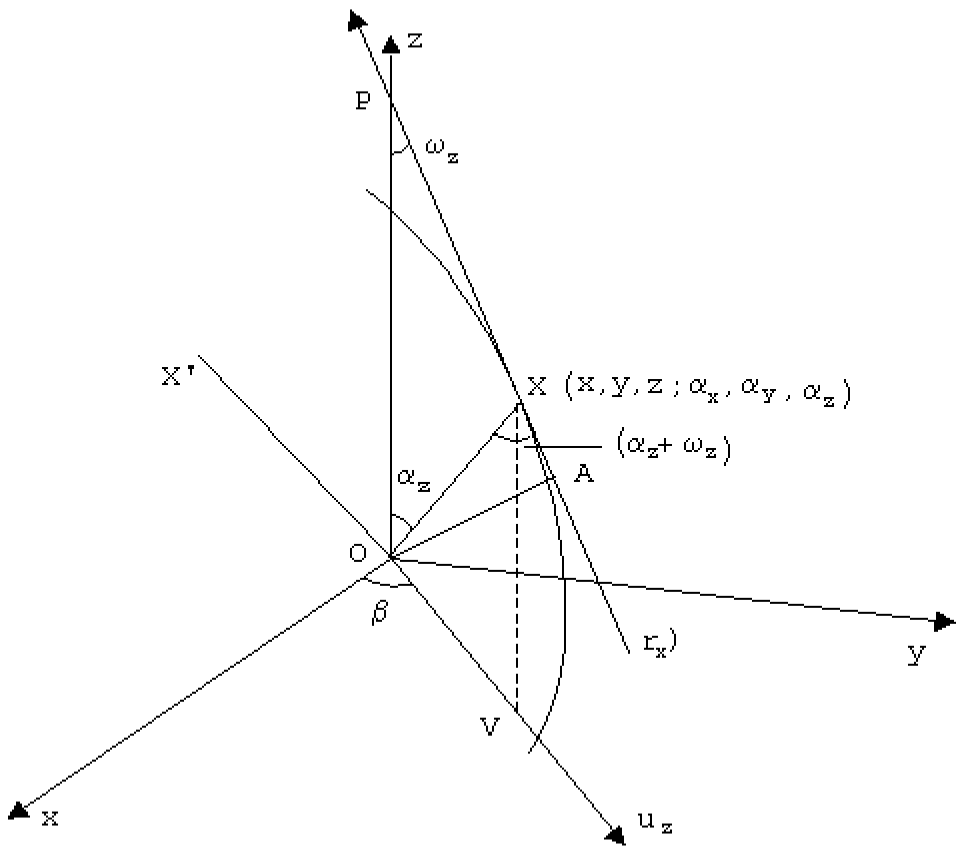
IX. TANGENTI

TANGENTI A UNA SUPERFICE



Sia una superfice con riferimento cartesiano ortogonale nel suo interno e un suo punto X; per tale punto e per l’asse z (come da figura) facciamo passare un Piano, che taglierà la superficie secondo una linea e il piano xOy secondo una retta u_z; su tale piano giacerà anche la distanza OX.
Dalla linea tracciata da tale piano possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \overline{OX}\,cos\,\alpha_z = \overline{XV} = z \\ \overline{OX}\,sin\,\alpha_z = \overline{OV} = u_z \end{cases}$$

La tangente r_x) sul piano di coordinate u_zOz, nel punto X sappiamo essere: $tan\,\omega_z = \frac{du_z}{dz}$

La distanza dell’Origine dalla retta r_x) è OA=d data dall’Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{OX}\,cos(\alpha_z + \omega_z) = \overline{AX} \\ \overline{OX}\,sin(\alpha_z + \omega_z) = \overline{OA} = d \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\overline{OX}^2 = \overline{AX}^2 + d^2 \\ &\overline{OX} = \overline{AX}\,cos(\alpha_z + \omega_z) + d\,sin(\alpha_z + \omega_z) \end{aligned}$$

