELLA RETTA ORIENTATA

Sia una retta orientata, per direzione e verso, e il suo angolo con l'asse x come da figura; il punto X (x,y;β)con angolo $OXA = (\rho - \beta)$ per cui l' Eq. di Vag.:

$$\overline{OX} = \overline{AX}\,cos(\rho - \beta) + \overline{OA}sen(\rho - \beta) \quad *]$$

$$\begin{cases} \overline{OX}\,cos(\rho-\beta) = \overline{OX}(cos\rho\, cos\beta + sin\rho\, sin\beta) = x\,cos\rho + y sen\rho = \overline{AX} \\ \overline{OX}sen(\rho-\beta) = \overline{OX}(sin\rho\, cos\beta - cos\rho\, sin\beta) = x sen\rho - y\,cos\rho = \overline{OA} \end{cases}$$



dove AX e OA assumono un segno essendo i valori delle coordinate di OX per un angolo (ρ-β). Sviluppiamo *] in funzione dell'angolo ρ:

$$\begin{cases} \overline{OX}\cos\rho = \overline{AX}\cos\beta - \overline{OA}\,\text{sen}\,\beta \\ \overline{OX}\,\text{sen}\,\rho = \overline{AX}\,\text{sen}\,\beta + \overline{OA}\cos\beta \end{cases}$$

$$\tan\rho = \frac{\overline{AX}\,\text{sen}\,\beta + \overline{OA}\cos\beta}{\overline{AX}\cos\beta - \overline{OA}\,\text{sen}\,\beta}$$

$$\overline{OX} = (AX\cos\beta - OA\,\text{sen}\,\beta)\cos\rho + (AX\,\text{sen}\,\beta + OA\cos\beta)\,\text{sen}\,\rho$$

Sviluppiamo *] in funzione dell'angolo β:

$$\begin{cases} \overline{OX}\cos\beta = \overline{AX}\cos\rho + \overline{OA}sen\rho = x \\ \overline{OX}sen\beta = \overline{AX}sen\rho - \overline{OA}\cos\rho = y \end{cases} \qquad \tan\beta = \frac{\overline{AX}sen\rho - \overline{OA}\cos\rho}{\overline{AX}\cos\rho + \overline{OA}sen\rho} = \frac{y}{x}$$

$$\overline{OX} = \left(\overline{AX}\cos\rho + \overline{OA}\operatorname{sen}\rho\right)\cos\beta + \left(\overline{AX}\operatorname{sen}\rho - \overline{OA}\cos\rho\right)\operatorname{sen}\beta$$

Vediamo anche le uguaglianze:

$xsen\rho - y\cos\rho = \pm\overline{OA}$ punti di una retta distante OA dall'origine.

$x\operatorname{sen}\rho - y\cos\rho = 0$ punti di una retta per l'origine.

Consideriamo l'angolo (β-α) anziché (ρ-β):

$$\begin{cases} \overline{OX}\cos(\beta-\alpha) = \overline{OX}(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = OA \\ \overline{OX}\operatorname{sen}(\beta-\alpha) = \overline{OX}(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) = y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha = AX \end{cases}$$

Eq. di Vag che per le considerazioni fatte:

$$\overline{OX}\,cos(\beta-\alpha) = \overline{OA} = \pm\left|\overline{OA}\right| = x\,cos\,\alpha + y\,sen\,\alpha = \pm(a\,cos\,\alpha + b\,sen\,\alpha)$$

e analogamente a quanto fatto nella pagina precedente per (ρ-β):

$$\begin{cases} \overline{OX}\cos\beta = \overline{OA}\cos\alpha - \overline{AX}\operatorname{sen}\alpha = x \\ \overline{OX}\operatorname{sen}\beta = \overline{OA}\operatorname{sen}\alpha + \overline{AX}\cos\alpha = y \end{cases}$$

Infatti:

$OX^2 = AX^2 + OA^2;\quad cos^2(\rho-\beta) + sen^2(\rho-\beta) = 1;\quad cos^2(\beta-\alpha) + sen^2(\beta-\alpha) = 1$

mentre la Ug. del teorema delle proiezioni "può essere" una Eq. di Vag.

