

**V. PARAMETRI COME FUNZIONE DI CIRCONFERENZA
E COME VALORI DELLE COORDINATE**

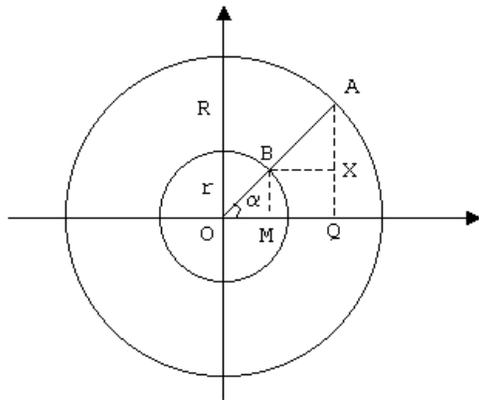
I PARAMETRI DI ELLISSE, IPERBOLE E PARABOLE COME FUNZIONE DI CIRCONFERENZA

Si è visto sin qui che il vantaggio dell'uso delle Equazioni di Vag è essenzialmente nel fatto di poter dare ai membri di tale equazione valori opportuni purchè si rispetti la condizione propria di tale equazione.

Qui vogliamo far vedere come sia possibile rappresentare i parametri delle Curve classiche mediante valori forniti da una circonferenza.

ELLISSE

Siano dunque due circonferenze di raggio rispettivamente R e r, come da fig., si avrà per un angolo α



$$\overline{OQ} = R \cos \alpha \quad e \quad \overline{MB} = \overline{XQ} = r \sin \alpha$$

posto $\overline{OX}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{XQ}^2$

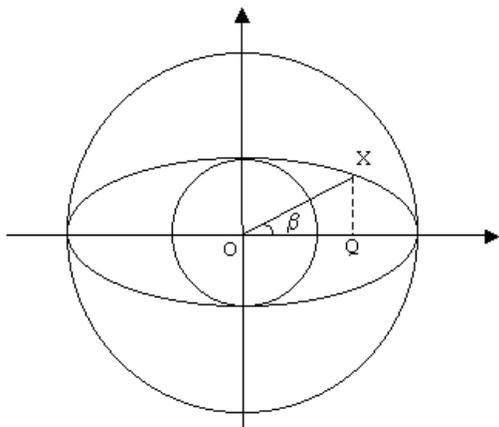
e per un opportuno β avremo l'Eq. Di Vag:

$$|\overline{OX}| = \overline{OQ} \cos \beta + \overline{BM} \sin \beta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\overline{OX}| \cos \beta = R \cos \alpha = \overline{OQ} \\ |\overline{OX}| \sin \beta = r \sin \alpha = \overline{XQ} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\overline{OX}| \cos \beta = R \cos \alpha = \overline{OQ} \\ |\overline{OX}| \sin \beta = r \sin \alpha = \overline{XQ} \end{array} \right.$$

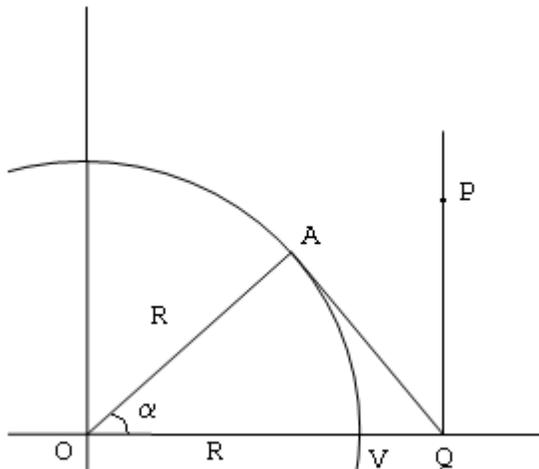
$$\tan \beta = \frac{r}{R} \tan \alpha$$



facendo $q = R$ e $m = r$ riavrò la classica equazione parametrica dell'Ellisse in funzione delle circonferenze e dell'angolo α per $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$:

$$|\overline{OX}| = (q \cos \alpha) \cos \beta + (m \sin \alpha) \sin \beta$$

IPERBOLE EQUILATERA



$$\overline{OQ} = \frac{R}{\cos \alpha}; \overline{QA} = \overline{QP} = R \tan \alpha$$

$$\overline{OP}^2 = R^2 \frac{(1 + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha}$$

