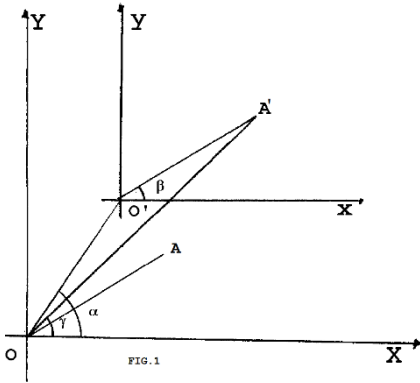


## **VI. TRASLAZIONE ROTAZIONE ROTO-TRASLAZIONE**



$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \beta = X \\ \overline{OA} \sin \beta = Y \end{cases} \quad \overline{OA} = \overline{O'A'} \quad \begin{cases} \overline{OO'} \cos \alpha = a \\ \overline{OO'} \sin \alpha = b \end{cases}$$

$$\overline{OA'} = \overline{OO'} + \overline{O'A'} ; \quad \overline{O'A'} = \overline{OA'} - \overline{OO'}$$

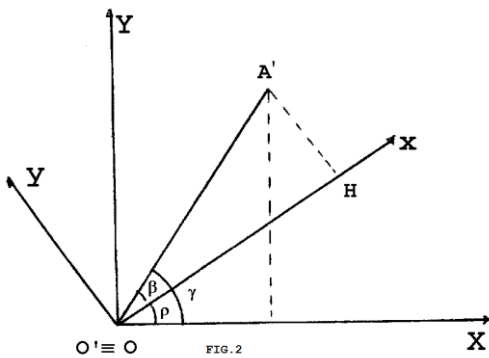
$$\begin{cases} \overline{OA'} \cos \gamma = \overline{O'A'} \cos \beta + \overline{OO'} \cos \alpha = x + a = X \\ \overline{OA'} \sin \gamma = \overline{O'A'} \sin \beta + \overline{OO'} \sin \alpha = y + b = Y \end{cases}$$

$$\overline{OA'} = \overline{OA'} \cos(\gamma - \beta) + \overline{OO'} \cos(\gamma - \alpha)$$

$$\begin{cases} \overline{O'A'} \cos \beta = \overline{OA'} \cos \gamma - \overline{OO'} \cos \alpha = X - a = x \\ \overline{O'A'} \sin \beta = \overline{OA'} \sin \gamma - \overline{OO'} \sin \alpha = Y - b = y \end{cases}$$

$$\overline{O'A'} = \overline{OA'} \cos(\beta - \gamma) - \overline{OO'} \cos(\beta - \alpha)$$

ROTAZIONE DI  $\rho$  DI OA



$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \beta = X & \overline{OA} \text{ posizione iniziale FIG.1} \\ \overline{OA} \sin \beta = Y & \overline{OA} = \overline{O'A'} \text{ posizione dopo } \rho \end{cases}$$

$$\beta = \gamma - \rho \quad \gamma = \beta + \rho$$

$$\begin{cases} \overline{O'A'} \cos \beta = x = \overline{OA} \cos(\gamma - \rho) \\ \overline{O'A'} \sin \beta = y = \overline{OA} \sin(\gamma - \rho) \end{cases} \begin{cases} x = X \cos \rho + Y \sin \rho \\ y = Y \cos \rho - X \sin \rho \end{cases}$$

$$\overline{O'A'} = \overline{OA} \cos(\gamma - \rho) \cos \beta + \overline{OA} \sin(\gamma - \rho) \sin \beta =$$

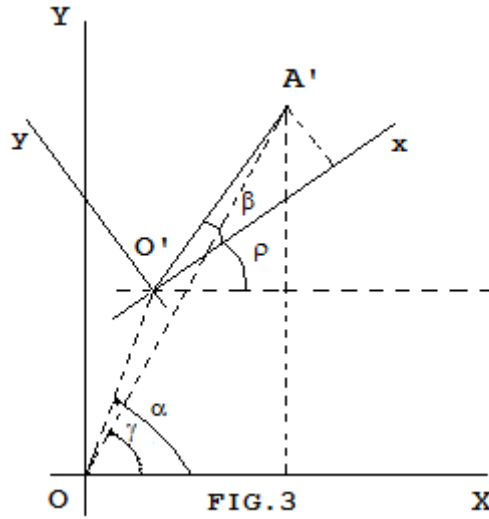
$$= \overline{OA} \cos[\gamma - (\rho + \beta)] = \overline{OA}$$

$$\begin{cases} \overline{O'A'} \cos \gamma = X = \overline{OA} \cos(\beta + \rho) \\ \overline{O'A'} \sin \gamma = Y = \overline{OA} \sin(\beta + \rho) \end{cases} \begin{cases} X = \overline{OA} \cos \beta \cos \rho - \overline{OA} \sin \beta \sin \rho \\ Y = \overline{OA} \sin \beta \cos \rho + \overline{OA} \cos \beta \sin \rho \end{cases} \begin{cases} X = x \cos \rho - y \sin \rho \\ Y = y \cos \rho + x \sin \rho \end{cases}$$

$$\overline{O'A'} = \overline{OA} \cos(\beta + \rho) \cos \gamma + \overline{OA} \sin(\beta + \rho) \sin \gamma =$$

$$= \overline{OA} \cos[\gamma - (\beta + \rho)] = \overline{OA}$$

Matrice di Rivoluzione:  $\begin{vmatrix} \cos \rho & -\sin \rho \\ \sin \rho & \cos \rho \end{vmatrix}$



Sia  $OA'$  ( $X, Y$ ) e angolo  $\gamma$  e  $O'A'$  ( $x, y$ ) angolo  $\beta$  e  
( $OO' \cos \alpha = a, OO' \sin \alpha = b$ ) come da figura da cui l' Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{O'A'} \cos(\beta + \rho) = OA' \cos \gamma - OO' \cos \alpha = X - a \\ \overline{O'A'} \sin(\beta + \rho) = OA' \sin \gamma - OO' \sin \alpha = Y - b \end{cases} \quad 1)$$

Sviluppiamo:

$$O'A' = (OA' \cos \gamma - OO' \cos \alpha) \cos(\beta + \rho) + (OA' \sin \gamma - OO' \sin \alpha) \sin(\beta + \rho)$$

$$O'A' = OA' \cos[\gamma - (\beta + \rho)] - O'O \cos[\alpha - (\beta + \rho)]$$

$$\text{Infine l'Uguaglianza } O'A' = OA' \cos[(\gamma - \rho) - \beta] - O'O \cos[(\alpha - \rho) - \beta] \quad *)$$

da cui:

$$\begin{cases} \overline{O'A'} \cos \beta = OA' \cos(\gamma - \rho) - OO' \cos(\alpha - \rho) = (X \cos \rho + Y \sin \rho) - (a \cos \rho + b \sin \rho) = x \\ \overline{O'A'} \sin \beta = OA' \sin(\gamma - \rho) - OO' \sin(\alpha - \rho) = (Y \cos \rho - X \sin \rho) - (b \cos \rho - a \sin \rho) = y \end{cases} \quad 1\text{bis})$$

Inoltre dalla 1):

$$\begin{cases} \overline{O'A'} \cos \beta = (OA' \cos \gamma - OO' \cos \alpha) \cos \rho + (OA' \sin \gamma - OO' \sin \alpha) \sin \rho = (X - a) \cos \rho + (Y - b) \sin \rho = x \\ \overline{O'A'} \sin \beta = (OA' \sin \gamma - OO' \sin \alpha) \cos \rho + (OA' \cos \gamma - OO' \cos \alpha) \sin \rho = (Y - b) \cos \rho - (X - a) \sin \rho = y \end{cases}$$

e le due forme uguali e risolutive:

$$1^*) \begin{cases} \overline{O'A'} \cos \beta = (X - a) \cos \rho + (Y - b) \sin \rho = (X \cos \rho + Y \sin \rho) - (a \cos \rho + b \sin \rho) = x \\ \overline{O'A'} \sin \beta = (Y - b) \cos \rho - (X - a) \sin \rho = (Y \cos \rho - X \sin \rho) - (b \cos \rho - a \sin \rho) = y \end{cases}$$

Spostando i termini nella 1):

$$2^*) \begin{cases} \overline{OA'} \cos \gamma = \overline{O'A'} \cos(\beta + \rho) + \overline{OO'} \cos \alpha = (x \cos \rho - y \sin \rho) + a = x + a = X \\ \overline{OA'} \sin \gamma = \overline{O'A'} \sin(\beta + \rho) + \overline{OO'} \sin \alpha = (y \cos \rho + x \sin \rho) + b = y + b = Y \end{cases} \quad 2)$$

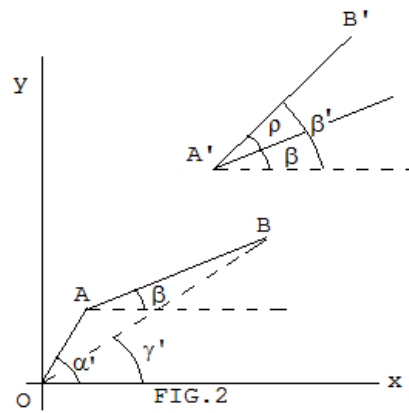
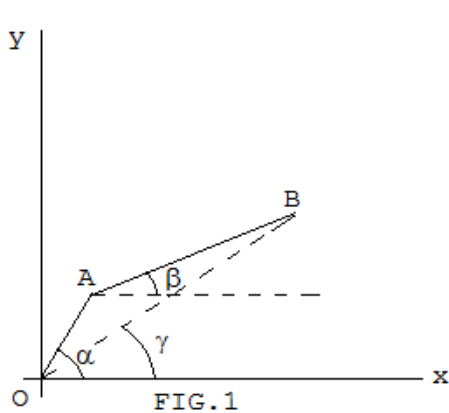
da cui l'Uguaglianza:

$$\overline{OA} = \overline{O'A} \cos[\gamma - (\beta + \rho)] + \overline{O'O} \cos(\alpha - \gamma) \quad **)$$

Se  $\rho=0$  la 1) e la 2) diventano una traslazione.

Se  $\overline{O'O}=0$  la 1) e la 2) diventano una rotazione.