Uno dei coseni direttori della distanza OA=d (cioè quello riferito all’asse z) ha angolo AOP = (90°-ω_z) mentre:

$$\overline{OP} = \frac{d}{\cos(90° - \omega_z)}\,.$$

Ricavando con lo stesso metodo i coefficienti angolari (ω_x, ω_y) dei semi assi x e y avremo (90°-ω_x) e (90°-ω_y) cioè i coseni direttori della distanza OA=d nonchè i punti intersezione Q ed M, su gli assi x ed y, corrispettivi a P.
Il piano per la retta r_x) e perpendicolare a OA è giusto il piano tangente avente distanza OA=d e si potrà pertanto scrivere (per un generico punto X di tale piano):

$$\begin{cases} \overline{OX}\sin(\alpha_z + \omega_z) = d \\ \overline{OX}\cos(\alpha_z + \omega_z) = \overline{AX} \end{cases}$$ in forma implicita

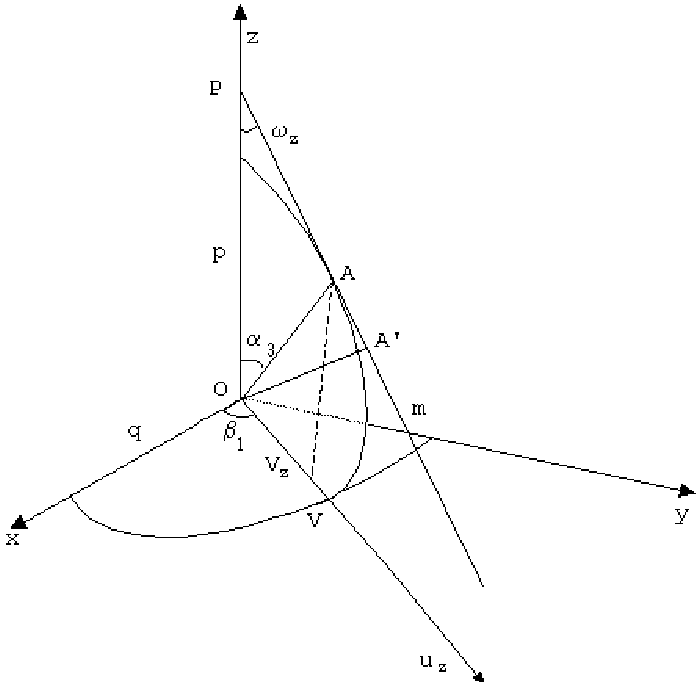
dove $d = x\cos(90° - \omega_x) + y\cos(90° - \omega_y) + z(90° - \omega_z)$

Questo piano tangente è lo stesso di quello ricavabile tramite i tre punti Q,M,P, indicati sopra.Dalla Fig. si ha anche:

$$\begin{cases} \overline{OV}\,cos\,\beta = x \\ \overline{OV}\,sin\,\beta = y \end{cases} \qquad tan\,\beta = \frac{y}{x}$$

dove si vede che β è una costante in quanto il nostro piano, per il punto X e l’asse z è unico.

TANGENTE ALL’ELLISSOIDE



In un Ellissoide per un punto A di coordinate $(q\cos\rho_1; m\cos\rho_2; p\cos\rho_3)$ ed asse z tracciamo un piano π, che intersecherà il piano xOy secondo un asse (u_z) e l’ellissoide secondo una curva per A, come vediamo in figura. Sul piano xOy sappiamo avere un ellisse e il punto V, punto di incontro delle due figure.
Il punto A può scorrere lungo il perimetro dell’ellissoide sul piano π e la sua grandezza OA sarà compresa tra il valore p ed il valore OV sul piano cartesiano di assi coordinati z e u_z con AOV=(90-α_3).La proiezione di OA su u_z è V_z.Si avrà (vedi “IL PUNTO NELLO SPAZIO” Cap II):

$$\begin{cases} V_z \cos\beta_1 = q\cos\rho_1 \\ V_z \sin\beta_1 = m\cos\rho_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{OV}\cos\beta_1 = q\cos\rho_\beta \\ \overline{OV}\sin\beta_1 = m\sin\rho_\beta \end{cases}$$

