III. IL PIANO NELLO SPAZIO

IL PIANO

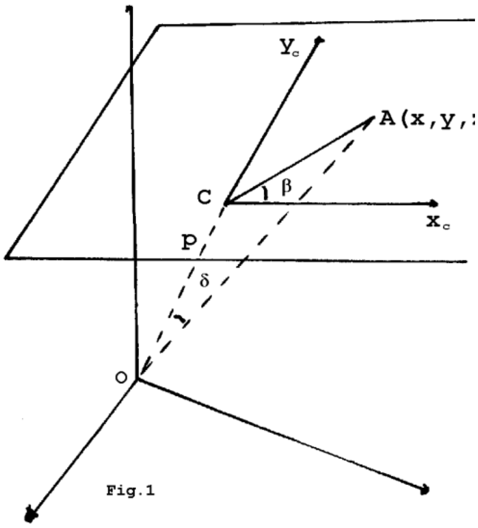


Fig.1

In un riferimento cartesiano di origine O sia il punto C(a,b,c) e coseni dir. $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ con OC=p

Tiscali Home - Adsl, Fibra, Mail, Notizie,

(distanza del piano dall'origine). Sappiamo essere una Eq. di Vag:

$$1)\overline{OC} = p = a\cos\alpha_1 + b\cos\alpha_2 + c\cos\alpha_3$$

$$p^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

affinché un qualunque punto

A$(x, y, z;\ \cos\alpha'_1, \cos\alpha'_2, \cos\alpha'_3)$

appartenga al piano per C con $O\hat{C}A = 90°$ basta che:

$$2)x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 = p \qquad \text{Ug.}$$

E' anche Eq. di Vag:

$$3)x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 = OA \qquad \begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha'_1 = x \\ \overline{OA}\cos\alpha'_2 = y \\ \overline{OA}\cos\alpha'_3 = z \end{cases}$$

ed inoltre:

$$4)\cos A\hat{O}C = \cos\delta = (\cos\alpha'_1\cos\alpha_1 + \cos\alpha'_2\cos\alpha_2 + \cos\alpha'_3\cos\alpha_3)$$

Per tanto sostituendo nella 2) il secondo membro della 3) avrò la seguente Uguaglianza:

$$5)OA(\cos\alpha'_1\cos\alpha_1 + \cos\alpha'_2\cos\alpha_2 + \cos\alpha'_3\cos\alpha_3) = p \qquad Ug$$

che sostituita dalla 4):

a) $\begin{cases} \overline{OA}\cos\delta = p \\ \overline{OA}\sin\delta = \overline{CA} \end{cases}$ b) $\tan\delta = \dfrac{\text{CA}}{\text{p}}$ $\qquad OA = p\cos\delta + \overline{CA}\,\text{sen}\,\delta$

Eq. di Vag di un punto in un piano distante p dall'origine e poiché abbiamo $0 \le \delta \le 90°$ il valore p ed il valore CA saranno sempre positivi.

In quanto $OA = p\cos\delta + \overline{CA}\,\text{sen}\,\delta$ e' una Eq. di Vag dovrà essere:

$$\begin{cases} OA\cos\delta = p \\ OA\,\text{sen}\,\delta = CA \end{cases} \qquad \cos^2\delta + \text{sen}^2\,\delta = 1 \qquad \overline{OA}^2 = \overline{CA}^2 + p^2$$

Comunque $\overline{OA} = \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2}$

$$\begin{cases} \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2}\,\cos\alpha'_1 = x \\ \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2}\,\cos\alpha'_2 = y \\ \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2}\,\cos\alpha'_3 = z \end{cases}$$

Da cui $(\overline{CA}^2 + p^2)(\cos^2\alpha'_1 + \cos^2\alpha'_2) = (\overline{CA}^2 + p^2)\sin^2\alpha'_3$

$$\begin{cases} \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2}\ \sin^2\alpha'_3 = (x^2 + y^2) \\ \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2}\ \cos^2\alpha'_3 = z^2 \end{cases}$$

Può essere allora che sia CA = cerchio, ellisse, iperbole, ecc. cioè una figura rappresentata su quel piano.

Ad esempio se $\overline{CA}^2 = \dfrac{q^2 + m^2 sen^2\beta}{\cos^2\beta}$ = Iperbole sarà:

$$x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 = \left|\sqrt{\frac{q^2 + m^2 sen^2\beta}{\cos^2\beta} + p^2}\right| = |OA|$$

Se fosse $\delta = \alpha_3$ perché $p \equiv z$ avremmo il piano parallelo al piano x0y e posto che le proiezioni su tale piano degli assi x_0, y_0 siano coincidenti con gli assi x,y avremo anche che la proiezione di CA è coincide con OA_x riavremo il caso a) di 5).

(Per tracciare la figura basterà, per ogni terna di valori $\alpha'_1;\alpha'_2;\alpha'_3$, cercare un valore di β (essendo noto p) per avere la distanza OA e quindi la figura).