Traslazione e Rotazione nello stesso riferimento indichiamo la loro generica posizione:



Traslazione:  $AB=A'B'$   $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$   $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$   $\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB}$  come FIG.1 con angoli  $\alpha, \gamma$  e  $\beta$

$$\begin{cases} AB \cos \beta = OB \cos \gamma - OA \cos \alpha \\ AB \sin \beta = OB \sin \gamma - OA \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} OB \cos \gamma = OA \cos \alpha + AB \cos \beta \\ OB \sin \gamma = OA \sin \alpha + AB \sin \beta \end{cases} \quad \begin{cases} OA \cos \alpha = OB \cos \gamma - AB \cos \beta \\ OA \sin \alpha = OB \sin \gamma - AB \sin \beta \end{cases}$$

Roto-Traslazione:  $AB=A'B'$   $\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'}$   $\overline{OB'} = \overline{OA'} + \overline{A'B'}$   $\overline{OA'} = \overline{OB'} - \overline{A'B'}$  come FIG.2 con angoli  $\alpha', \gamma'$  e  $\beta' = \beta + \rho$

$$\begin{cases} A'B' \cos \beta' = OB' \cos \gamma' - OA' \cos \alpha' \\ A'B' \sin \beta' = OB' \sin \gamma' - OA' \sin \alpha' \end{cases}$$

$$\begin{cases} OB' \cos \gamma' = OA' \cos \alpha' + A'B' \cos \beta' \\ OB' \sin \gamma' = OA' \sin \alpha' + A'B' \sin \beta' \end{cases} \quad \begin{cases} OA' \cos \alpha' = OB' \cos \gamma' - A'B' \cos \beta' \\ OA' \sin \alpha' = OB' \sin \gamma' - A'B' \sin \beta' \end{cases}$$

Per  $\rho=0$  sar\`a  $\beta' = \beta$  solo traslazione

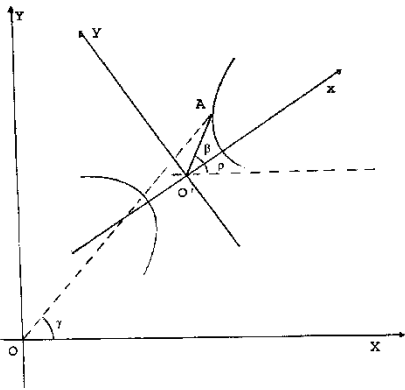
Per  $A=A'$  sar\`a  $\alpha' = \alpha$  solo rotazione

ROTO-TRASLAZIONE DELLE FIGURE

Proseguendo nel ragionamento precedentemente fatto, possiamo pensare O' come centro di una qualsivoglia figura, come ad esempio:

- O'A = r Circonferenza
- O'A =  $\sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha}$  Ellisse con centro O'
- O'A =  $\frac{p}{1 - \cos \beta} ; \frac{p}{1 - \sin \beta}$  Parabola con Fuoco  $\equiv$  O'
- O'A =  $\sqrt{\frac{q^2 + m^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$  Iperbole

Infatti se volessimo scrivere una IPERBOLE



$$\begin{cases} O'A \cos \beta = x = \frac{q}{\cos \alpha} \\ O'A \sin \beta = y = m \tan \alpha \end{cases}$$

Supposto O' (a; b;  $\alpha_0$ ) rispetto ad O di YOX; e angoli  $\rho = xO'X$ ,  $\gamma = AO'X$ , applicherò la 2\*) vista:

$$\begin{cases} OA \cos \gamma = X = \overline{O'A} \cos(\beta + \rho) + a \\ OA \sin \gamma = Y = \overline{O'A} \sin(\beta + \rho) + b \end{cases} \text{ e l'Eq. di Vag:}$$

$$\begin{cases} OA \cos \gamma = \left[ \frac{q}{\cos \alpha} \cos \rho - m \tan \alpha \sin \rho + a \right] \\ OA \sin \gamma = \left[ m \tan \alpha \cos \rho + \frac{q}{\cos \alpha} \sin \rho + b \right] \end{cases}$$

da cui l'Uguaglianza:

$$OA = \frac{q}{\cos \alpha} \cos(\gamma - \rho) + m \tan \alpha \sin(\gamma - \rho) + OO' \cos(\gamma - \alpha_0)$$

Se nell'ultima espressione vista consideriamo  $OO' = 0$  la roto-traslazione diventa una semplice rotazione degli assi. Fatto si e' che  $O' \equiv O$  e  $O'A \equiv OA$ , per cui l'ultima espressione diventa l'Eq. di Vag:

$$O'A = OA = \frac{q}{\cos \alpha} \cos(\gamma - \rho) + m \tan \alpha \sin(\gamma - \rho)$$

$$\begin{cases} OA \cos \beta = OA \cos(\gamma - \rho) = \frac{q}{\cos \alpha} = x \\ OA \sin \beta = OA \sin(\gamma - \rho) = m \tan \alpha = y \end{cases}$$

$$OA = \frac{q}{\cos \alpha} \cos \beta + m \tan \alpha \sin \beta$$

Essendo gli angoli  $\beta = (\gamma - \rho)$ , si avrà:

$$OA = \frac{q}{\cos \alpha} \cos(\gamma - \rho) + m \tan \alpha \sin(\gamma - \rho) = \left( \frac{q}{\cos \alpha} \cos \rho - m \tan \alpha \sin \rho \right) \cos \gamma + \left( \frac{q}{\cos \alpha} \sin \rho + m \tan \alpha \cos \rho \right) \sin \gamma$$

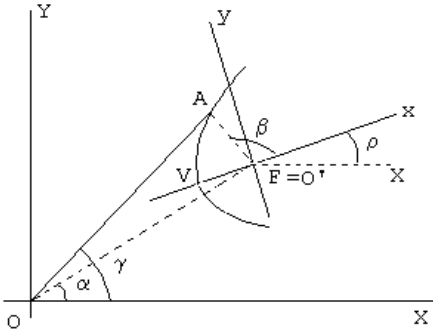
ed infine l' Eq. di Vag dell'Iperbole vista, ruotata di un angolo  $\rho$ :

$$\begin{cases} OA \cos \gamma = \left[ \frac{q}{\cos \alpha} \cos \rho - m \tan \alpha \sin \rho \right] = X \\ OA \sin \gamma = \left[ \frac{q}{\cos \alpha} \sin \rho + m \tan \alpha \cos \rho \right] = Y \end{cases}$$

$$OA = X \cos \gamma + Y \sin \gamma = X \cos(\beta + \rho) + Y \sin(\beta + \rho)$$

“LA GEOMETRIA CON L'EQ. PARAMETRICA DI VAG”

Se avessimo voluto scrivere una PARABOLA, in analogia alla Iperbole:



$$\begin{cases} O'A \cos \beta = x = \frac{P}{1 - \cos \beta} \cos \beta \\ O'Asen\beta = y = \frac{P}{1 - \cos \beta} \sin \beta \end{cases}$$

Supposto  $O' = F(a; b; \alpha)$  e  $V(p/2; 0)$  applicando la 2\*) analogamente all'esempio visto:

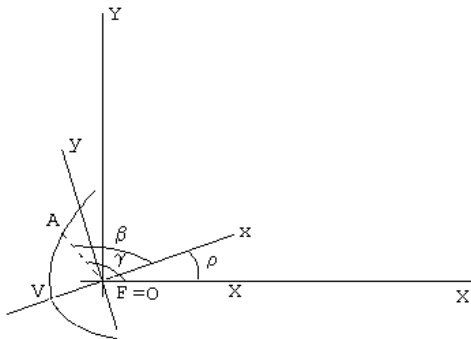
$$\begin{cases} OA \cos \gamma = X = \overline{O'A} \cos(\beta + \rho) + a \\ OA \sin \gamma = Y = \overline{O'Asen}(\beta + \rho) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA \cos \gamma = \left[ \frac{P}{1 - \cos \beta} \cos \beta \cos \rho - \frac{P}{1 - \cos \beta} \sin \beta \sin \rho + a \right] \\ OA \sin \gamma = \left[ \frac{P}{1 - \cos \beta} \sin \beta \cos \rho + \frac{P}{1 - \cos \beta} \cos \beta \sin \rho + b \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA \cos \gamma = \frac{P}{1 - \cos \beta} \cos(\beta + \rho) + a \\ OA \sin \gamma = \frac{P}{1 - \cos \beta} \sin(\beta + \rho) + b \end{cases} \quad \text{da cui l'uguaglianza:} \quad OA = \frac{P}{1 - \cos \beta} \cos(\gamma - (\beta + \rho)) + OO' \cos(\gamma - \alpha)$$

$$\begin{cases} OV \cos \gamma' = OF \cos \alpha + FV \cos(180 + \rho) = a - \frac{P}{2} \cos \rho \\ OV \sin \gamma' = OF \sin \alpha + FV \sin(180 + \rho) = b - \frac{P}{2} \sin \rho \end{cases} \quad OV = OF \cos(\gamma' - \alpha) - \frac{P}{2} \cos(\gamma' - \rho)$$

Se consideriamo  $OO' = 0$  la roto-traslazione diventa una semplice rotazione degli assi ed avremo che  $O' \equiv O$  e  $O'A \equiv OA$ ,  $F=0$ ,  $\gamma = \beta + \rho$  e l'Eq. di Vag:



$$\begin{cases} FA \cos \gamma = OA \cos(\beta + \rho) \\ FA \sin \gamma = OA \sin(\beta + \rho) \end{cases} \quad FA = OA$$

dove ricordiamo essere:  $OA = \frac{P}{1 - \cos \beta} = (p + x)$

OSSERVAZIONE: negli esempi visti, si tenga presente il variare delle relative tangenti:

Rotazione:

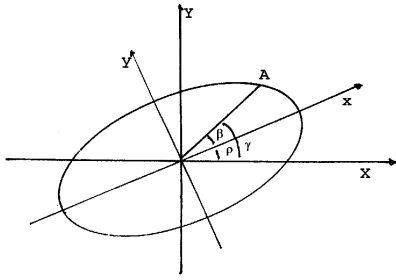
$$1) \text{ Iperbole} \quad \tan \beta = \tan(\gamma - \rho) = \frac{m}{q} \operatorname{sen} \alpha ; \quad \tan \gamma = \frac{\frac{m}{q} \operatorname{sen} \alpha + \tan \rho}{1 - \frac{m}{q} \tan \alpha \tan \rho} = \frac{q \tan \rho + m \operatorname{sen} \alpha}{q - m \tan \alpha \tan \rho}$$

$$2) \text{ Ellisse} \quad \tan \beta = \tan(\gamma - \rho) = \frac{m}{q} \tan \alpha ; \quad \tan \gamma = \frac{\frac{m}{q} \tan \alpha + \tan \rho}{1 - \frac{m}{q} \tan \alpha \tan \rho} = \frac{q \tan \rho + m \tan \alpha}{q - m \tan \alpha \tan \rho}$$

Roto-Traslazione:

$$1) \text{ Iperbole} \quad \tan \gamma = \frac{m \operatorname{sen} \alpha \cos \rho + q \operatorname{sen} \rho + b \cos \alpha}{q \cos \rho - m \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \rho + a \cos \alpha}$$

$$1) \text{ Parabola} \quad \tan \gamma = \frac{p \sin(\beta + \rho) + b(1 - \cos \beta)}{p \cos(\beta + \rho) + a(1 - \cos \beta)}$$



Facciamo l'esempio della sola rotazione di una ellisse; per definizione di Ellisse:

$$\text{Eq. di Vag: } \begin{cases} OA \cos \beta = q \cos \alpha \\ OA \sin \beta = m \sin \alpha \end{cases}$$

Ma:

$$\begin{cases} OA \cos \gamma = OA \cos(\beta + \rho) \\ OA \sin \gamma = OA \sin(\beta + \rho) \end{cases}$$

$$\text{Sviluppiamo: } \begin{cases} OA \cos \gamma = (q \cos \alpha) \cos \rho - (m \sin \alpha) \sin \rho \\ OA \sin \gamma = (m \sin \alpha) \cos \rho + (q \cos \alpha) \sin \rho \end{cases}$$

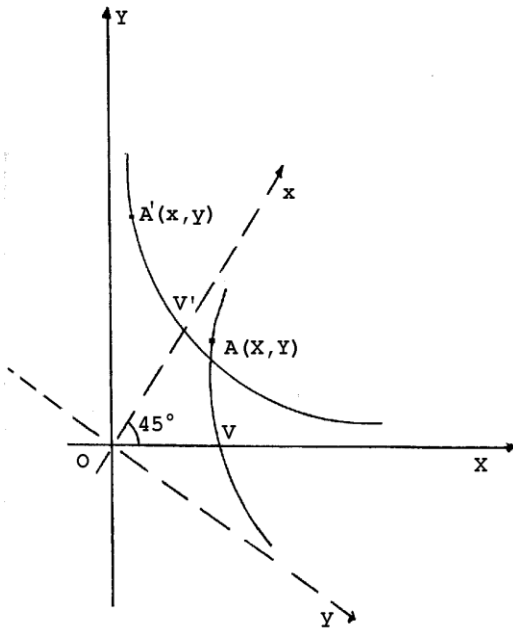
Essendo la precedente espressione una Eq. di Vag si avrà di conseguenza:

$$\overline{OA} = q \cos \alpha \cos(\gamma - \rho) + m \sin \alpha \sin(\gamma - \rho)$$

$$\begin{cases} OA \cos(\gamma - \rho) = q \cos \alpha \\ OA \sin(\gamma - \rho) = m \sin \alpha \end{cases}$$



ROTAZIONE DI UNA IPERBOLE EQUIL. (ESEMPIO)



Nel riferimento  $xOy$  tra le IP.EQ. vi e' quella avente per asintoti gli assi:

$$xy = a^2 \quad \text{dove}$$

$$a \in R^+ \quad e \quad V'(\pm a; \pm a) \quad OV' = a\sqrt{2}$$

Si consideri una normale IPER.EQ.  $m=q$  (vedi CAP.III LE CURVE Pag.7).

Posto  $q^2=2a^2$  si avr 

$$X^2 - Y^2 = q^2 = 2a^2$$

$$\text{per cui } q = a\sqrt{2}; \quad \overline{OA} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \text{sen}^2 \alpha}$$

$$X = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha}; \quad Y = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} \text{sen} \alpha; \quad OV = a\sqrt{2}$$

Si consideri una rotazione di  $45^\circ$  del riferimento  $xOy$  per cui  $A$  andr  in  $A'$  e  $OA \equiv OA'$ . Calcoliamo il punto  $A'$  rispetto ai due riferimenti

$$\begin{cases} A\hat{O}X = A\hat{O}x = \beta \\ A'\hat{O}A = 45^\circ \quad \text{sen}45 = \cos 45 = \sqrt{0,5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA \cos \beta = X \\ OA \text{sen} \beta = Y \end{cases} \quad \begin{cases} OA' \cos(\beta + 45) = x = X \cos 45 - Y \text{sen} 45 = (X - Y)\sqrt{0,5} \\ OA' \text{sen}(\beta + 45) = y = Y \cos 45 + X \text{sen} 45 = (X + Y)\sqrt{0,5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (X - Y)\sqrt{0,5} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} (1 - \text{sen} \alpha)\sqrt{0,5} = \frac{a}{\cos \alpha} (1 - \text{sen} \alpha) \\ y = (X + Y)\sqrt{0,5} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} (1 + \text{sen} \alpha)\sqrt{0,5} = \frac{a}{\cos \alpha} (1 + \text{sen} \alpha) \end{cases}$$

se facciamo:  $xy = (X^2 - Y^2)0,5 = (X^2 - Y^2)\frac{1}{2} = a^2$  riotteniamo la equazione di partenza.

ROTAZIONE DI UNA IPERBOLE EQUILATERA (continua)

Sia data una Iperb. Eq. del tipo:

$$X^2 - Y^2 = 2a^2$$

e la sua Eq. di Vag:

$$\begin{cases} X = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} \\ Y = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \quad \overline{OA} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

la sua rotazione di  $45^\circ$  e' l'Eq. di Vag vista:

$$xy = a^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} (1 - \operatorname{sen} \alpha) \\ y = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} (1 + \operatorname{sen} \alpha) \end{cases}$$

$$OA' = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha}\right)^2 [(1 - \operatorname{sen} \alpha)^2 + (1 + \operatorname{sen} \alpha)^2]} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \alpha} 2(1 + \operatorname{sen}^2 \alpha)} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Dunque OA e OA' hanno lo stesso valore. Ma non è la stessa cosa se facessimo:

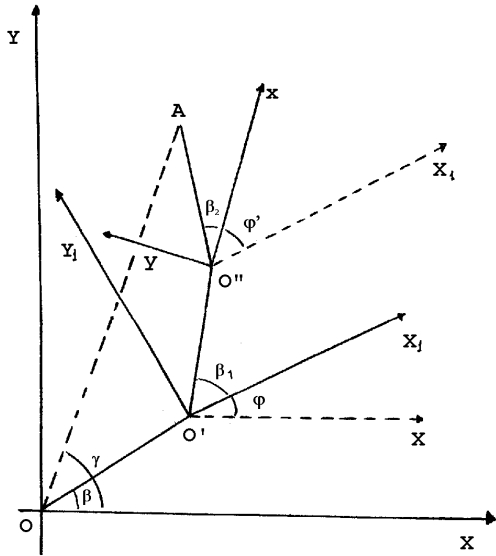
$$XY = \frac{2a^2}{\cos^2 \alpha} \operatorname{sen} \alpha; \quad xy = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha} (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = a^2$$

poichè pur rappresentando la stessa Iperb. Eq. le loro coord. si presentano diversamente, in quanto riferite a due riferimenti diversi.

LA ROTO-TRASLAZIONE DI UNA ROTO-TRASLAZIONE

Analogamente a quanto detto precedentemente, nella roto-traslazione di una roto-traslazione avremo:

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \gamma = X = \overline{O''A} \cos(\beta_2 + \varphi' + \varphi) + \overline{O'O''} \cos(\beta_1 + \varphi) + \overline{OO'} \cos \beta \\ \overline{OA} \operatorname{sen} \gamma = Y = \overline{O''A} \operatorname{sen}(\beta_2 + \varphi' + \varphi) + \overline{O'O''} \operatorname{sen}(\beta_1 + \varphi) + \overline{OO'} \operatorname{sen} \beta \end{cases}$$



, cioè l'Eq. di Vag:

$$\overline{OA} = X \cos \gamma + Y \operatorname{sen} \gamma =$$

$$= \left[ \overline{O''A} \cos(\beta_2 + \varphi' + \varphi) + \overline{O'O''} \cos(\beta_1 + \varphi) + \overline{OO'} \cos \beta \right] \cos \gamma + \left[ \overline{O''A} \operatorname{sen}(\beta_2 + \varphi' + \varphi) + \overline{O'O''} \operatorname{sen}(\beta_1 + \varphi) + \overline{OO'} \operatorname{sen} \beta \right] \operatorname{sen} \gamma$$

ma anche l'Uguaglianza:

$$\overline{OA} = \overline{O''A} \cos[\gamma - (\beta_2 + \varphi' + \varphi)] + \overline{O'O''} \cos[\gamma - (\beta_1 + \varphi)] + \overline{OO'} \cos(\gamma - \beta)$$

(uguaglianza che non e' che il Teorema delle Proiezioni.)