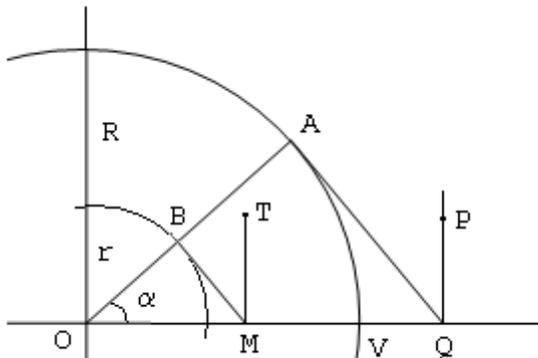
$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \beta = \frac{R}{\cos \alpha} \\ \overline{OP} \sin \beta = R \tan \alpha \end{cases}$$

$$\tan \beta = \sin \alpha$$

$$(q = m = R; 0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ)$$

Si osservi che i valori di x e y sono i valori delle funzioni Parametriche (Goniometriche) Iperboliche (vedi Cap. III "Le Curve" Pag. 7).

IPERBOLE



$$\overline{OQ} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$\overline{BM} = \overline{MT} = \overline{QP} = r \tan \alpha$$

$$\overline{OP}^2 = \frac{R^2 + r^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \beta = \frac{R}{\cos \alpha} \\ \overline{OP} \sin \beta = r \tan \alpha \end{cases}$$

$$\tan \beta = \frac{r}{R} \sin \alpha$$

$$(q = R; m = r; 0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ)$$

PARABOLA

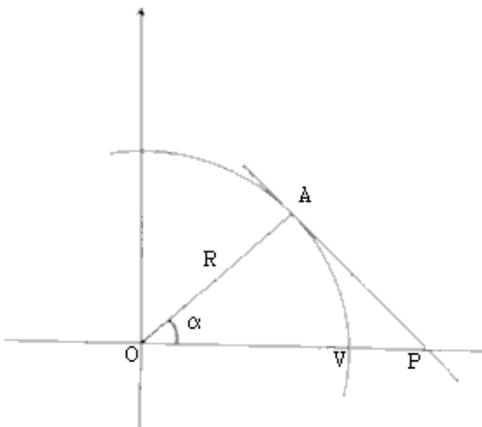
Come per l'ellisse e l'Iperbole anche per la Parabola è possibile il calcolo tramite una circonferenza.

In precedenza abbiamo visto che le quattro Parabole fondamentali hanno come distanza di ciascun punto della curva dall'origine:

$$\frac{p}{2} \leq (p \pm x); \quad \frac{p}{2} \leq (p \pm y)$$

cioè un valore positivo uguale o maggiore a $\frac{p}{2}$ il che possiamo rappresentarlo facendo con $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

$$\frac{p}{2} \frac{1}{\cos \alpha} = (p \pm x) \quad \text{oppure} \quad \frac{p}{2} \frac{1}{\cos \alpha} = (p \pm y)$$



Dalla figura vediamo $\overline{OP} = \frac{R}{\cos \alpha}$ per cui posto $p=2R$ (R distanza Vertice-Fuoco per definizione) avremo:

$$\frac{p}{2} \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha} = (2R \pm x); \quad \frac{R}{\cos \alpha} = (2R \pm y)$$

$$\begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x \\ \frac{R}{\cos \alpha} \text{sen} \beta = y \end{cases}$$

In questa ultima Eq. di Vag abbiamo soltanto la distanza OP (distanza di un punto di Parabola dal Fuoco nell'Origine) e nessun legame tra gli angoli α e β per ottenere le quali e le quattro parabole, dobbiamo dare dei valori alle rispettive coordinate ricavandole dall'uguaglianza precedente:

$$x = \frac{R}{\cos \alpha} - 2R = 2R - \frac{R}{\cos \alpha} \quad \text{parabole aperte a destra e a sinistra}$$

$$y = \frac{R}{\cos \alpha} - 2R = 2R - \frac{R}{\cos \alpha} \quad \text{parabole aperte in alto e in basso}$$

Analizziamo le parabole aperte a destra e a sinistra cioè quelle di valore $(p \pm x)$ (analogo ragionamento vale per le parabole aperte in alto e in basso).