****

RICORDIAMO. In un riferimento cartesiano ortogonale per passare dall'equazione di un piano per punti a quella di un piano tramite i suoi coseni direttori dobbiamo ricordare che l'equazione:

a) $x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 = p$ con $\cos\alpha_1^{\,2} + \cos\alpha_2^{\,2} + \cos\alpha_3^{\,2} = 1$

è l'eq. di un piano dove p è la distanza del piano dall'origine.
Per contro l'equazione per punti rappresentante un piano è:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

e per ritrovare la equazione a) dividiamo per un' opportuno K:

$\dfrac{A}{K}x + \dfrac{B}{K}y + \dfrac{C}{K}z + \dfrac{D}{K} = 0$ e posto $\dfrac{A}{K} = \cos\alpha_1;\quad \dfrac{B}{K} = \cos\alpha_2;\quad \dfrac{C}{K} = \cos\alpha_3;\quad \dfrac{D}{K} = -p$

ci ritorna la a) con $K = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ mentre avremo la distanza $p = \dfrac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Siano i punti $A(x,y,z)(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ $C(a,b,c)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ (come in fig. precedente) e come abbiamo visto

$$\begin{cases} OA\cos\delta = OC = p = a\cos\alpha_1 + b\cos\alpha_2 + c\cos\alpha_3 \\ OAsen\delta = CA \end{cases}$$

E supponiamo ora che CA sia un segmento di una retta con cos. dir. $(\cos\varepsilon_1,\cos\varepsilon_2,\cos\varepsilon_3)$ allora per quanto sappiamo possiamo scrivere:

$$\text{angolo } C\hat{A}O = \cos(90-\delta) = sen\delta = (\cos\varepsilon_1\cos\alpha'_1 + \cos\varepsilon_2\cos\alpha'_2 + \cos\varepsilon_3\cos\alpha'_3)$$

che moltiplicato per OA darà

$$\mathrm{OA\,sen}\,\delta = \mathrm{CA} = x\cos\varepsilon_1 + y\cos\varepsilon_2 + z\cos\varepsilon_3$$

Si noti che essendo $O\hat{C}A = 90°$ darà

$$\cos\varepsilon_1\cos\alpha_1 + \cos\varepsilon_2\cos\alpha_2 + \cos\varepsilon_3\cos\alpha_3 = \cos 90 = 0$$

che moltiplicato per OC=p:

$$a\cos\varepsilon_1 + b\cos\varepsilon_2 + c\cos\varepsilon_3 = 0$$

Pertanto:

$$\begin{cases} OA\cos\delta = p = a\cos\alpha_1 + b\cos\alpha_2 + c\cos\alpha_3 = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 \\ OA\,\mathrm{sen}\,\delta = \overline{CA} = x\cos\varepsilon_1 + y\cos\varepsilon_2 + z\cos\varepsilon_3 \end{cases}$$

Sono punti generici del piano tutti quei punti che danno le seguenti eguaglianze, in funzione della distanza del piano:

$$p = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 = x_1\cos\alpha_1 + y_1\cos\alpha_2 + z_1\cos\alpha_3 = \text{ecc.}$$
$$p^2 = xa + yb + zc = x_1a + y_1b + z_1c = \text{ecc.}$$

E in coseni direttori:

$$p = \overline{OA}(\cos\alpha'_1\cos\alpha_1 + \cos\alpha'_2\cos\alpha_2 + \cos\alpha'_3\cos\alpha_3) = ecc.$$
$$p^2 = \overline{OA}(a\cos\alpha'_1 + b\cos\alpha'_2 + c\cos\alpha'_3) = ecc.$$

Nella figura sotto sul piano π $O\hat{C}A = 90°$, mentre il punto A e' governato da un riferimento cartesiano di origine C con coord. $A(x_c, y_c)$ ed angolo β, mentre rispetto al riferimento cart. nello spazio abbiamo $A(x,y,z;\alpha'_1;\alpha'_2;\alpha'_3)\, e C(c,b,c;\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$.

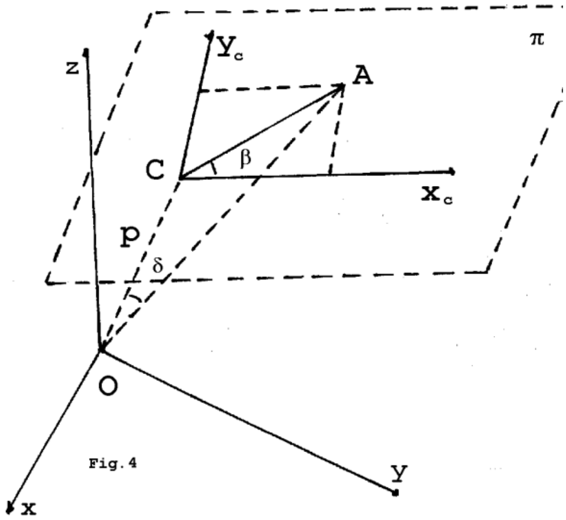


Fig. 4

Quale sarà, dunque, la relazione tra (x_c, y_c) e $(x, y, z;\, \cos\alpha'_1, \cos\alpha'_2, \cos\alpha'_3)$ del punto A, avendo l'Eq. di Vag

$$\begin{cases} OA\cos\delta = p \\ OA\operatorname{sen}\delta = CA \end{cases} \qquad |\overline{OA}| = p\cos\delta + \overline{CA}\operatorname{sen}\delta$$