Posto  $(\beta_2 + \varphi' + \varphi) = \rho'$   $(\beta_1 + \varphi) = \rho$  si potrà scrivere:

$$\overline{OA} = \overline{O''A} \cos(\gamma - \rho') + \overline{O'O''} \cos(\gamma - \rho) + \overline{OO'} \cos(\gamma - \beta)$$

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

(somma di due segmenti orientati)

Se nell' ultima eq. vista poniamo  $O'O''=zero$  avremo che  $O''A$  diventa  $O'A$ , da cui l'equazione:

$$OA = X \cos \gamma + Y \operatorname{sen} \gamma = [\overline{O'A} \cos \rho + \overline{O'O} \cos \beta] \cos \gamma + [\overline{O'A} \operatorname{sen} \rho + \overline{O'O} \operatorname{sen} \beta] \operatorname{sen} \gamma = \\ = \overline{O'A} \cos(\gamma - \rho) + \overline{O'O} \cos(\gamma - \beta)$$

Quest'ultima espressione non e' che la rappresentazione della regola del parallelogramma dove  $OA$  e' dato

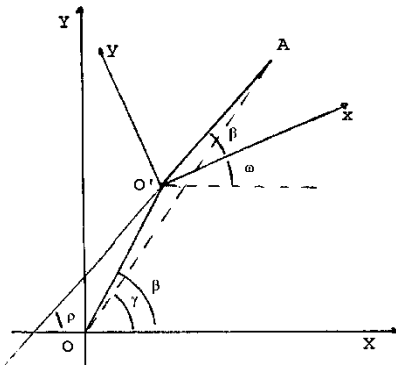


Fig.1

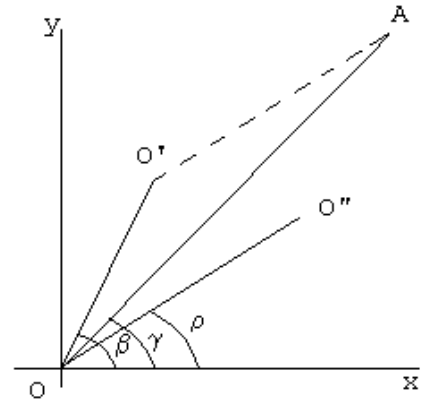


Fig.2

dalla somma dei due segmenti  $OO'$  e  $O'A$  orientati, come in Fig.1.

Se in un riferimento  $yox$  (Fig.2) poniamo  $O'A=OO''$  con i relativi angoli visti sopra possiamo ancora scrivere l'Uguaglianza:

$$OA = OO' \cos(\gamma - \rho) + OO' \cos(\gamma - \beta)$$

Da cui l'Eq. di Vag:

$$OA = x \cos \gamma + y \operatorname{sen} \gamma = [OO' \cos \rho + OO' \cos \beta] \cos \gamma + [OO' \operatorname{sen} \rho + OO' \operatorname{sen} \beta] \operatorname{sen} \gamma$$

che ha lo stesso significato di quanto visto sopra ed applicabile ad un numero qualunque di segmenti orientati.

Importante è che nella somma di due o più segmenti orientati, il loro risultato è IDENTICO sia che i segmenti siano uno attaccato all'altro (Fig.1), sia che partano da uno stesso punto (Fig.2).

(Uno o tutti gli angoli  $\beta, \gamma, \rho$  possono avere anche verso opposto: ad esempio

l'angolo  $\gamma$  dà  $\vec{OA}$ , mentre dando allo stesso angolo il valore  $(180+\gamma)$  avremo  $\vec{AO}$ .

Se ad esempio ricaviamo  $\gamma$  da  $\beta$  e  $\rho$  dobbiamo dargli il giusto valore considerando i

segni del numeratore e denominatore del rapporto  $\tan \gamma = \frac{\pm Y}{\pm X}$ )

Abbiamo visto che applicando la regola del parallelogramma (vedi figura a lato) risulta l'uguaglianza:

$\overline{OA} = \overline{OC} \cos(\gamma - \beta) + \overline{OB} \cos(\gamma - \rho)$   
e dalla considerazione che:

$$C(x_c; y_c; \beta) \quad B(x_b; y_b; \rho)$$

$$\begin{cases} \overline{OC} \cos \beta = x_c \\ \overline{OC} \sin \beta = y_c \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OB} \cos \rho = x_b \\ \overline{OB} \sin \rho = y_b \end{cases}$$

abbiamo

$$(x_c - x_b) \cos \delta + (y_c - y_b) \sin \delta = |\overline{CB}|$$

cioè una Eq. di Vag quando si prenda

l'angolo  $BCX = \delta$

$$\begin{aligned} (x_c \cos \delta + y_c \sin \delta) - (x_b \cos \delta + y_b \sin \delta) &= \\ &= OC(\cos \beta \cos \delta + \sin \beta \sin \delta) - OB(\cos \rho \cos \delta + \sin \rho \sin \delta) = \\ &= \overline{OC} \cos(\delta - \beta) - \overline{OB} \cos(\delta - \rho) = \overline{CB} \end{aligned}$$

In generale:

$$Ug. \begin{cases} OA = OC \cos(\gamma - \beta) + OB \cos(\gamma - \rho) \text{ (somma di due segmenti orient.)} \\ CB = OC \cos(\delta - \beta) - OB \cos(\delta - \rho) \text{ (distanza di due seg. orient.)} \end{cases}$$

$$Eq. \text{ di Vag } \begin{cases} OA = (OC \cos \beta + OB \cos \rho) \cos \gamma + (OC \sin \beta + OB \sin \rho) \sin \gamma \text{ (somma) } * \\ CB = (OC \cos \beta - OB \cos \rho) \cos \delta + (OC \sin \beta - OB \sin \rho) \sin \delta \text{ (distanza) } * \end{cases}$$

$$**) \text{ somma } \begin{cases} OA \cos \gamma = OC \cos \beta + OB \cos \rho \\ OA \sin \gamma = OC \sin \beta + OB \sin \rho \end{cases}; \quad \begin{cases} **) \text{ distanza} \\ \text{come differenza} \end{cases} \begin{cases} CB \cos \delta = OC \cos \beta - OB \cos \rho \\ CB \sin \delta = OC \sin \beta - OB \sin \rho \end{cases}$$

Nella **distanza come differenza** il valore di CB (come modulo) è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati di \*\*); mentre la differenza dei segmenti

orientati è data da  $(OC - OB)$  per  $\vec{CB}$  e  $(OB - OC)$  per  $\vec{BC}$ ; ed il valore di  $\delta$  si ha

analizzando i segni del numeratore e denominatore del rapporto  $\tan \delta = \frac{\pm Y}{\pm X}$ :

$$\begin{array}{ll} \frac{+Y}{+X} & \text{I}^\circ \text{Quadrante } \delta = \delta; \\ \frac{-Y}{-X} & \text{II}^\circ \text{Q. } \delta \text{ vale } (180 - \delta); \\ \frac{-Y}{-X} & \text{III}^\circ \text{Q. } \delta \text{ vale } (180 + \delta); \\ \frac{+Y}{+X} & \text{IV}^\circ \text{Q. } \delta \text{ vale } (360 - \delta) \end{array}$$

$$\tan \gamma = \frac{OC \sin \beta + OB \sin \rho}{OC \cos \beta + OB \cos \rho}; \quad \tan \delta = \frac{OC \sin \beta - OB \sin \rho}{OC \cos \beta - OB \cos \rho}$$

Quadriamo e sommiamo le **\*\***)

**\*\*\*)**  $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{OC}\overline{OB} \cos(\beta - \rho)$  Somma di due segmenti

**\*\*\*)**  $\overline{CB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OC}\overline{OB} \cos(\beta - \rho)$  distanza di due punti

La seconda espressione non è che il Teorema di Carnot, mentre la prima è lo stesso teorema con segno cambiato. Posto  $(\beta - \rho) = \alpha$  (angolo dei due seg. Orientati) e sviluppate le **\*\*\*)** in forma parametrica abbiamo:

$$\overline{OA}^2 = [(\overline{OC} + \overline{OB}) \cos \alpha/2]^2 + [(\overline{OC} - \overline{OB}) \sin \alpha/2]^2$$

$$\overline{CB}^2 = [(\overline{OC} - \overline{OB}) \cos \alpha/2]^2 + [(\overline{OC} + \overline{OB}) \sin \alpha/2]^2$$

(uguale alle **\*\*\*)** ricordando che  $\cos^2 \alpha/2 = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$  e  $\sin^2 \alpha/2 = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ )

Espressioni che ci riportano alle Eq. Parametrica di Vag di due ellissi con angoli rispettivamente  $\beta_{ellisse}$  e  $\beta'_{ellisse}$ :

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \beta_{ellisse} = (\overline{OC} + \overline{OB}) \cos \alpha/2 \\ \overline{OA} \sin \beta_{ellisse} = (\overline{OC} - \overline{OB}) \sin \alpha/2 \end{cases}$$

$$\overline{OA} = [(\overline{OC} + \overline{OB}) \cos \alpha/2] \cos \beta_{ellisse} + [(\overline{OC} - \overline{OB}) \sin \alpha/2] \sin \beta_{ellisse}$$

$$\begin{cases} \overline{CB} \cos \beta'_{ellisse} = (\overline{OC} - \overline{OB}) \cos \alpha/2 \\ \overline{CB} \sin \beta'_{ellisse} = (\overline{OC} + \overline{OB}) \sin \alpha/2 \end{cases}$$

$$\overline{CB} = [(\overline{OC} - \overline{OB}) \cos \alpha/2] \cos \beta'_{ellisse} + [(\overline{OC} + \overline{OB}) \sin \alpha/2] \sin \beta'_{ellisse}$$

$$\tan \beta_{ellisse} = \frac{OC - OB}{OC + OB} \tan \alpha/2 \qquad \tan \beta'_{ellisse} = \frac{OC + OB}{OC - OB} \tan \alpha/2$$

$$\frac{\tan \beta_{ellisse}}{\tan \beta'_{ellisse}} = \frac{(OC - OB)^2}{(OC + OB)^2} \qquad \tan \beta_{ellisse} \tan \beta'_{ellisse} = \tan^2 \alpha/2$$