Sia la retta r(ρ e un suo punto B(a_0;b_0;α_0) l'insieme dei suoi punti X (x;y;β) è tale che:

$$\pm OA = OX\operatorname{sen}(\rho-\beta) = OB\operatorname{sen}(\rho-\alpha_0)$$

$$*)\quad \pm OA = x\operatorname{sen}\rho - y\cos\rho = a_0\operatorname{sen}\rho - b_0\cos\rho$$

da cui si ricava l'equazione di tutti i punti della retta tramite il suo angolo (coefficiente angolare):

$$(x-a_0)\mathrm{sen}\rho - (y-b_0)\cos\rho = 0; \qquad \tan\rho = -\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{y-b_0}{x-a_0} = \frac{\overline{OX}\mathrm{sen}\beta - \overline{OB}\mathrm{sen}\alpha}{\overline{OX}\cos\beta - \overline{OB}\cos\alpha}$$

(α è l'angolo della distanza della retta dal centro)

Facendo $\pm\overline{OA} = \pm\overline{OQ}\cos\rho = \pm\overline{ON}\operatorname{sen}\rho$ (vedi fig 2)

OQ=q e ON=n intersezione della retta con gli assi

si avrà l'eq. classica della retta se li sostituiamo in *)

$y = x\tan\rho \pm q$ *e* $y = (x \pm n)\tan\rho$ dando a quest'ultima dei valori generici a,b,c

$\tan\rho = -\frac{a}{b}$ e $-\frac{c}{b} = q$ e $\frac{c}{a} = n$ sara' $y = -\frac{ax+c}{b}$ si ha l' eq. implicita della retta $ax+by+c=0$

Si osservino le equazioni polari:

$$\overline{OX} = \frac{\pm\overline{OA}}{sen(\rho-\beta)} \qquad \overline{OX} = \frac{\pm\overline{OA}}{cos(\beta-\alpha)}$$

RETTA TRAMITE DUE PUNTI

Dati due punti $A(a_0,b_0)$ e $B(a_1,b_1)$ e' possibile scrivere:

$(a_0-a_1)cos\rho+(b_0-b_1)sen\rho=\overline{BA}$

$(a_1-a_0)cos\rho'+(b_1-b_0)sen\rho'=\overline{AB}$ entrambe le equazioni danno:

$$\overline{BA}^2 = \overline{AB}^2 = (a_0-a_1)^2+(b_0-b_1)^2 = (a_1-a_0)^2+(b_1-b_0)^2$$

$$\cos^2\rho+\text{sen}^2\rho=1 \qquad \cos^2\rho'+\text{sen}^2\rho'=1 \qquad \rho'=180-\rho$$

dovrà essere scelta tuttavia quella il cui verso ci interessa cioè $\vec{BA}$ o $\vec{AB}$ indicate rispettivamente dall'angolo ρ oppure ρ'

Puo' essere utile sapere i legami esistenti tra una retta determinata dai suoi punti e una retta orientata:

$cos(\beta-\alpha)=sen(\rho-\beta);$ $\quad sen(\beta-\alpha)=cos(\rho-\beta)$

$$\frac{1}{tan(\beta-\alpha)}=tan(\rho-\beta)$$

(Vedi ESEMPIO IV° numerico)

STELLA E FASCIO DI RETTE

Dato un punto P (x_0,y_0) possiamo scrivere

$$x_0\,sen\rho-y_0\,cos\rho=\pm\overline{OA}$$

Il variare del valore dell'angolo ρ varia la distanza $\pm\overline{OA}$ di tutte le rette per il punto P (Stella di rette).

Per un punto qualunque X (x,y) e un valore fisso di ρ si avrà

$$x\,sen\rho-y\,cos\rho=\pm\overline{OA}$$

il variare delle coordinate del punto X si avrà una serie di rette parallele (Fascio di rette) di angolo ρ costante e distanza $\pm\overline{OA}$ variabile.

FISSATA UNA RETTA TROVARE LA SUA DISTANZA DALL'ORIGINE E LE COORDINATE DI QUESTA (ESEMPIO 1)

Sia la retta r(ρ e il punto che la fissi sul piano P(x_0, y_0).
Sappiamo
$x_0\,sen\rho - y_0 \cos\rho = \pm\overline{OA}$
per cui $\pm\overline{OA}$ risulta noto e se le coordinate di A supponiamo essere (a,b) potremmo scrivere:

$$\begin{cases} a\,\text{sen}\,\rho - b\cos\rho = \pm\overline{OA} \\ a\cos\rho + b\,\text{sen}\,\rho = 0 \end{cases}$$

sistema che dà come risultato:
b = −(±$\overline{OA}$ cos ρ) *e* *a = ±$\overline{OA}$ sen ρ*

A questo punto per ottenere il vero valore di α, angolo di OA distanza della retta dall'origine, si dovrà fare $\alpha = inv\tan\frac{b}{a}$ e poi considerando i segni di (a,b) vedere in quale quadrante esso capita per poter decidere:

I / Quadr $\alpha = |\alpha|$ *II / Q* $\alpha = 180 - |\alpha|$
III / Q $\alpha = 180 + |\alpha|$ *IV / Q* $\alpha = 360 - |\alpha|$