Sia $\quad CA = x_c\cos\beta + y_c\operatorname{sen}\beta$

$$1)\begin{cases} CA\cos\beta = x_c \\ CA\operatorname{sen}\beta = y_c \end{cases} \begin{cases} (OA\operatorname{sen}\delta)\cos\beta = x_c \\ (OA\operatorname{sen}\delta)\operatorname{sen}\beta = y_c \end{cases}$$

Dalla Eq. di Vag sappiamo

$$\left.\begin{cases} OA\cos\alpha'_1 = x \\ OA\cos\alpha'_2 = y \\ OA\cos\alpha'_3 = z \end{cases}\right\} OA = \frac{x}{\cos\alpha'_1} = \frac{y}{\cos\alpha'_2} = \frac{z}{\cos\alpha'_3}$$ che sostituita in 1) darà:

$$2)\begin{cases} x_c\cos\alpha'_1 = x\operatorname{sen}\delta\cos\beta \\ x_c\cos\alpha'_2 = y\operatorname{sen}\delta\cos\beta \\ x_c\cos\alpha'_3 = z\operatorname{sen}\delta\cos\beta \end{cases} \begin{cases} y_c\cos\alpha'_1 = x\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\beta \\ y_c\cos\alpha'_2 = y\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\beta \\ y_c\cos\alpha'_3 = z\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

La 2) da' la relazione che intercorre tra le varie coordinate e tra le Eq. di Vag che rappresentano i punti.
Se il segmento OC giace sull'asse z tale piano sarà parallelo al piano xOy e implicherà che $\sin\delta = \sin\alpha'_3$ e quindi come proiezione possiamo far coincidere x_c con x e y_c con y:

$$\begin{cases} x_c\cos\alpha'_1 = x sen\alpha'_3\cos\beta \\ x_c\cos\alpha'_2 = y sen\alpha'_3\cos\beta \\ x_c\cos\alpha'_3 = z sen\alpha'_3\cos\beta \end{cases} \begin{cases} y_c\cos\alpha'_1 = x sen\alpha'_3 sen\beta \\ y_c\cos\alpha'_2 = y sen\alpha'_3 sen\beta \\ y_c\cos\alpha'_3 = z sen\alpha'_3 sen\beta \end{cases}$$

Dalla figura sotto, un piano distante p dall'origine, per quanto visto e posto $\delta = C\hat{O}A$:

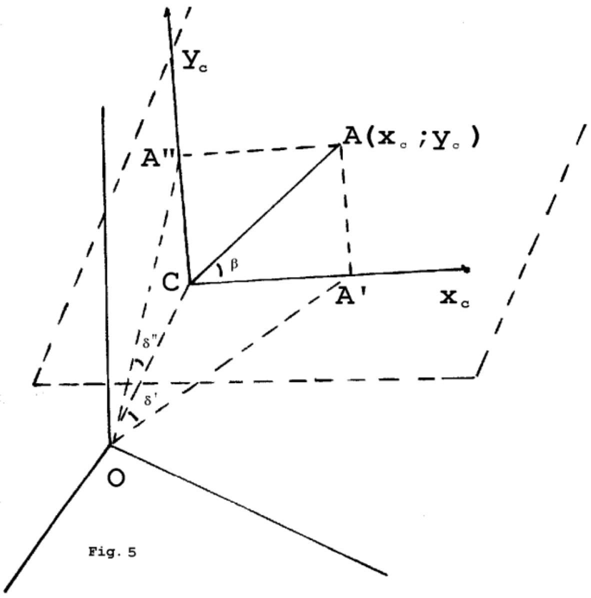


Fig. 5

$$\begin{cases} OA\cos\delta = p \\ OA\,\mathrm{sen}\,\delta = CA \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA'\cos\delta' = p \\ OA'\,\mathrm{sen}\,\delta' = CA' = x_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA''\cos\delta'' = p \\ OA''\,\mathrm{sen}\,\delta'' = CA'' = y_c \end{cases}$$

$$CA = CA'\cos\beta + CA''\,\mathrm{sen}\,\beta = x_c\cos\beta + y_c\,\mathrm{sen}\,\beta$$

$$1) CA = OA\mathrm{sen}\delta = (OA'\mathrm{sen}\delta')\cos\beta + (OA''\mathrm{sen}\delta'')\mathrm{sen}\beta$$

$$(OA\mathrm{sen}\delta)^2 = (OA'\mathrm{sen}\delta')^2 + (OA''\mathrm{sen}\delta'')^2$$

ed anche: $CA = p\tan\delta;\; x_C = CA' = p\tan\delta';\; y_C = CA'' = p\tan\delta''$

$$2)\; CA = (p\tan\delta')\cos\beta + (p\tan\delta'')\mathrm{sen}\beta \qquad \begin{cases} CA\cos\beta = p\tan\delta\cos\beta = p\tan\delta' \\ CA\mathrm{sen}\beta = p\tan\delta\mathrm{sen}\beta = p\tan\delta'' \end{cases}$$