Prendiamo le parabole tipo $(p+x)$ (aperte a destra) e scriviamone l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x = \left(\frac{R}{\cos \alpha} - 2R \right) = \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \\ \frac{R}{\cos \alpha} \text{sen} \beta = y \end{cases}$$

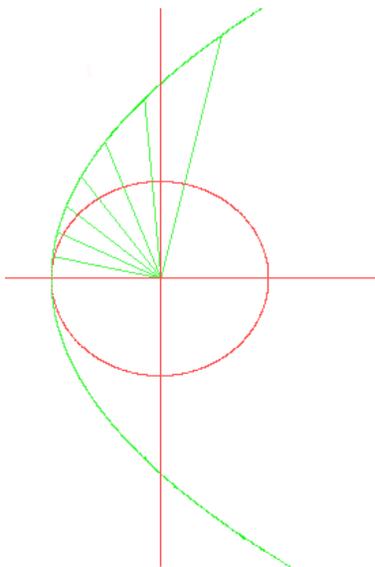
prendendo $x = 2R - \frac{R}{\cos \alpha}$ (aperte a sinistra) il valore della y non cambia.

Dalla prima riga del sistema si può ottenere il valore di $\beta = \arccos(1 - 2 \cos \alpha)$ e da questo ottenere tramite la seconda riga il valore di y . Volendo possiamo anche fare:

$$y^2 = \left(\frac{R}{\cos \alpha}\right)^2 - \left(\frac{R}{\cos \alpha}\right)^2 (1 - 2 \cos \alpha)^2 = 4 \left(\frac{R}{\cos \alpha}\right)^2 (\cos \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$y = \pm 2 \frac{R}{\cos \alpha} \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}$$

$$\begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x = \left(\frac{R}{\cos \alpha} - 2R\right) = \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \\ \frac{R}{\cos \alpha} \sin \beta = y = \frac{R}{\cos \alpha} \left[\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}\right] \end{cases}$$



Tale parabola ha il fuoco nell'origine e Vertice $(-R, 0)$.

Dividendo i membri dell'Eq. di Vag avremo:

$$\begin{cases} \cos \beta = (1 - 2 \cos \alpha) \\ \sin \beta = \pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \end{cases} \quad \tan \beta = \frac{\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}}{1 - 2 \cos \alpha}$$

si stabilisce così il legame tra gli angoli α e β , e si osservi che:

$$\mathbf{a] } R = R(1 - 2 \cos \alpha) \cos \beta + R(\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}) \sin \beta$$

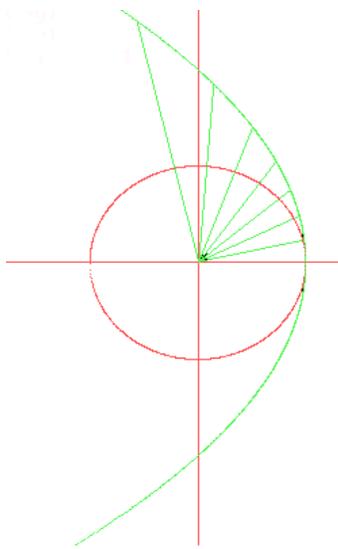
è Eq. di Vag di una circonferenza di raggio R .

$$\mathbf{b] } \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \cos \beta + \frac{R}{\cos \alpha} (\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}) \sin \beta$$

è Eq. Di Vag di una parabola di parametro $p=2R$.

Prendiamo le parabole tipo $(p-x)$ (aperta a sinistra): $x = -\left(\frac{R}{\cos \alpha} - 2R\right)$

tutto il procedimento visto non sarebbe cambiato se non per il solo valore della x (negativo in questo caso). L'Eq. di Vag risultante sarebbe stata:



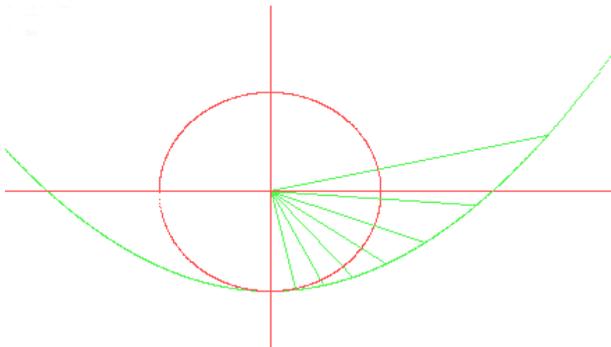
$$\begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x = -\left(\frac{R}{\cos \alpha} - 2R\right) = -\frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \\ \frac{R}{\cos \alpha} \sin \beta = y = \frac{R}{\cos \alpha} \left[\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right] \end{cases}$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = -\frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \cos \beta + \frac{R}{\cos \alpha} (\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}) \sin \beta$$

Il rapporto tra α e β non è mutato:

$$\tan \beta = \frac{\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}}{-(1 - 2 \cos \alpha)} = \frac{\mp 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}}{+(1 - 2 \cos \alpha)}$$

Prendiamo le parabole tipo (p+y) (aperta verso l'alto):

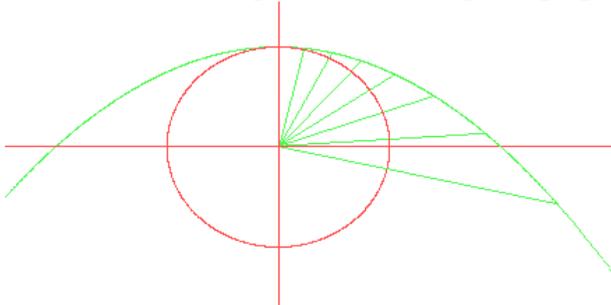


$$\begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x = \frac{R}{\cos \alpha} \left[\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right] \\ \frac{R}{\cos \alpha} \sin \beta = y = \left(\frac{R}{\cos \alpha} - 2R\right) = \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \end{cases}$$

$$\tan \beta = \frac{(1 - 2 \cos \alpha)}{\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}}$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha} \left[\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right] \cos \beta + \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \sin \beta$$

Prendiamo le parabole tipo (p-y) (aperta verso il basso):



$$\begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x = \frac{R}{\cos \alpha} \left[\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right] \\ \frac{R}{\cos \alpha} \sin \beta = y = \left(\frac{R}{\cos \alpha} - 2R\right) = -\frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \end{cases}$$

$$\tan \beta = \frac{+(1 - 2 \cos \alpha)}{\mp 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}}$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha} \left[\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right] \cos \beta + \frac{R}{\cos \alpha} - (1 - 2 \cos \alpha) \sin \beta$$

TANGENTE DELLA PARABOLA (DERIVATA)

Prendiamo in considerazione i valori dell'Eq. Parametrica (p+x):

$$y = \frac{R}{\cos \alpha} \left[+ 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right]; \quad x = \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha)$$

e cerchiamone la derivata prima:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\alpha} &= \left(\frac{R}{\cos \alpha} \right)' \left(2\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha} \right) + \left(\frac{R}{\cos \alpha} \right) \left(2\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha} \right)' = \\ &= \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} 2\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha} + \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \frac{2 \cos \alpha - 1}{\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} \left[\left(2\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha} \right) + \frac{2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}} \right] = \\ &= \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{d\alpha} = \left(\frac{R}{\cos \alpha} \right)' (1 - 2 \cos \alpha) + \left(\frac{R}{\cos \alpha} \right) (1 - 2 \cos \alpha)' = \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{2R \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{2R \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \rho = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}}{(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

da quanto visto nei capitoli precedenti si avrà:

$$\text{Caso (p+x): } \tan \rho = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1 - \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad \text{dove } \cos \alpha = \frac{1 - \cos \beta}{2}$$

$$\text{Caso (p-x): } \tan \rho = \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{y} = -\frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = -\sqrt{\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad \text{dove } \cos \alpha = \frac{1 + \cos \beta}{2}$$

$$\text{Caso (p+y): } \tan \rho = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p} = \frac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen} \beta} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}} \quad \text{dove } \cos \alpha = \frac{1 - \sin \beta}{2}$$

$$\text{Caso (p-y): } \tan \rho = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{p} = -\frac{\cos \beta}{1 + \operatorname{sen} \beta} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}} \quad \text{dove } \cos \alpha = \frac{1 + \sin \beta}{2}$$