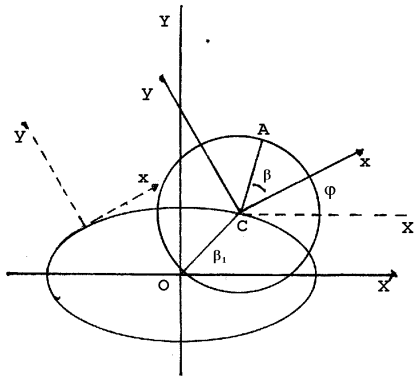


Fig. 1

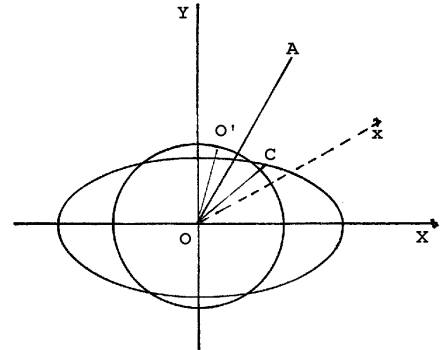


Fig. 2

Si consideri dunque una roto-traslazione di un sistema XOY in quello xOy, come in fig.1 dove il punto C ruota secondo una Ellisse; esso per quanto detto precedentemente nella "Somma di due segmenti orientati" può essere anche rappresentato da fig.2 ove si ponga  $CA=OO'$  e  $\beta+\varphi=\gamma$ ,  $\beta_2=A\hat{O}X$

Si può scrivere per entrambi i casi di fig.1 e fig.2 l'uguaglianza somma di due segmenti:

$$OA = OC \cos(\beta_2 - \beta_1) + CA \cos(\beta_2 - \gamma) = OC \cos(\beta_2 - \beta_1) + OO' \cos(\beta_2 - \gamma)$$

Nelle figure abbiamo disegnato il segmento OC come la distanza di un punto di ellisse cioè

$$OC = \left| \sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha} \right|$$

preso in valore assoluto, essendo la distanza di una Eq. di Vag; mentre  $CA = OO' = R$

L'angolo  $\varphi$  e' una costante perchè la posizione dell' asse x, pur spostandosi, e' parallela a se stessa. dunque:

$$\begin{cases} OA \cos \beta_2 = X = \sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \cos \beta_1 + R \cos(\varphi + \beta) \\ OA \operatorname{sen} \beta_2 = Y = \sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \operatorname{sen} \beta_1 + R \operatorname{sen}(\varphi + \beta) \end{cases}$$

Se tra gli angoli  $\beta_1$  e  $\beta$  esiste una relazione del tipo:  $\beta_1 \pm \beta = \mu$  oppure  $\frac{\beta}{\beta_1} = c$  oppure  $\beta_1 \beta = D$  ecc. dove c e D e l'angolo  $\mu$  sono costanti avrò

$$\beta = \mu \pm \beta_1; \beta = c\beta_1; \beta = \frac{D}{\beta_1}; \text{ per cui } (\varphi + \beta) = \begin{cases} \varphi + \mu \pm \beta_1 \\ \varphi + c\beta_1 \\ \varphi + \frac{D}{\beta_1} \end{cases}$$

e potrò ridurre la mia equazione alla sola  $\beta$  o alla sola  $\beta_1$ :

$$OA = \left[ OC \cos \beta_1 + R \cos \begin{pmatrix} \varphi + \mu \pm \beta_1 \\ \varphi + c\beta_1 \\ \varphi + \frac{D}{\beta_1} \end{pmatrix} \right] \cos \beta_2 + \left[ OC \operatorname{sen} \beta_1 + R \operatorname{sen} \begin{pmatrix} \varphi + \mu \pm \beta_1 \\ \varphi + c\beta_1 \\ \varphi + \frac{D}{\beta_1} \end{pmatrix} \right] \operatorname{sen} \beta_2$$

oppure all'eguaglianza:

$$OA = OC \cos(\beta_2 - \beta_1) - R \cos \begin{cases} [\beta_2 - (\varphi + \mu \pm \beta_1)] \\ [\beta_2 - (\varphi + c\beta_1)] \\ [\beta_2 - (\varphi + \frac{D}{\beta_1})] \end{cases}$$



ESEMPIO 1° (come circonferenza traslata)

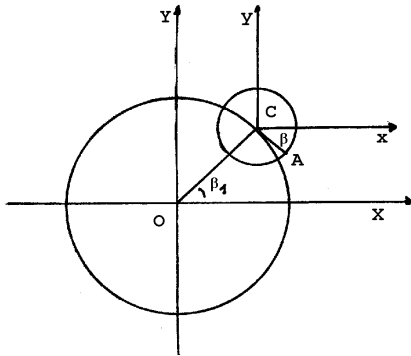


Fig.1

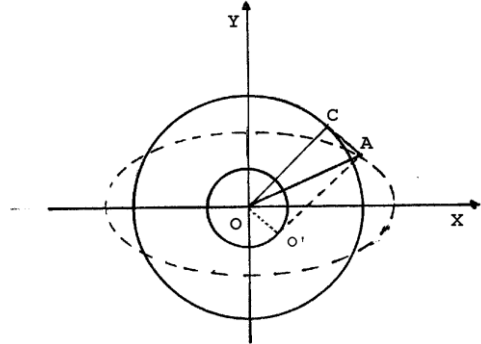


Fig.2

Le due figure hanno lo stesso significato, scriviamone l'Uguag. generale sapendo che i rispettivi raggi sono  $OC=R$ ,  $CA=r$ , ( $OA$  somma di segmenti,  $CO'$  distanza di due punti) e angolo  $AOX=\beta_2$  (Fig.2):

$$OA = R \cos(\beta_2 - \beta_1) + r \cos(\beta_2 - \beta) \quad \begin{cases} OA \cos \beta_2 = R \cos \beta_1 + r \cos \beta \\ OA \sin \beta_2 = R \sin \beta_1 + r \sin \beta \end{cases}$$

se  $\frac{\beta}{\beta_1} = -1$ ; dato da  $\beta = 360 - \beta_1$  (le fig. si riferiscono a questa ipotesi)

$$\begin{cases} OA \cos \beta_2 = R \cos \beta_1 + r \cos \beta \\ OA \sin \beta_2 = R \sin \beta_1 - r \sin \beta \end{cases} \quad \begin{cases} OA \cos \beta_2 = (R+r) \cos \beta_1 \\ OA \sin \beta_2 = (R-r) \sin \beta_1 \end{cases}$$

$$\overline{OA}^2 = (R+r)^2 \cos^2 \beta_1 + (R-r)^2 \sin^2 \beta_1 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos 2\beta_1$$

Poichè  $R$  ed  $r$  sono costanti poniamo  $(R+r)=q$ ,  $(R-r)=m$  per cui  $\overline{OA}^2 = q^2 \cos^2 \beta_1 + m^2 \sin^2 \beta_1$  che rappresenta effettivamente una ellisse perchè:

$$\tan \beta_2 = \frac{(R-r) \sin \beta_1}{(R+r) \cos \beta_1} = \frac{m}{q} \tan \beta_1$$

Abbiamo visto come il punto A, dato dai segmenti orientati OC e CA (oppure OO' e OC) descriva effettivamente una ellisse.

Si osservi che i valori q ed m, diventati gli assi dell'ellisse, possono sempre essere intesi come somma ( $q=R+r$ ) e differenza ( $m=R-r$ ) di due circonferenze, le quali ovviamente ricaveranno il loro valore da

$$\begin{cases} \frac{q+m}{2} = R \\ \frac{q-m}{2} = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = R+r \\ m = R-r \end{cases}$$

Sapendo che la *distanza del fuoco* dall'origine e':

$$c = \sqrt{q^2 - m^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{4Rr} \quad c^2 = \sqrt{Dd}$$

dove D e d sono i diametri delle circonferenze.

Mentre l'*eccentricità*:  $e = \frac{c}{q} = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r}$

ESEMPIO 2° (Ellisse dei due Moti)

(Distanza degli estremi dei raggi in una Circonferenza Traslata)

Prendendo in considerazione anziche' la somma dei due segmenti orientati, la distanza di tali due segmenti (gli estremi dei raggi delle due circonferenze) cioe' la distanza  $CO'$  (fig. 2 Cap. VI Pag. 16), per quanto detto a Cap. VI Pag. 12 (DISTANZA DI DUE PUNTI) essa e' data (vedi figura sotto):

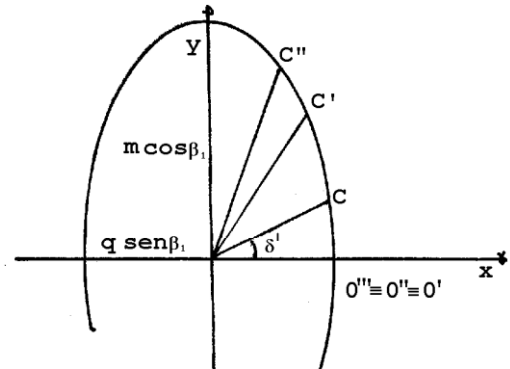
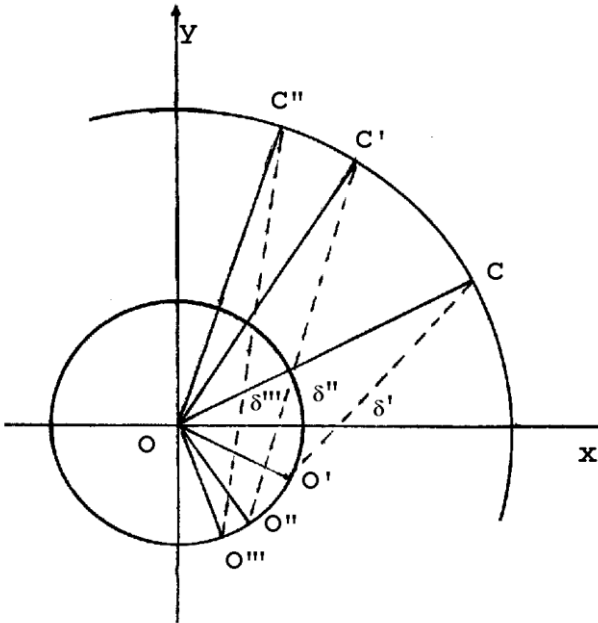
$$\overline{CO'} = R \cos(\delta' - \beta_1) - r \cos(\delta' - \beta) \text{ e posto } \beta = -\beta_1 \text{ avremo}$$

$$\begin{cases} \overline{CO'} \cos \delta' = R \cos \beta_1 - r \cos \beta_1 = (R - r) \cos \beta_1 = m \cos \beta_1 \\ \overline{CO'} \sin \delta' = R \sin \beta_1 + r \sin \beta_1 = (R + r) \sin \beta_1 = q \sin \beta_1 \end{cases}$$

$$\overline{CO'}^2 = (R - r)^2 \cos^2 \beta_1 + (R + r)^2 \sin^2 \beta_1 = m^2 \cos^2 \beta_1 + q^2 \sin^2 \beta_1$$

$$\tan \delta' = \frac{q}{m} \tan \beta_1$$

dove si vede che la distanza  $CO'$  dei due raggi e' la distanza di una ellisse di centro  $O'$  e angolo  $\delta'$ , e assi  $q = (R + r)$ ,  $m = (R - r)$ . Pertanto tutte le distanze:  $CO'$ ;  $C'O''$ ;  $C''O'''$ ; ecc. date da  $\beta_1 = COX$  e  $\beta = O'OX$  sono le distanze dei punti di una ELLISSE il cui centro e' di volta in volta  $O'$ ;  $O''$ ;  $O'''$ ; . ed angoli  $\delta'$ ;  $\delta''$ ;  $\delta'''$ ; ecc.