Qualunque possa essere il valore di p avremo:

$$3)\; \tan\delta = \tan\delta'\cos\beta + \tan\delta''\mathrm{sen}\beta \begin{cases} \tan\delta\cos\beta = \tan\delta' \\ \tan\delta\mathrm{sen}\beta = \tan\delta'' \end{cases} \qquad tan^2\,\delta = tan^2\,\delta' + tan^2\,\delta''$$

$$4)\; \tan\beta = \frac{\tan\delta''}{\tan\delta'}$$

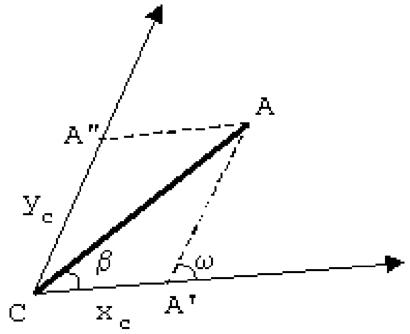


Fig. 6

Proseguendo nelle considerazioni fatte nella pagina precedente nel caso che il riferimento sul piano non sia ortogonale, come nella figura a lato, sappiamo come possiamo scrivere tale equazione:

$$\begin{cases} \overline{CA}\cos\beta = x_c + y_c\cos\omega = CA' + CA''\cos\omega \\ \overline{CA}\,\mathrm{sen}\,\beta = y_c\,\mathrm{sen}\,\omega = CA''\,\mathrm{sen}\,\omega \end{cases}$$

$$\overline{CA}^2 = \overline{CA'}^2 + \overline{CA''}^2 + 2\overline{CA'} + \overline{CA''}^2\cos\omega$$

$$\begin{cases} \overline{CA}\cos\beta = p\tan\delta\cos\beta = p\tan\delta' + p\tan\delta''\cos\omega \\ \overline{CA}\,\mathrm{sen}\,\beta = p\tan\delta\,\mathrm{sen}\,\beta = p\tan\delta''\,\mathrm{sen}\,\omega \end{cases}$$

$$\tan^2\delta = \tan^2\delta' + \tan^2\delta'' + 2\tan\delta'\tan\delta''\cos\omega$$

dove δ, δ', δ" sono quelli della pagina precedente.

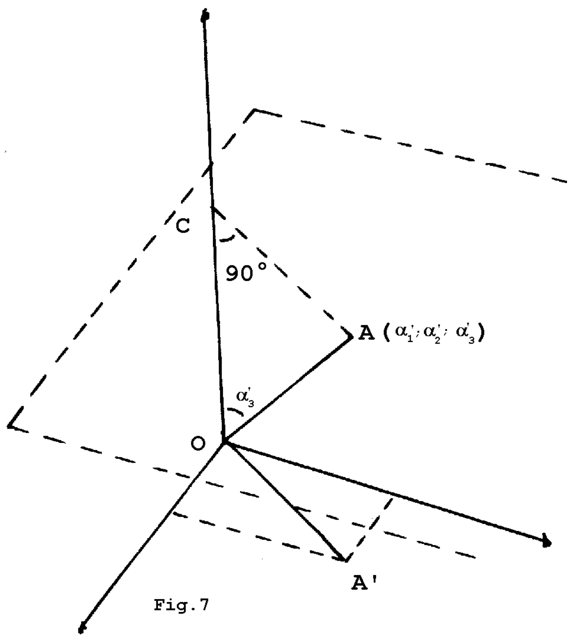


Fig.7

Il piano parallelo al piano yOx e' dato da OC=P e dai coseni direttori di angoli:

$\alpha_1 = 90°; \alpha_2 = 90°; \alpha_3 = 0$

cioè:

$$\cos\delta = \cos\alpha'_1 \cos 90 + \cos\alpha'_2 \cos 90 + + \cos\alpha'_3 \cos 0° = \cos\alpha'_3$$

$$\begin{cases} OA\cos\alpha'_3 = p \\ OA\,\mathrm{sen}\,\alpha'_3 = CA \end{cases}$$

$$OA = p\cos\alpha'_3 + CA\,\mathrm{sen}\,\alpha'_3$$

Se lo stesso piano fosse per l'origine dovrebbe essere p=0 $OA'\cos\alpha'_3 = 0$ quindi $cos\alpha'_3 = 0$ $\alpha'_3 = 90°$ e coinciderebbe con il piano yOx. Quindi i suoi coseni dir. sarebbero stati $(\cos\alpha'_1; \cos\alpha'_2; \cos\alpha'_3 = 0)$ cioè

$$cos^2\alpha'_1 + cos^2\alpha'_2 = 1$$

$$\begin{cases} cos\alpha'_1 = sen\alpha'_2 \\ cos\alpha'_2 = sen\alpha'_1 \end{cases} \qquad \cos\alpha'_1\cos\alpha'_2 = \sin\alpha'_1\sin\alpha'_2 \qquad \alpha'_1 + \alpha'_2 = 90°$$