EQ. DEL MOTO DEGLI ASTEROIDI

Da ciò che abbiamo visto nel precedente Titolo "PARABOLA", scriviamo l'Eq. della "PARABOLA di Vag":

$$a) \begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x = \pm \left(\frac{R}{\cos \alpha} - 2R \right) = \pm \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \\ \frac{R}{\cos \alpha} \sin \beta = y = \frac{R}{\cos \alpha} \left[\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right] \end{cases}$$

che può anche essere scritta (intendendo $\alpha = 90 - \alpha$ cioè $\cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$):

$$b) \begin{cases} \frac{R}{\sin \alpha} \cos \beta = x = \pm \left(\frac{R}{\sin \alpha} - 2R \right) = \pm \frac{R}{\sin \alpha} (1 - 2 \sin \alpha) \\ \frac{R}{\sin \alpha} \sin \beta = y = \frac{R}{\sin \alpha} \left[\pm 2 \sqrt{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)} \right] \end{cases}$$

Entrambe hanno lo stesso significato con la sola differenza che a] parte dal vertice della parabola verso l' infinito mentre la b] viene dall'infinito verso il vertice.

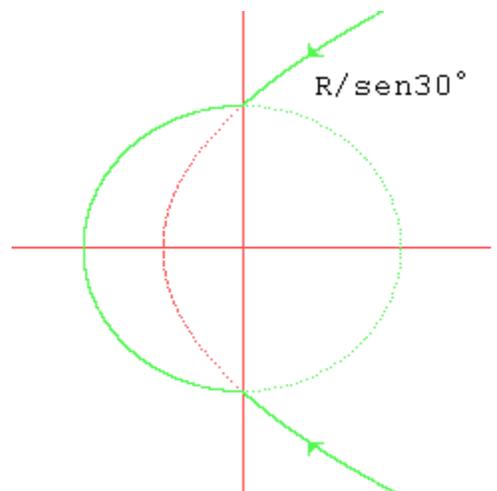
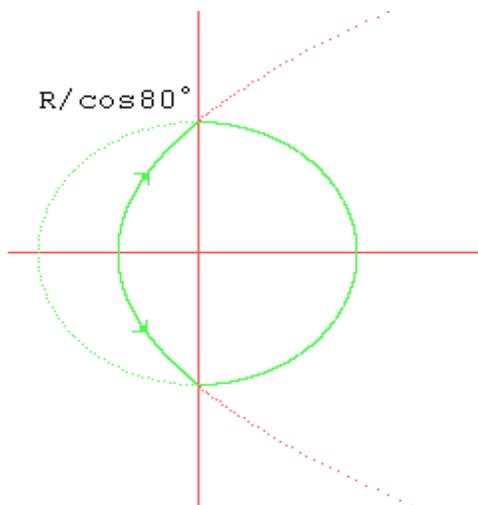
Si osservi la seguente variazione:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{R}{\cos \alpha_1} (1 - 2 \cos \alpha) \\ y = \frac{R}{\cos \alpha_1} \left[\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \right] \end{cases}$$