ESEMPIO 3° (COME CIRCONFER. ROTO-TRASLATA)

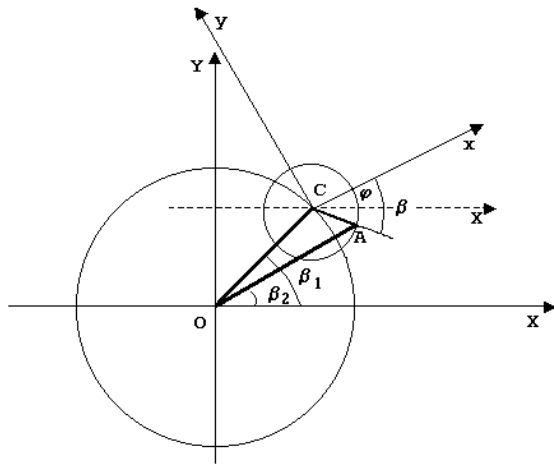


Fig. a

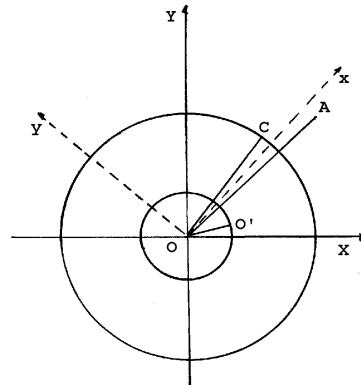


Fig. b

Il sistema xCy (con raggio r) e' ruotato di un angolo phi (con verso antiorario), i raggi sono R ed r, con (Fig.a)  $\beta = -\beta_1$ ,  $AOX = \beta_2$ ; e con (Fig.b)  $OO' = CA = r$ ,  $OC = R$ .

L'Uguaglianza, in generale, che lega i segmenti orientati è:

$$1^*) \quad OA = R \cos(\beta_2 - \beta_1) + r \cos[\beta_2 - (\beta - \varphi)] \quad \begin{cases} OA \cos \beta_2 = R \cos \beta_1 + r \cos(\beta - \varphi) \\ OA \sin \beta_2 = R \sin \beta_1 + r \sin(\beta - \varphi) \end{cases}$$

$$\overline{OA}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos[\beta_1 - (\beta - \varphi)] = R^2 + r^2 + 2Rr \cos(\varphi + 2\beta_1)$$

$$\overline{OA}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos(\varphi + 2\beta_1) = R^2 + r^2 + 2Rr \cos 2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2})$$

dove sviluppando il coseno e moltiplicando R ed r per

$$\left[ \cos^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) + \sin^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) \right] \quad \text{si avrà:}$$

$$\begin{aligned} \overline{OA}^2 &= R^2 + r^2 + 2Rr \cos^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) - 2Rr \sin^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) = \\ &= \left[ R^2 \cos^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) + r^2 \cos^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) + 2Rr \cos^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) \right] + \\ &\quad + \left[ R^2 \sin^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) + r^2 \sin^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) - 2Rr \sin^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) \right] \end{aligned}$$

$$\overline{OA}^2 = (R+r)^2 \cos^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) + (R-r)^2 \sin^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2})$$

Essendo l'ultima espressione vista il quadrato di uno spazio del tipo

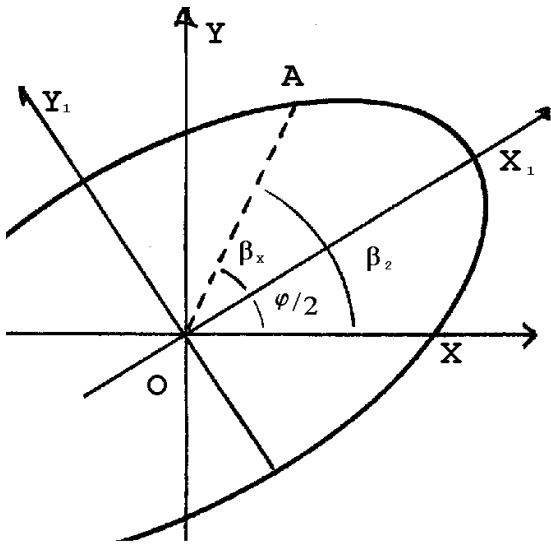
$OA^2 = x^2 + y^2$  potremo prendere un opportuno angolo  $\beta_x$  tale che

$$2^*] \quad \overline{OA} = \left[ (R+r) \cos\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \cos \beta_x + \left[ (R-r) \sin\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \sin \beta_x$$

e facendo  $(R+r) = q$ ,  $(R-r) = m$ , e posto  $\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right) = \alpha$ :

$$\begin{cases} X_1 = (R+r) \cos\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right) = q \cos \alpha \\ Y_1 = (R-r) \sin\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right) = m \sin \alpha \end{cases} \quad \frac{Y_1}{X_1} = \tan \beta_x = \tan\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{m}{q} \tan \alpha$$

OA viene a rappresentare la distanza di un punto di Ellisse dal suo centro, al variare di  $\beta_1$  da  $0 \leq \beta_1 \leq 360$ . Ciò implica che il campo di variabilità di  $\left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right)$  (per  $\varphi$  costante) sia egualmente  $0 \leq \left(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}\right) \leq 360$ .



Se in un sistema  $X_1OY_1$  (fig. a lato) applichiamo la 2\*] abbiamo una ellisse e se poniamo il valore di  $\beta_x = \beta_2 - \frac{\varphi}{2}$  il variare di  $\beta_1$  nell'Eq. di partenza in 2\*] farà variare  $\beta_x$  e quindi  $\beta_2$  dando tutti i punti  $(X_1, Y_1)$  della ellisse con Eq. di Vag che nel sistema  $XOY$  della pagina precedente 1\*], abbiamo visto essere:

$$OA = R \cos(\beta_2 - \beta_1) + r \cos[\beta_2 - (\beta - \varphi)]$$

dove  $\beta_2$  è proprio l'angolo (Fig.a) di OA rispetto all'asse X.

Nel sistema  $X_1OY_1$  possiamo scrivere

l'equazione di una Ellissi con l'Eq. di Vag:

$$\overline{OA} = X_1 \cos \beta_x + Y_1 \sin \beta_x = X_1 \cos\left(\beta_2 - \frac{\varphi}{2}\right) + Y_1 \sin\left(\beta_2 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Questa ellisse, rispetto agli assi coord. X, Y e' ruotata di  $\frac{\varphi}{2}$ , mentre

la rotazione da cui eravamo partiti era di  $\varphi$ , per la sola circonferenza di raggio r, come se, essendo due le circonferenze,

ciascuna fosse stata ruotata di  $\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$ , e tutto il sistema fosse

ruotato di  $\frac{\varphi}{2}$ .

ESEMPIO 4°

(Distanza degli estremi dei raggi in una circonferenza roto-traslata)

In questo caso l' eq. rappresentativa e' la stessa di quella dell'ESEMPIO 3° (Cap. VI Pag. 19) cambiata di segno e dalla Fig.a e Fig.b dell'esempio stesso si ha:

$$\overline{CO'}^2 = R \cos(\beta_2 - \beta_1) - r \cos[\beta_2 - (\beta - \varphi)]$$

Facendo gli stessi passaggi dell'ESEMPIO 3° si ha:

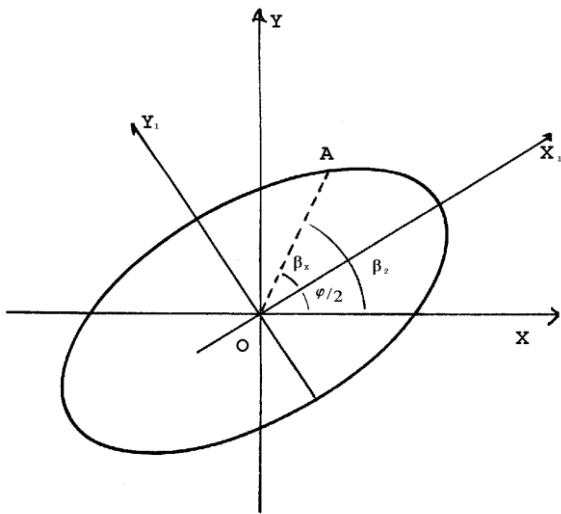
$$\overline{CO'}^2 = (R-r)^2 \cos^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) + (R+r)^2 \sin^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2})$$

che e' un quadrato del tipo  $\overline{CO'}^2 = X_1^2 + Y_1^2$  per cui stabilito un angolo

$\delta_x = \delta - \frac{\varphi}{2}$  si ha, in analogia a quanto visto:

$$\begin{cases} \overline{CO'} \cos \delta_x = (R-r) \cos(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) = X_1 = m \cos \alpha \\ \overline{CO'} \sin \delta_x = (R+r) \sin(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) = Y_1 = q \sin \alpha \end{cases} \quad \tan \delta_x = \frac{q}{m} \tan \alpha \quad 3^*]$$

Come vediamo dall'equazione sopra risultano scambiati soltanto la posizione degli assi q ed m.