Dato un piano distante p di cos. dir. $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ e un suo punto A di cos.dir. $(\cos\alpha'_1, \cos\alpha'_2, \cos\alpha'_3)$ esso e' rappresentato da

$\mathrm{OA}\cos\rho = p \qquad \cos\rho = \cos\alpha_1 \cos\alpha'_1 + \cos\alpha_2 \cos\alpha'_2 + \cos\alpha_3 \cos\alpha_3'$

Se $C(c_1,c_2,c_3)$ e' l'estremo del punto p sappiamo

$$c_1 \cos\alpha_1 + c_2 \cos\alpha_2 + c_3 \cos\alpha_3 = p$$

ma $OA\cos\rho = a\cos\alpha_1 + b\cos\alpha_2 + c\cos\alpha_3 = p$ e pertanto
$(a-c_1)\cos\alpha_1 + (b-c_2)\cos\alpha_2 + (c-c_3)\cos\alpha_3 = 0$ (espressione già nota)

Un qualunque altro piano X noto e' **parallelo** a quello per A se:

$$\cos\rho_x = \cos x \cos\alpha_1 + \cos y \cos\alpha_2 + \cos z \cos\alpha_3$$
$$OX\cos\rho_x = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 = p'$$

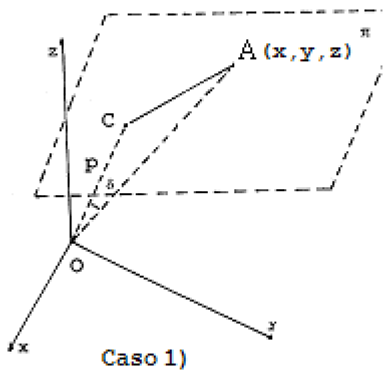
Mentre la distanza dei due piani e':

$$\mathrm{OA}\cos\rho - \mathrm{OX}\cos\rho_x = p - p'$$

IL PUNTO NEL PIANO

Sia un piano distante $\overline{OC} = p(a,b,c;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ dall'origine; A$(x,y,z;\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3)$ un punto generico di tale piano; la retta congiungente CA di coseni dir. $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$.

L'Eq. di Vag generica di tale punto (Vedi "IL PIANO") sarà:



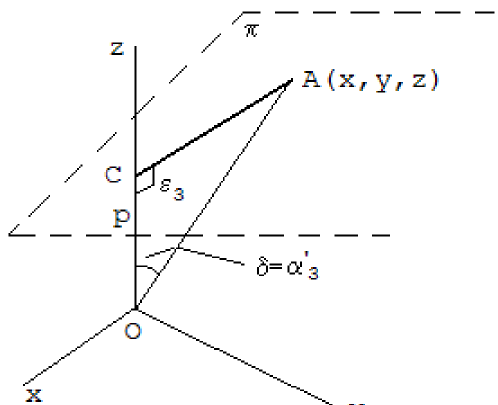
Caso 1)

$$\overline{OA} = p\cos\delta + \overline{CA}\sin\delta$$

$$\cos\delta = \cos\alpha'_1\cos\alpha_1 + \cos\alpha'_2\cos\alpha_2 + \cos\alpha'_3\cos\alpha_3$$

con le seguenti uguaglianze:

1) piano generico $\begin{cases} x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 = p \\ x\cos\varepsilon_1 + y\cos\varepsilon_2 + z\cos\varepsilon_3 = \overline{CA} \end{cases}$



Caso 2

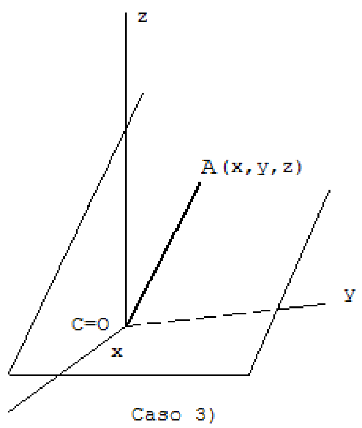
2) piano parallelo al piano xOy.