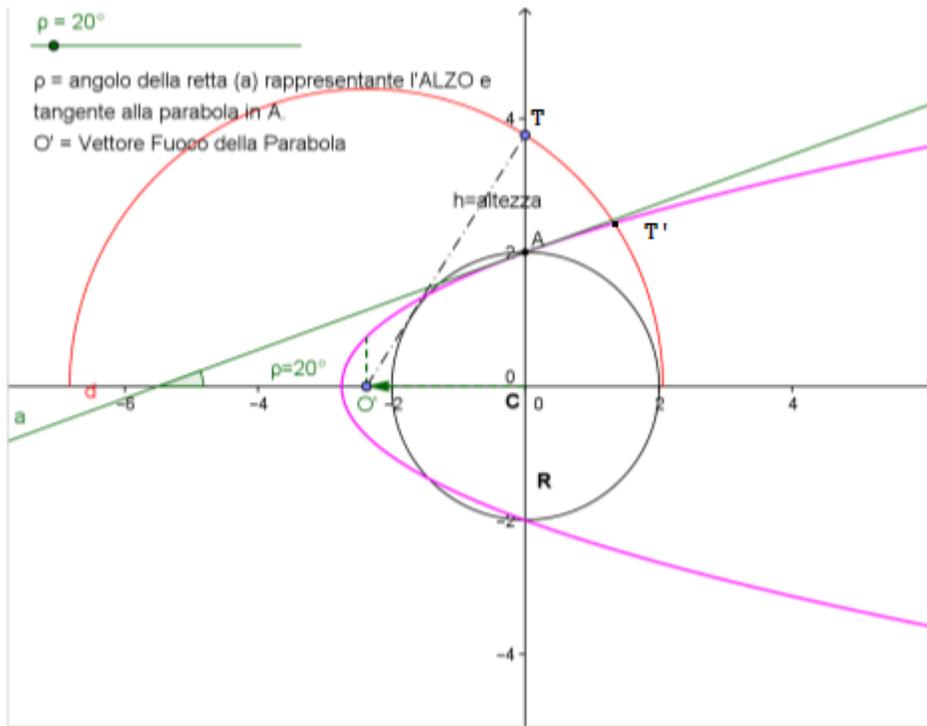
dove ponendo $\alpha_1 = \alpha$ non ci sarà nessuna diversità con le Eq. Di Vag viste sopra. Se però poniamo un limite ad α_1 :

$$\begin{cases} \alpha = 0^\circ \dots \dots \dots \alpha' \dots \dots \dots 90^\circ \\ \alpha_1 = 0^\circ \dots \dots \dots \alpha' \dots \alpha' \dots \alpha' \dots \alpha' \end{cases}$$

cioè $\alpha_1 = \alpha$ fino al valore α' dopo di che $\alpha_1 = \alpha'$ costante si avrà che nella equazione anche $\frac{R}{\cos \alpha'} = R'$ e la equazione sarà una parabola fino al valore $\alpha_1 = \alpha'$ dopo di che diventerà una circonferenza di raggio R'



PARABOLA DEL MOTO TRAMITE UNA SUA TANGENTE



Sia ρ angolo di una tangente in $A(0,R)$ della parabola che vogliamo cercare: il tutto come in figura sopra.

La tangente è relativa ad una Parabola riferita al suo Fuoco del tipo $(p+x)$ di cui abbia visto in precedenza.

$$\tan \rho = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{p}{R} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

dove $\cos \alpha = \frac{1 - \cos \beta}{2}$ e $\beta = 2\rho$ (Cap. III Bis Pag. 4)

quindi il Parametro della parabola è: $p = y \tan(\rho) = R \tan(\rho)$

pertanto possiamo scrivere l' Eq. della parabola cercata:

$$\begin{cases} \frac{p}{1 - \cos \beta} \cos \beta = x \\ \frac{p}{1 - \cos \beta} \sin \beta = y = R \end{cases} \quad p = \frac{R(1 - \cos \beta)}{\sin \beta} \quad \text{parametro Parabola}$$

da cui $x = \frac{\cos \beta}{1 - \cos \beta} \frac{R(1 - \cos \beta)}{\sin \beta} = \frac{R}{\tan \beta} = \frac{R}{\tan 2\rho}$

analogamente $\tan \beta = \frac{y}{x} = \frac{R}{x} \quad x = \frac{R}{\tan \beta} = \frac{R}{\tan 2\rho}$

Il valore della x , è quello della distanza $O'A=(p+x)$ e la x è l'ascissa del Fuoco con Coordinate $O'=F(x,0)=\left(\frac{R}{\tan 2\rho},0\right)$.

In funzione del valore della variabile ρ della tangente in A possiamo ottenere, con lo stesso procedimento qualunque altra parabola.

Nella pagina 7, precedente, abbiamo visto come una parabola si possa trasformare in una circonferenza: cerchiamo dunque la circonferenza che passi per un dato punto T ($AT=h$) il che varrà per tutte le nostre parabole ottenute dalle varie tangenti, le quali rappresentano l'"ALZO" nel punto A.