TRACCIARE UNA RETTA ORIENTATA (ESEMPIO 2)

Sia la retta r(ρ e un punto P(x_0, y_0) che la fissi sul piano: è ovvio che essendo noti i tre dati $\rho; x_0; y_0$ è possibile tracciarla per verso e direzione.
Ma vediamo come dobbiamo fare per tracciarla per punti; cioè allineare tutti i suoi punti.
Nell'esempio che segue si deve trovare la distanza ±OA della retta r(ρ, le coordinate del punto A e l'angolo α di OA proprio come si è fatto nell'esempio 1. L'angolo α di OA deve avere il suo valore vero rispetto all'asse delle ascisse.
Una volta trovato l'angolo α e $\pm OA$ possiamo far variare l'angolo β di ogni punto della retta tra:

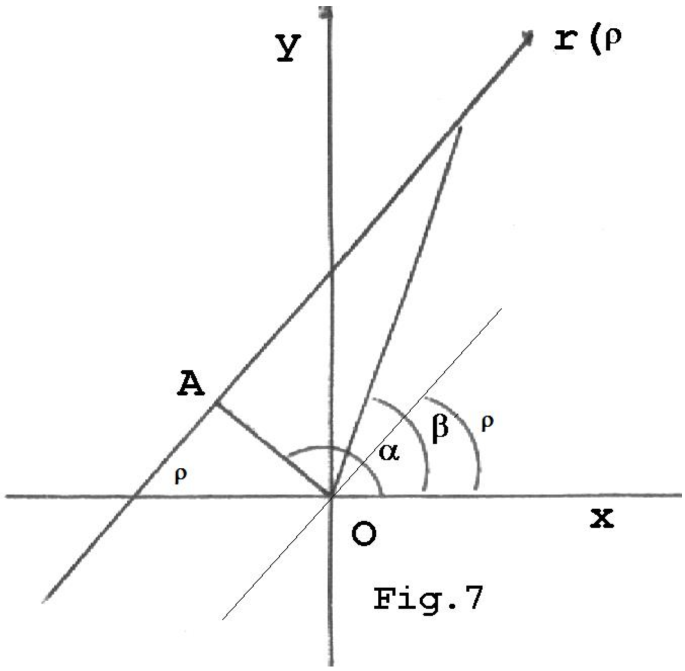


Fig.7

$$(90-\rho)=(180-\alpha)$$

$$\alpha = 90+\rho \ ; \quad \rho = \alpha - 90$$

$\rho \le \beta \le 180+\rho$ da cui

$$(\alpha-90) \le \beta \le (\alpha+90)$$

per poter trovare

$$\left|\overline{OX}\right| = \frac{\pm OA}{sen(\rho-\beta)}$$

e quindi avere tutti i punti che determinano la r(ρ :

$$\begin{cases} \left|\overline{OX}\right| \cos\beta = x \\ \left|\overline{OX}\right| sen\beta = y \end{cases} \qquad \frac{\pm OA}{sen(\rho-\beta)} = \mathrm{OX} = \mathrm{x}\cos\beta + \mathrm{y}sen\beta \ \text{ Eq. di Vag}$$

DISTANZA DI DUE PUNTI DI UNA RETTA ORIENTATA (ESEMPIO 3)

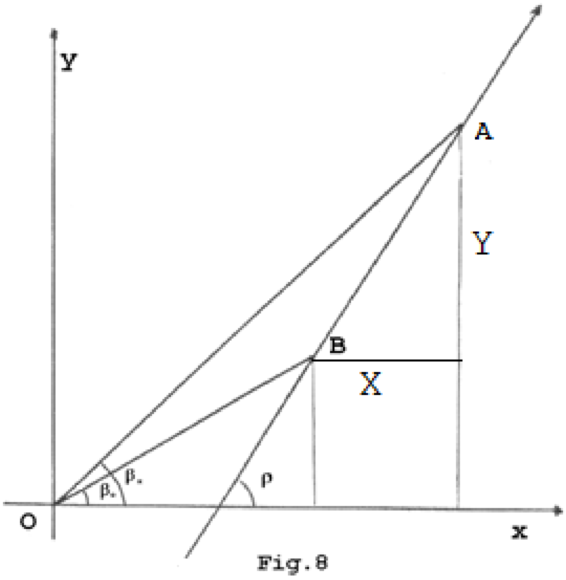


Fig.8

Dati due punti $B(x_0;y_0;\beta_0) e A(x;y;\beta_x)$ della retta r(ρ come da figura, la loro distanza è data:

$$\overline{BA} = \overline{OA}\cos(\rho-\beta_x) - \overline{OB}\cos(\rho-\beta_0) =$$
$$= (\overline{OA}\cos\beta_x - \overline{OB}\cos\beta_0)\cos\rho +$$
$$+ (\overline{OA}sen\beta_x - \overline{OB}sen\beta_0)sen\rho =$$
$$= (x-x_0)\cos\rho + (y-y_0)sen\rho$$

$$\begin{cases} \overline{BA}\cos\rho = OX\cos\beta_x - OB\cos\beta_0 = X \\ \overline{BA}\sin\rho = OX\sin\beta_x - OB\sin\beta_0 = Y \end{cases}$$

$$\tan\rho = \frac{Y}{X}$$

L'espressione ora vista darà un valore positivo o negativo a seconda se facciamo

$(x-x_0);(y-y_0);\ \tan\rho = \dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ oppure $(x_0-x);(y_0-y);\ \tan\rho = \dfrac{y_0-y}{x_0-x}$

Se $\beta_0=0$ (cioè B sull'ascissa), allora BA= OAcos(ρ-β_x)- OBcos(ρ).
Facendo:

$$\overline{BA}^2 = (OX\cos\beta_x - OB\cos\beta_0)^4 + (OX\sin\beta_x - OB\sin\beta_0)^2 =$$
$$= R^2 + r^2 - 2Rr(\cos\beta_x\cos\beta_0 + \sin\beta_x\sin\beta_0) = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\beta_x - \beta_0) =$$
$$= R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta \quad per \quad \beta = (\beta_x - \beta_0)$$

infine quadrando e svolgendo l'ultima espressione si ottiene il segmento di ellisse:

$$\overline{BA}^2 = (R-r)^2\cos^2\frac{\beta}{2} + (R+r)^2\sin^2\frac{\beta}{2}$$

CALCOLO NUMERICO DELLA DISTANZA DI DUE PUNTI

ESEMPIO IV

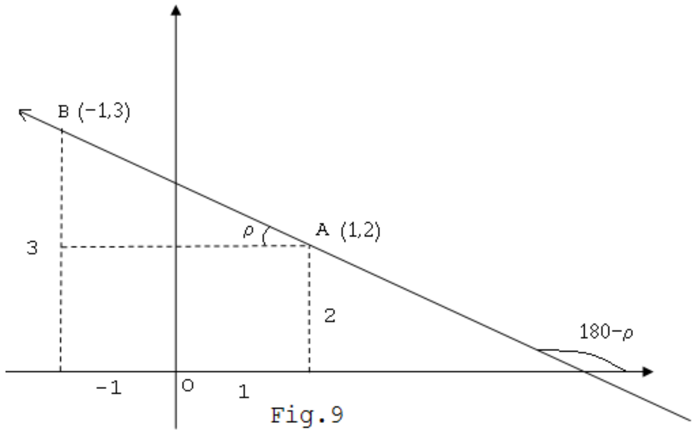


Fig.9

Siano i punti A(1;2), B(-1,3).
Per ottenere l'angolo della retta per verso e direzione dobbiamo tener presente:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cos\rho = (-1-1) = -2\\ \overrightarrow{AB}\sin\rho = (3-2) = 1\end{cases} \qquad \begin{cases}\overrightarrow{BA}\cos\rho = (1+1) = 2\\ \overrightarrow{BA}\sin\rho = (2-3) = -1\end{cases} \qquad \overline{AB} = \overline{BA} = \sqrt{5}$$

L'angolo della retta con asse delle X sarà:

$$\tan\rho = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = -0,5 \qquad \rho = -26,565051$$

Il vero verso e direzione della retta avrà angolo (180-ρ) per $\overrightarrow{AB}$ e (360-ρ) per $\overrightarrow{BA}$, ma ai fini del calcolo e del posizionamento della retta, basta considerare ρ=-26,565051.
L'angolo della distanza d=OA perpendicolare dal centro O alla retta sappiamo essere $\alpha = 90 - \rho$ o meglio:

$$\tan\alpha = -\frac{1}{\tan\rho} = \frac{-1}{-0,5} = 2 \qquad \alpha = (63,434949).$$

e la sua distanza sappiamo essere: $d = x\sin\rho - y\cos\rho$ cioè:

$$\begin{cases}\text{col punto } A & +1\sin(-26,565051) - 2\cos(-26,565051) = -2,236067\\ \text{col punto B} & -1\sin(-26,565051) - 3\cos(-26,565051) = -2,236067\end{cases}$$

Tramite il valore assoluto della distanza -d- e del suo angolo α abbiamo le coordinate:

$$\begin{cases}(2,236067)\cos(63,434949) = x = 1\\ (2,236067)\sin(63,434949) = y = 2\end{cases}$$

dove il punto A(1,2) è anche l'estremo della distanza -d-.