$\begin{cases} z = p \\ x\cos\varepsilon_1 + y\sin\varepsilon_1 = \overline{CA} \end{cases}$ $\quad OA = p\cos\alpha'_3 + CA\sin\alpha'_3$

C$(0,0,p;\alpha_1=90°,\alpha_2=90°,\alpha_3=0°)$; $\quad OC = p$

$\delta = \alpha'_3 \qquad A = (x,y,p;\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3)$

$\varepsilon_3 = 90° \qquad \cos^2\varepsilon_1 + \cos^2\varepsilon_2 = 1 \quad \cos\varepsilon_2 = \sin\varepsilon_1$

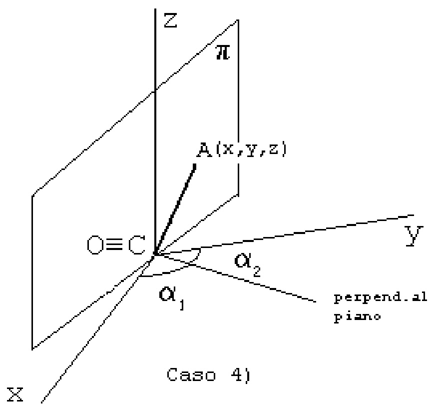


Caso 3)

3) piano per 'origine

$\begin{cases} x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 = 0 \\ x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 = \overline{CA} \end{cases}$

poichè OA≡CA $(\alpha'_1,\alpha'_2,\alpha'_3) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$; p=0, cosδ=cos90° e con $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ angoli della perpendicolare al piano in O=C (non segnata in figura): $OA = p\cos 90° + CA\sin 90° = CA$



4) piano contenente l'asse z quindi anche per l'origine, pertanto si hanno le stesse condizioni del punto 3):

OA=CA $\quad (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad$ p=0,

Inoltre il piano è perpendicolare al piano coordinato xOy e la perpendicolare in O≡C a tale piano giace sul piano coordinato xOy e i suoi angoli sono (α_1, α_2) essendo $\alpha_3=90°$ per cui $\cos^2\alpha_1 = 1 - \cos^2\alpha_2 = \sin^2\alpha_1$.

$$\begin{cases} x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = 0 \\ x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 = \overline{CA} = \overline{OA} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{CA}\cos\alpha'_1 = x \\ \overline{CA}\cos\alpha'_2 = y \\ \overline{CA}\cos\alpha'_3 = z \end{cases}$$

Variando α_1 avremo che il piano π girerà sull' asse z ed il punto A percorrerà, in questo caso, una circonferenza.

5) piano xOy $\quad \begin{cases} z = 0 \\ x\cos\varepsilon_1 + y\cos\varepsilon_2 + z\cos\varepsilon_3 = \overline{CA} \end{cases}$

ECC.

PROIEZIONE DEI PUNTI DI UN PIANO SU UN PIANO COORDINATO

Sia il piano distante OC = p e un suo punto $X(x,y,z;\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ secondo quanto visto nella pagina precedente si avrà:

$$OX = p\cos\delta + CX\,\mathrm{sen}\,\delta \qquad \begin{cases} OX\cos\varepsilon_1 = x \\ OX\cos\varepsilon_2 = y \\ OX\cos\varepsilon_3 = z \end{cases}$$

si consideri la sua proiezione X_x sul coordinato xOy (identico ragionamento vale per gli altri piani coordinati) avremo, come si è visto:

$$\overline{OX_x}^2 = \overline{OX}^2 - z^2$$

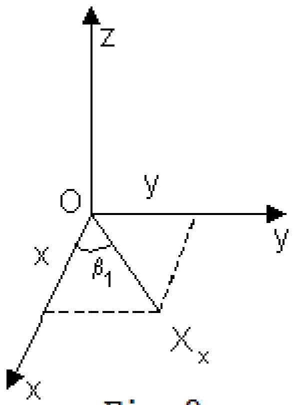


Fig.9a

$$\begin{cases} \overline{OX_x}\,cos\beta_1 = x = \overline{OX}\,cos\varepsilon_1 \\ \overline{OX_x}\,sen\beta_1 = y = \overline{OX}\,cos\varepsilon_2 \end{cases} \qquad tan\beta_1 = \frac{cos\varepsilon_2}{cos\varepsilon_1}$$

$$\overline{OX_x} = \overline{OX}\sqrt{(cos^2\varepsilon_1 + cos^2\varepsilon_2)} \qquad \overline{OX} = \frac{\overline{OX_x}}{\sqrt{\left(cos^2\varepsilon_1 + cos^2\varepsilon_2\right)}}$$

$$\begin{cases} \overline{OX}^2\,cos^2\delta = p^2 \\ \overline{OX}^2\,sen^2\delta = \overline{CX}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\overline{OX_x}^2 + z^2)\,cos^2\delta = p^2 \\ (\overline{OX_x}^2 + z^2)\,sen^2\delta = \overline{CX}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{OX_x}^2\,cos^2\delta = p^2 - z^2\,cos^2\delta \\ \overline{OX_x}^2\,sen^2\delta = \overline{CX}^2 - z^2 sen^2\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{OX}\,cos\delta = \dfrac{\overline{OX_x}}{\sqrt{cos^2\varepsilon_1 + cos^2\varepsilon_2}}\,cos\delta = p \\ \overline{OX}\,sen\delta = \dfrac{\overline{OX_x}}{\sqrt{cos^2\varepsilon_1 + cos^2\varepsilon_2}}\,sen\delta = \overline{CX} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{OX_x}\,cos\delta = p\sqrt{cos^2\varepsilon_1 + cos^2\varepsilon_2} \\ \overline{OX_x}\,sen\delta = CX\sqrt{cos^2\varepsilon_1 + cos^2\varepsilon_2} \end{cases}$$

Il punto X_x è dunque il proietto del punto generico X appartenente al piano distante OC = p.