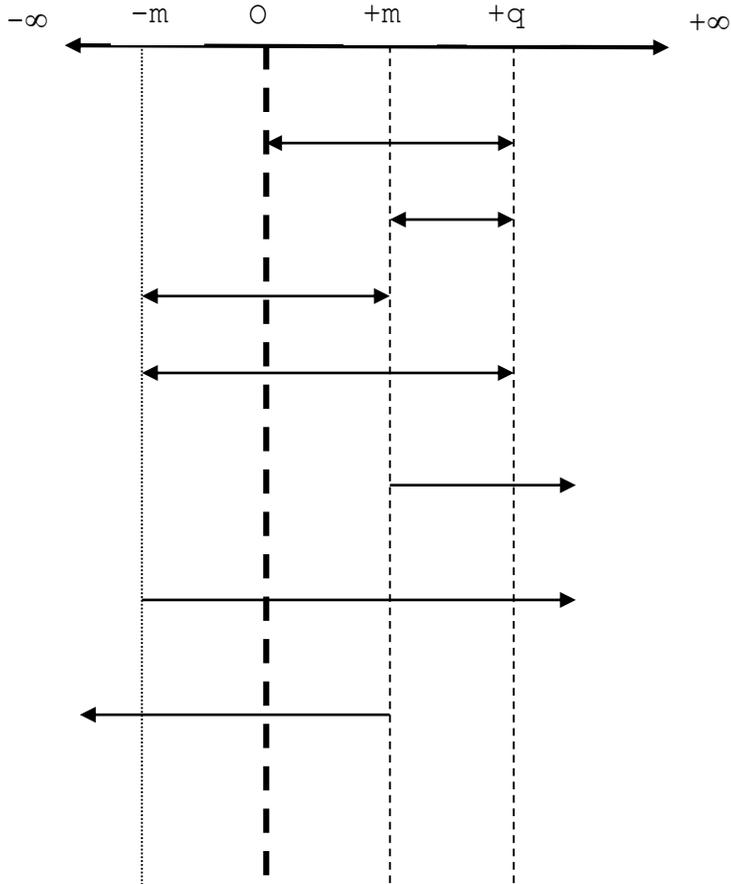
Per definizione $(p+x)=O'T=O'T'=R_T$ (raggio della circonferenza) essendo T' punto della parabola e della nuova circonferenza: abbiamo visto nella pag. precedente che se la variabile α diviene α_1 costante la parabola diventa una circonferenza per

$$\left(\frac{R}{\cos \alpha_1} = R_T\right) \Rightarrow \cos \alpha_1 = \frac{R}{R_T}$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{R}{\cos \alpha_1} (1 - 2 \cos \alpha) = R_T (1 - 2 \cos \alpha) \\ y = \frac{R}{\cos \alpha_1} [\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}] = R_T [\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}] \end{cases}$$

l'ultima espressione è l'eq. parametrica della circonferenza di raggio R_T passante per T.

SCHEMA DEI VALORI DELLE COORDINATE



(derivate)

$q \cos \alpha$	$-q \operatorname{sen} \alpha$
$(q-m) \cos \alpha + m$	$-(q-m) \operatorname{sen} \alpha$
$(2m \cos \alpha - m)$	$-2m \operatorname{sen} \alpha$
$(q+m) \cos \alpha - m$	$-(q+m) \operatorname{sen} \alpha$
$\frac{m}{\cos \alpha}$	$-\frac{m \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha}$
$\frac{m}{\cos \alpha} - 2m$	$-\frac{m \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha}$
$2m - \frac{m}{\cos \alpha}$	$\frac{m \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \alpha}$

Si possono prendere in considerazione anche i valori seno e tangente.

Una particolare applicazione per convertire dell' espressioni in coordinate parametriche è quella di utilizzare i PARAMETRI dell' ellisse e dell' iperbole.