$\tan\beta_1 = \dfrac{m}{q}\dfrac{\cos\rho_1}{\cos\rho_2} = \dfrac{m}{q}\dfrac{\sin\rho_\beta}{\cos\rho_\beta}$; $\tan\rho_\beta = \dfrac{\cos\rho_1}{\cos\rho_2}$ e quindi $\overline{OV}^2 = (q\cos\rho_\beta)^2 + (m sen\rho_\beta)^2$

Noto OV esisterà un angolo ε tale che si possa scrivere:

$$\begin{cases} \overline{OA}\, sen\alpha_3 = V_z = \overline{OV}\cos\varepsilon \\ \overline{OA}\cos\alpha_3 = z = p\cos\rho_3 \end{cases}$$

ma la figura sul piano u_zOz è una ellisse per cui $\cos^2\varepsilon + \cos^2\rho_3 = 1$ e quindi $\cos\varepsilon = sen\rho_3$

$$\begin{cases} \overline{OA}\, sen\alpha_3 = V_z = \overline{OV}\, sen\rho_3 \\ \overline{OA}\cos\alpha_3 = z = p\cos\rho_3 \end{cases}$$

Sul piano π, la tangente all'Ellisse nel punto A (che è anche la tangente all'Ellissoide) è data da:

$$tan\,\omega_z = \frac{du_z}{dz} = -\frac{\overline{OV}\,cos\,\rho_3}{p\,sen\rho_3} = -\frac{\overline{OV}}{p}\frac{1}{tan\,\rho_3} \quad \text{dove} \quad \overline{OV} = \frac{\overline{OA}\,sen\alpha_3}{sen\rho_3}$$

Se sul piano π anziché una Ellisse si fosse avuto una circonferenza allora P=OV=R e quindi $tan\,\omega_z = -\frac{1}{tan\,\rho_3}$.

Possiamo considerare e calcolare alla stessa maniera le tre tangenti per uno stesso punto A riferite a tre piani passanti per i tre assi:

$$tan\,\omega_z = \frac{du_z}{dz} = -\frac{\left(\overline{OV}\right)_z}{p}\frac{1}{tan\,\rho_3} = \frac{\overline{OA}\,sen\alpha_3}{p\,sen\rho_3}\frac{1}{tan\,\rho_3}$$
$$tan\,\omega_y = \frac{du_y}{dy} = -\frac{\left(\overline{OV}\right)_y}{m}\frac{1}{tan\,\rho_2} = \frac{\overline{OA}\,sen\alpha_2}{m\,sen\rho_2}\frac{1}{tan\,\rho_2}$$
$$tan\,\omega_x = \frac{du_x}{dx} = -\frac{\left(\overline{OV}\right)_x}{q}\frac{1}{tan\,\rho_1} = \frac{\overline{OA}\,sen\alpha_1}{p\,sen\rho_1}\frac{1}{tan\,\rho_1}$$

Volendo la distanza della retta dall'Origine basterà:
$\overline{OA'} = \overline{OA}\,sen(\,\omega_z + \alpha_3\,)$ essendo l'angolo OA'A=90.

Infine potrò ottenere la distanza $\overline{\mathrm{OP}} = \frac{\overline{\mathrm{OA'}}}{\mathrm{sen}\omega_z}$ ottenendo così le coordinate del punto P (punto di incontro tra l'asse z e la tangente). Analogamente si potranno trovare i punti Q e M sugli assi x e y,e tramite questi il piano tangente all'Ellissoide.

Il piano per la retta tangente e distanza $\overline{OA'}$ dall' origine è il **piano tangente** all'Ellissoide,che conterrà il punto A per definizione e taglierà gli assi cartesiani z,x,y rispettivamente nei punti P,Q,M; esso è dato dall'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{OA}\,cos\left(\omega_z + \alpha_3\right) = \overline{OA'} & \text{(distanza del piano dall'Origine)} \\ \overline{OA}\,sen\left(\omega_z + \alpha_3\right) = \overline{AA'} \end{cases}$$