PROIEZIONE DI UNA ELLISSE

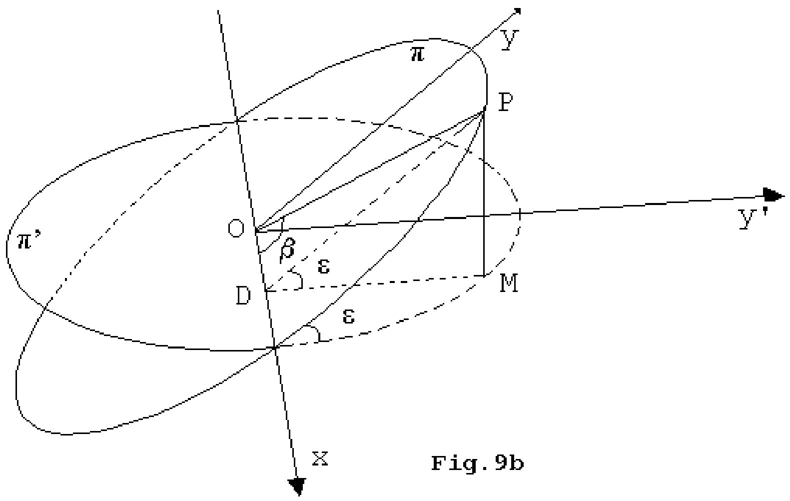


Fig.9b

Sul piano π sia l'Ellisse di semi assi q;m e assi coordinati x,y. Sia la sua proiezione sul piano π', passante per il centro ed origine dell'Ellisse π; ε l'angolo tra i due piani e y' proiezione di y.
Il punto M è la proiezione del generico punto P e D la proiezione di M sull'asse x (vedi figura); avremo:

$\overline{DM} = \overline{DP}\,cos\,\varepsilon = \overline{OP}sen\beta\,cos\,\varepsilon \qquad \overline{OD} = \overline{OP}\cos\beta$

$\overline{OM}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{OD}^2 = \left(\overline{OP}sen\beta\,cos\,\varepsilon\right)^2 + \left(\overline{OP}\,cos\,\beta\right)^2$ da cui le due Eq. di Vag rappresentanti le due Ellisse (β' angolo MOx):

1] $\begin{cases} \overline{OP}\cos\beta = q\cos\alpha \\ \overline{OP}sen\beta = m\,sen\alpha \end{cases}$ 2] $\begin{cases} \overline{OM}\,cos\,\beta' = \overline{OD} = \overline{OP}\,cos\,\beta = q\,cos\,\alpha \\ \overline{OM}\,sen\beta' = \overline{DM} = \overline{DP}\,cos\,\varepsilon = \overline{OP}sen\,\beta\,cos\,\varepsilon = (msen\alpha)cos\,\varepsilon \end{cases}$

$$tan\,\beta = \frac{m}{q}\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \qquad tan\,\beta' = \frac{m}{q}\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}cos\,\varepsilon = tan\,\beta\,cos\,\varepsilon$$

Per q=m e cosε≠1 la 1] sarà una Circonferenza e la 2] una Ellisse

Per q<m e $cos\,\varepsilon = \frac{q}{m}$ la 1] sarà una Ellisse e la 2] una Circonferenza

Per q>m entrambi Ellisse.

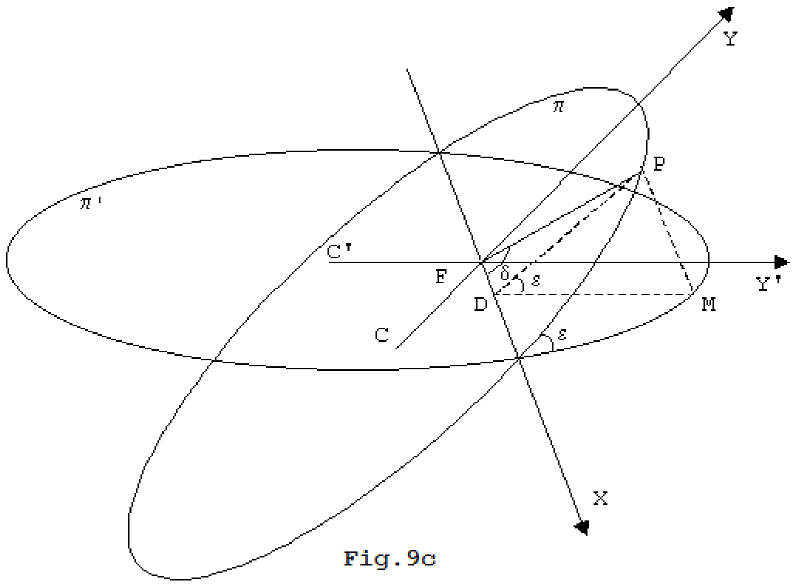


Fig.9c

Se l'origine del riferimento cartesiano delle Ellissi è nel Fuoco, i centri risulteranno ciascuno sul proprio piano, ma il procedimento sarebbe identico ed avremmo avuto (per O≡F e δ angolo PFx; δ' angolo MFx)