Tenendo presente come visto al Cap. VI Pag. 18 che al variare di  $\alpha$  in  $3^*]$   $CO', C'O'', C'O'''$ , ecc. sono le distanze di una Ellisse dal proprio centro e che fatto  $O \equiv O' \equiv O'' \equiv O'''$  ecc. avro' una Ellisse proprio come da fig. a lato.

Anche qui come nell'ESEMPIO 3° avendo ruotato il riferimento XOY di  $\varphi$ , risulta invece come se la rotazione fosse solo di  $\varphi/2$  e

riguardasse tutto il sistema nel suo insieme.

ESEMPIO 5° (ROTAZIONE DI UN SISTEMA TRASLATO)

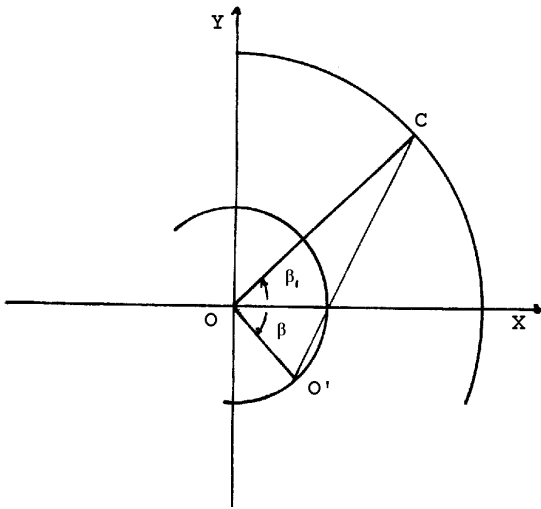


Fig.1

Nell'Esempio 2° di Cap. VI Pag.18 abbiamo considerato la distanza degli estremi dei raggi in una circonferenza traslata dove O'C e' la distanza di un punto di Ellisse dal suo centro, come nella fig. 1 con  $\beta = -\beta_1$ .

Come fatto nell'ESEMPIO 3° (Fig.a) ruotando un sistema di  $\varphi$  (ma questa volta in senso orario) l'intero sistema ruota di  $\varphi/2$ . Nel sistema  $X_1OY_1$  come da fig. 2, O'C e' sempre la distanza di un punto di Ellisse

dal suo centro, ed è dato come distanza dei due segmenti orientati R e r (DISTANZA DI DUE PUNTI Cap.VI Pag.12). La sua Eq.di Vag , con  $-\frac{\varphi}{2}$  (perché  $\varphi$  è in senso orario), è:

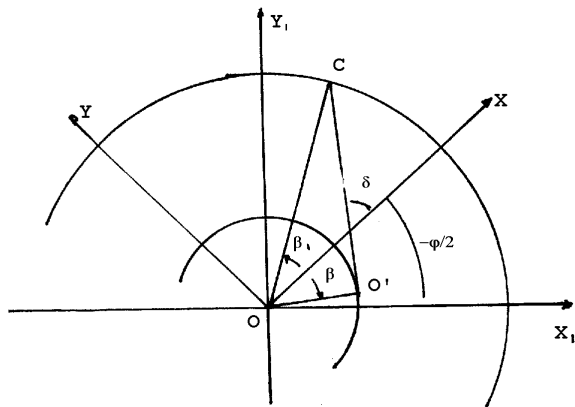


Fig.2

$$\begin{cases} \overline{O'C} \cos(\delta - \frac{\varphi}{2}) = R \cos(\beta_1 - \frac{\varphi}{2}) - r \cos(\beta - \frac{\varphi}{2}) \\ \overline{O'C} \sin(\delta - \frac{\varphi}{2}) = R \sin(\beta_1 - \frac{\varphi}{2}) + r \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) \end{cases}$$

Se a questo punto supponiamo che  $\frac{\varphi}{2}$  anzichè fisso sia variabile e che vari in valore come  $\frac{\varphi}{2} = -\beta_1 = \beta$

l'equazione diventerà:

$$\begin{cases} \overline{O'C} \cos(\delta + \beta_1) = R \cos 2\beta_1 - r \cos(\beta - \beta) = R \cos 2\beta_1 - r \\ \overline{O'C} \sin(\delta + \beta_1) = R \sin 2\beta_1 + r \sin(\beta - \beta) = R \sin 2\beta_1 \end{cases} \quad *)$$

$$\tan(\delta + \beta_1) = \frac{R \sin 2\beta_1}{R \cos 2\beta_1 - r}$$

e si presenterà come in Fig.3 ponendo:  $\delta_x = \delta + \beta_1$ ;  $\beta_0 = 2\beta_1$

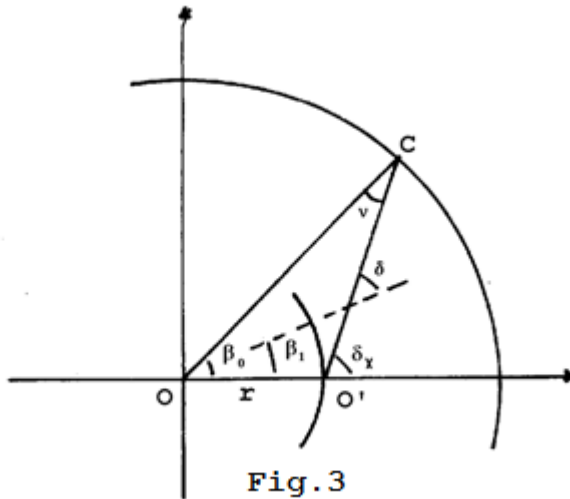


Fig.3

cioè l'equazione \*) della pagina precedente diventa:

$$\begin{cases} \overline{O'C} \cos \delta_x = R \cos \beta_0 - r \\ \overline{O'C} \sin \delta_x = R \sin \beta_0 \end{cases}$$

$$\overline{O'C} = (R \cos \beta_0 - r) \cos \delta_x + (R \sin \beta_0) \sin \delta_x \quad \text{Eq. di Vag}$$

$$\overline{O'C}^2 = (R \cos \beta_0 - r)^2 + (R \sin \beta_0)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta_0$$

Dalla Fig.3 si deduce:

$$\tan \delta_x = \frac{\sin \delta_x}{\cos \delta_x} = \frac{R \sin \beta_0}{R \cos \beta_0 - r};$$

che risolta e sviluppata, darà:  $\sin(\delta_x - \beta_0) = \frac{r}{R} \sin \delta_x$



Da ciò che abbiamo visto in Fig.3 data una circonferenza di raggio  $R$ , stabilita una distanza  $OO'=r$ , minore di  $R$ , ogni distanza  $O'C$ , può svilupparsi:

$$\begin{aligned} \overline{O'C}^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos 2\frac{\beta_0}{2} = R^2 + r^2 - 2rRr(\cos^2 \frac{\beta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2}) = \\ &= R^2(\cos^2 \frac{\beta_0}{2} + \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2}) + r^2(\cos^2 \frac{\beta_0}{2} + \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2}) - 2rRr(\cos^2 \frac{\beta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2}) = \quad ** \\ &= (R-r)^2 \cos^2 \frac{\beta_0}{2} + (R+r)^2 \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2} \end{aligned}$$

Essendo quest' ultima espressione un quadrato del tipo  $\overline{O'C}^2 = x^2 + y^2$  potrò avere un angolo  $\beta_E$  tale che:

$$b) \begin{cases} \overline{O'C} \cos \beta_E = (R-r) \cos \frac{\beta_0}{2} = m \cos \frac{\beta_0}{2} \\ \overline{O'C} \text{sen} \beta_E = (R+r) \text{sen} \frac{\beta_0}{2} = q \text{sen} \frac{\beta_0}{2} \end{cases} \quad \tan \beta_E = \frac{R+r}{R-r} \tan \frac{\beta_0}{2} = \frac{q}{m} \tan \frac{\beta_0}{2}$$

Abbiamo che b) è l'Eq. di Vag di una ELLISSE di angolo  $\beta_E$  e semi-assi  $q > m$ , contata da  $m$ .

Se prendiamo il punto  $O'$  (come da Fig.4) avremo i valori dell'ellisse:

$$\overline{O'C}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos 2\frac{\beta_0}{2} = R^2 + r^2 + 2rRr(\cos^2 \frac{\beta_0}{2} - \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2})$$

che sviluppata come abbiamo visto darà:

$$\overline{O'C}^2 = (R+r)^2 \cos^2 \frac{\beta_0}{2} + (R-r)^2 \text{sen}^2 \frac{\beta_0}{2} \quad \text{e quindi}$$

$$\begin{cases} \overline{O'C} \cos \beta_E = (R+r) \cos \frac{\beta_0}{2} = q \cos \frac{\beta_0}{2} \\ \overline{O'C} \text{sen} \beta_E = (R-r) \text{sen} \frac{\beta_0}{2} = m \text{sen} \frac{\beta_0}{2} \end{cases}$$

$$\tan \beta_E = \frac{R-r}{R+r} \tan \frac{\beta_0}{2} = \frac{m}{q} \tan \frac{\beta_0}{2}$$

di semi-assi  $q > m$ , contata da  $q$ .

Ponendo  $\frac{\beta_0}{2} = \alpha$  si avrà la stessa equazione dell' Ellisse illustrata nel Cap. III° (Le Curve "ELLISSE").

I valori che abbiamo determinato per la distanza  $O'C$  non formano una Ellisse intera, bensì meta' Ellisse, per il fatto che  $\frac{\beta_0}{2} = \alpha$  cioè

che, per un valore di  $\beta_0$  compreso tra  $0 \leq \beta_0 \leq 180$  sarà  $0 \leq \alpha \leq 90$  e quindi darà per il valore di una semi circonferenza il valore di un settore di ellisse come possiamo vedere in Fig.5, nella quale è mostrato (a computer) che per tutte le distanze  $OC$  dei punti della circonferenza si hanno le distanze  $O'C'$  dei punti della semi-ellisse.