Nel relativo capitolo avevamo descritto le curve ellisse e iperbole partendo dalle equazioni generiche:

Ellisse	$\begin{cases} x = q \cos \alpha \\ y = m \sin \alpha \end{cases}$	$mq = mx \cos \alpha + qy \sin \alpha$	$(mq)^2 = (mx)^2 + (qy)^2$
Iperbole	$\begin{cases} x = q/\cos \alpha \\ y = m \sin \alpha / \cos \alpha \end{cases}$	$mx = mq \cos \alpha + qy \sin \alpha$	$(mq)^2 = (mx)^2 - (qy)^2$
Iperboli (I°;II°) con asintoti le rette q e m	a) $\begin{cases} x = q/\cos \alpha \\ y = m/\sin \alpha \end{cases}$	$yx = mx \sin \alpha + qy \cos \alpha$	$(yx)^2 = (mx)^2 + (qy)^2$
	b) $\begin{cases} x = q/\cos \alpha \\ y = m \sin \alpha \end{cases}$	$mx = mq \cos \alpha + yx \sin \alpha$	$(yx)^2 = (mx)^2 - (mq)^2$

Come esempio di applicazione di queste formule si abbia, la generica espressione:

$$ax^2 + by^2$$

non avendo qui importanza se a è maggiore o minore di b, possiamo considerare $a=m^2$ e $b=q^2$ e scrivere:

$$(mx)^2 + (qy)^2$$

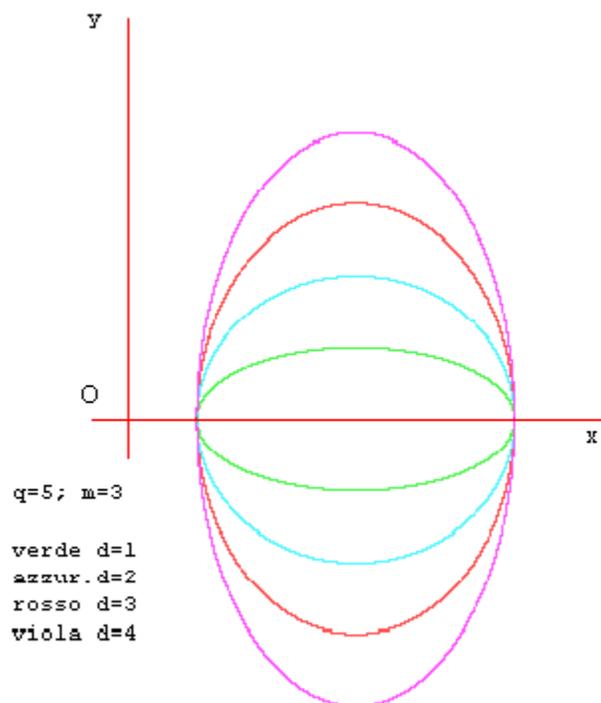
questa espressione raffrontata con la tabellina vista sopra può essere uguagliata alla ellisse per $(mq)^2$ e dare $mq = mx \cos \alpha + qy \sin \alpha$ oppure all'iperbole per $(yx)^2$ e dare $yx = mx \sin \alpha + qy \cos \alpha$: la scelta dipende evidentemente dall' uso e significato che vogliamo.

PARAMETRI COME VALORI DELLE COORDINATE

Agli assi x e y è possibile assegnare dei valori secondo quanto visto nel precedente capitolo "SCHEMA DEI VALORI DELLE COORDINATE". Per esempio posso considerare $x=q\cos\alpha_1$ e $y=m\cos\alpha_2$ e se poi considero $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1$ posso anche scrivere $x=q\cos\alpha_1$ e $y=m\sin\alpha_1$ che come Eq. di Vag rappresenta una Ellisse.

Analogamente avrei potuto scrivere $x=d\cos\alpha_1$ e $y=(q-m)\cos\alpha_2+m$ e per la medesima considerazione fatta sopra $y=(q-m)\sin\alpha_1+m$ e così via per tutte le altre combinazioni.

Tracciamone un esempio: $x=(q-m)\cos\alpha+m$ e $y=d\sin\alpha$, con $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$
:



Si osservi che per $d=2$ l'Ellisse è data da: $x=2\cos\alpha+3$ $y=2\sin\alpha$ cioè una circonferenza il cui centro è spostato dall'origine O di 3.

LA FIGURA "UOVO"

Manipolando opportunamente la formula parametrica possiamo ottenere diverse e nuove figure. Questa che presentiamo è derivata dalla Ellisse e assume la forma di un UOVO.

La formula:
$$\begin{cases} x = (q \cos \alpha) + R \cos^2 \alpha \\ y = m \sin \alpha \end{cases}$$

Dove q ed m sono i semi assi dell'Ellisse; R un qualunque valore.