$$1]\ \begin{cases} \overline{FP}\cos\delta = q(\cos\alpha - e) \\ \overline{FP}sen\delta = m\,sen\alpha \end{cases} \qquad 2]\ \begin{cases} \overline{FM}\cos\delta' = q(\cos\alpha - e) \\ \overline{FM}\,sen\delta' = (m\,sen\alpha)\cos\varepsilon \end{cases}$$

$$\tan\delta = \frac{m}{q}\frac{sen\alpha}{\cos\alpha - e} \qquad \tan\delta' = \frac{m}{q}\frac{sen\alpha}{\cos\alpha - e}\cos\varepsilon = \tan\delta\cos\varepsilon$$

Per q=m (quindi eccentricità=0) e cosε≠1 la 1] sarà una Circonferenza di centro C,con Origine nel punto F, e la 2] una Ellisse di centro C' e Origine nel Fuoco.

Per q<m e $\cos\varepsilon = \frac{q}{m}$ analogamente come sopra la 1] sarà una Ellisse e la 2] una Circonferenza.
Per q>m entrambi Ellissi di centro C e C' e Origine nel fuoco F.

IL TEOREMA DEI PIANETI NELLO SPAZIO

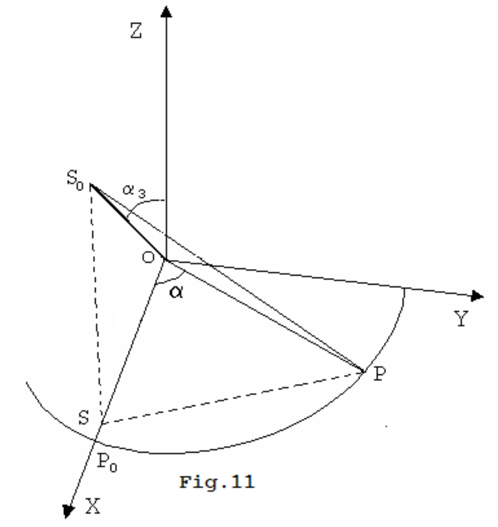


Fig.11

Sia la circonferenza di centro O e perpendicolare Z (come in figura) su un piano e un punto S_0 fuori di tale piano, tale che la sua proiezione S cada entro la circonferenza in esame. Si conduca la congiungente OS ad intersecare la circonferenza nel punto P_0, in modo che si formi il riferimento cartesiano ortogonale nello spazio XYZ. Sia OS = r, OP_0 = R e P un qualunque punto sulla circonferenza di angolo α con l'asse X.

Usando α anziché α/2, per il Teorema dei Pianeti sappiamo:

$$\begin{cases} \overline{SP}\cos\beta = (R+r)\cos\alpha \\ \overline{SP}sen\beta = (R-r)sen\alpha \end{cases} \quad *] \qquad \text{con } \tan\beta = \frac{R-r}{R+r}\tan\alpha$$

Inoltre $\begin{cases} \overline{OS_0}\cos\alpha_3 = \overline{SS_0} = z \\ \overline{OS_0}sen\alpha_3 = \overline{OS} = r \end{cases}$

Vediamo anche: $\overline{S_0P}^2 = \overline{SS_0}^2 + \overline{SP}^2 = z^2 + \overline{SP}^2 = (R+r)^2\cos^2\alpha + (R-r)^2 sen^2\alpha + z^2 =$
$= \left[(R+r)^2 + z^2\right]\cos^2\alpha + \left[(R-r)^2 + z^2\right]sen^2\alpha$

E per un opportuno β_1 anche:

$$\begin{cases} \overline{S_0P}\cos\beta_1 = \sqrt{(R+r)^2 + z^2}\cos\alpha \\ \overline{S_0P}sen\beta_1 = \sqrt{(R-r)^2 + z^2}sen\alpha \end{cases} \qquad \text{posto} \qquad \begin{cases} \sqrt{(R-r)^2 + z^2} = m_1 \\ \sqrt{(R+r)^2 + z^2} = q_1 \end{cases}$$

cioè una Ellisse di semiassi m<q e $Tan\beta_1 = \frac{m_1}{q_1}\tan\alpha$

(Vedi applet "Teorema dei Pianeti" nello spazio)

Anche nello spazio dunque è valido il Teorema dei Pianeti già visto sul Piano!

TEOREMA DEI PIANETI. Data una circonferenza, la distanza dei suoi punti da un qualunque punto fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, è la distanza di una ellisse.