In figura si vede anche che il

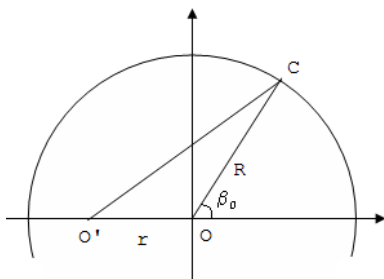


Fig.4

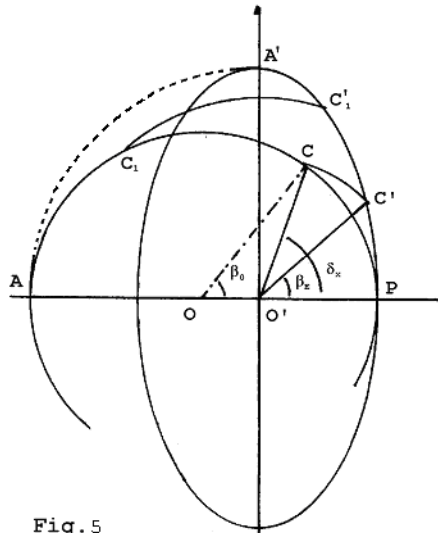


Fig. 5

punto P percorre l'arco PA della semi-circonferenza e l'arco PA' del settore dell' Ellisse nello stesso tempo; come dire che il semiperimetro della Ellisse è percorso nello stesso tempo in cui è percorso l'intero perimetro della Circonferenza; ed inoltre nel Cap.VII vedremo che la velocità di percorrenza dell'area della circonferenza è doppia della velocità di percorrenza dell' area dell'ellisse.

Nella Fig.5 data una circonferenza come nella Fig.3, fatti:

$$\overline{OC} = R; \quad \overline{OO'} = r; \quad R + r = q; \quad R - r = m$$

avremo: 
$$\tan \delta_x = \frac{R \sin \beta_0}{R \cos \beta_0 - r} \quad \text{e} \quad \overline{O'C}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \beta_0 \quad [1]$$

sviluppata secondo \*\*): 
$$\overline{O'C}^2 = (R - r)^2 \cos^2 \frac{\beta_0}{2} + (R + r)^2 \sin^2 \frac{\beta_0}{2}$$

e per quanto visto in b) della pagina precedente, abbiamo  $O'C =$  vettore di Ellisse, di angolo  $\beta_E$  e centro in  $O'$ . Abbiamo così stabilito una corrispondenza biunivoca tra

circonferenza ed ellisse legati dalle formule 
$$\begin{cases} q = R + r \\ m = R - r \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{q + m}{2} \\ r = \frac{R - r}{2} \end{array} \right.$$

dove i valori dei semi-assi  $q > m$  della ellisse vengono ad essere  $q = O'A$  e  $m = O'P$ , pari alla distanza massima e minima di un punto della circonferenza dal proprio centro.

Tale corrispondenza ci permette di dare la:

**DEFINIZIONE del "Teorema dei Pianeti":**

data una circonferenza, ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza sono vettori di ellisse, la traiettoria un Ellisse e il punto-fisso il suo centro.

(Vedere anche la dimostrazione del Teorema con l'Eq. di Vag nello Spazio al Cap.III Pag.14)

ESEMPIO 6° TEOREMA DEI PIANETI

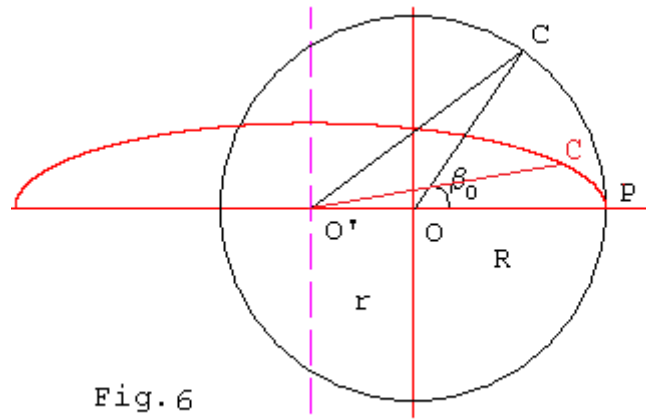


Fig. 6

La Fig. 6 è la stessa di Fig. 5 con gli stessi valori  $\overline{OC}=R$ ;  $\overline{OO'}=r$ ;  $R+r=q$ ;  $R-r=m$ , ma con  $O'$  centro dell' ellisse spostato. Possiamo quindi scrivere

$$\overline{O'C}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(180 - \beta_0) = R^2 + r^2 + 2Rr \cos \beta_0$$

che sviluppata come al solito

$$\overline{O'C}^2 = (R+r)^2 \cos^2 \frac{\beta_0}{2} + (R-r)^2 \sin^2 \frac{\beta_0}{2} = q^2 \cos^2 \frac{\beta_0}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\beta_0}{2}$$

che diventa Eq. Di Vag di una ellisse, ma questa volta con l'equazione della ellisse scritta nel modo usuale che conosciamo. Pertanto con le solite relazioni:

$$\begin{cases} q = R+r \\ m = R-r \end{cases} \begin{cases} R = \frac{q+m}{2} \\ r = \frac{R-r}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{O'C} \cos \beta_E = (R+r) \cos \frac{\beta_0}{2} = q \cos \frac{\beta_0}{2} \\ \overline{O'C} \sin \beta_E = (R-r) \sin \frac{\beta_0}{2} = m \sin \frac{\beta_0}{2} \end{cases} \quad \overline{O'C} = (q \cos \frac{\beta_0}{2}) \cos \beta_E + (m \sin \frac{\beta_0}{2}) \sin \beta_E$$

$$\tan \beta_E = \frac{R-r}{R+r} \tan \frac{\beta_0}{2} = \frac{m}{q} \tan \frac{\beta_0}{2}$$

Possiamo concludere, tenendo presente la Fig. 6:

a) data una circonferenza di raggio  $R = \frac{q+m}{2}$  e un punto  $O'$  distante

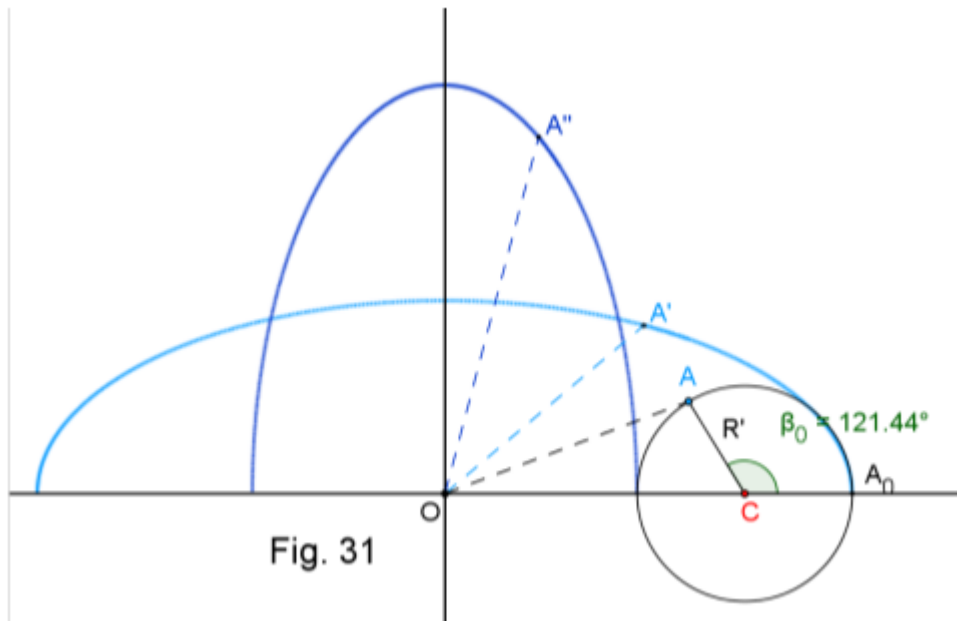
$r = \frac{q-m}{2}$  dal suo centro, la distanza di ogni punto della

circonferenza dal punto  $O'$  è la distanza di un corrispondente punto dell' ellisse dal suo centro, con angolo  $\beta_E$  dato da  $\beta_0/2$  angolo della circonferenza.

b) e che il raggio vettore  $R$  spazza l'area della circonferenza nello stesso tempo in cui il raggio vettore dell'Ellisse spazza metà della propria area.

La Fig. 6 è tracciata con valori di  $R=10$ ,  $r=8$ .

ESEMPIO 7° TEOREMA DEI PIANETI



Abbiamo anche che, data una circonferenza e un punto fuori di essa  $O$ , come in Fig.31, la distanza di tale punto da tutti i punti  $A$  della circonferenza e' la distanza di un Punto di Ellisse dal proprio centro. Posto  $CA=R'$  :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + R'^2 + 2\overline{OC}R'\cos\beta_0 = \overline{OC}^2 + R'^2 + 2\overline{OC}R'(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - \sin^2\frac{\beta_0}{2}) = (\overline{OC} + R')^2 \cos^2\frac{\beta_0}{2} + (\overline{OC} - R')^2 \sin^2\frac{\beta_0}{2}$$

Esisterà un  $\beta_x$  per cui:

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \beta_x = (\overline{OC} + R') \cos \frac{\beta_0}{2} \\ \overline{OA} \sin \beta_x = (\overline{OC} - R') \sin \frac{\beta_0}{2} \end{cases}$$

$$\overline{OA} = (\overline{OC} + R') \cos \frac{\beta_0}{2} \cos \beta_x + (\overline{OC} - R') \sin \frac{\beta_0}{2} \sin \beta_x$$

Questa ultima espressione e' una Eq. di Vag che rappresenta una Ellisse con angolo al centro  $\beta_x$  e assi  $q=(\overline{OC} + R')$  e  $m=(\overline{OC} - R')$  con la relazione:

$$\tan \beta_x = \frac{\overline{OC} - R'}{\overline{OC} + R'} \tan \frac{\beta_0}{2} = \frac{m}{q} \tan \frac{\beta_0}{2}$$

Nella Fig.31 segnata con  $A'$  ricavata al computer con le caratteristiche della ellisse di centro in  $O$ , sono le stesse di quelle viste, quando tale punto era interno alla circonferenza.

Invertendo  $q$  con  $m$  abbiamo la figura segnata con  $A''$  accanto che è la stessa di quella di sopra ma con la ellisse ruotata di  $90^\circ$ .