ABSTRACT. Astronomy and Geometry.

UN SATELLITE IN ORBITA

Mettere in orbita un satellite implica lo sforzo di diverse discipline, concetti e teorie. In questa breve nota proviamo ad affrontare il problema da un punto di vista geometrico.

Richiami di Geometria:

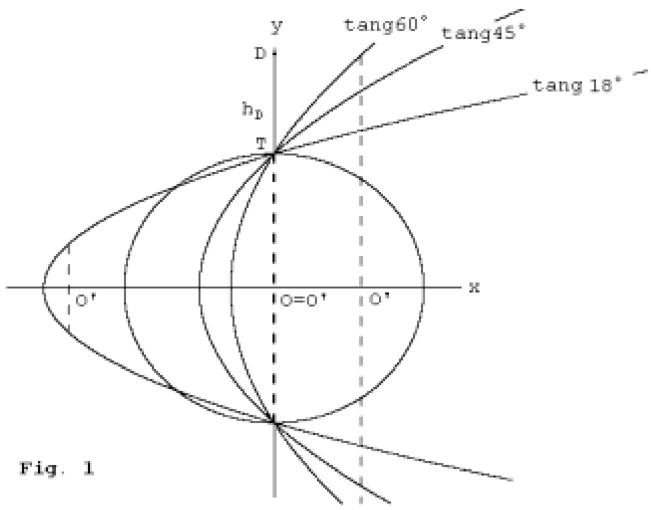
1) $$\frac{R}{\cos\alpha}=\left[\frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha)\right]\cos\beta+\left[\frac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right]\right]sen\beta$$

è l'equazione di una parabola con l'origine nel fuoco, con β angolo del vettore-fuoco, ed R la distanza fuoco-vertice. Il variare del valore α (angolo di una circonferenza di riferimento) dà la curva parabolica, ma se noi blocchiamo per un valore α_x il solo rapporto $R/\alpha_x=R_x$ la curva parabola, da quel punto, diventa una circonferenza di raggio R_x. Indicando con ρ l'angolo della tangente alla parabola, il legame dei tre angoli indicati è:

$$\tan\rho=\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$ da cui $\beta=2\rho$ e $\cos\alpha=\frac{1-\cos\beta}{2}$

2)Abbiamo chiamato Teorema dei Pianeti:
data una circonferenza ed un punto S qualunque nello spazio, la distanza di questi dai punti della circonferenza, sono le distanze di un vettore di ellisse il cui centro è S.

Sulla base di queste due semplici regole geometriche vogliamo porre le basi per il moto di un punto (corpo) sparato nello spazio e conoscerne la velocità, secondo i dettami della fisica.



Il primo dato che uno pone è: a che altezza si vuole che il corpo ruoti? Nella Fig.1 (tutte le figure sono ottenute a computer) l'altezza è indicata con $h_D=\overline{TD}$.

Il successivo: quale parabola scelgo da far percorrere al corpo,affinché la circonferenza che da questa ne deriva secondo il punto 1), passi per il punto D?

In Fig.1, abbiamo tre parabole determinate dall'angolo di partenza o alzo, cioè dall'angolo della loro tangente nel punto di partenza T della circonferenza di raggio $R=OT$ (circonferenza che rappresenta teoricamente un corpo, come ad esempio la Terra), mentre le linee tratteggiate sono il valore del parametro p (vedi Richiami di Geometria 1)) della parabola il cui punto di incontro con l'ascissa dà il Fuoco di ogni parabola, segnato con O'.

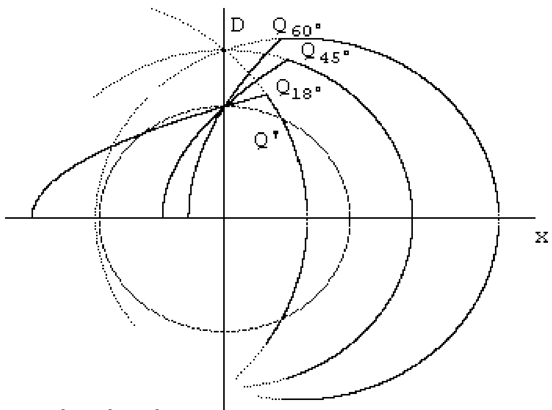


Fig 1 Bis

Nella Fig 1Bis sono ripetute sinteticamente le parabole della Fig1 e per ciascuna è segnato il punto Q in cui la parabola si trasforma in quella determinata circonferenza passante per il punto D. Se osserviamo la figura la parabola di tang18° fornisce una circonferenza che passa per D, ma impatta con la circonferenza di raggio R in Q', quindi per quella data altezza h_D non può essere presa in considerazione.

Scelta in base all'alzo una parabola e ponendo un riferimento in O' anziché in O (nel caso di alzo=45° si ha coincidenza delle due origini) possiamo applicare i richiami di geometria 1) per ottenere un punto Q, tale da fornire la relativa circonferenza di centro O' passante in D come vediamo in Fig.2.

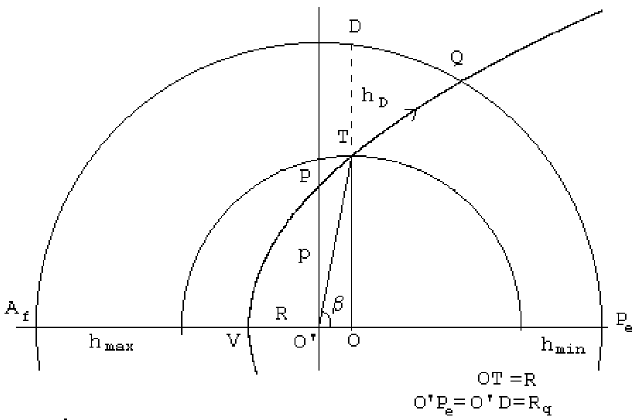


Fig.2

La distanza massima h_{max} e la distanza minima h_{min} delle due circonferenze di raggio R ed R_q è sempre data da $\frac{h_{max} - h_{min}}{2} = \overline{OO'}$ e tale valore è uguale a zero nel caso che l'angolo di partenza o alzo sia ρ=45° (Fig.1) il che vuol dire la coincidenza di O con O', quindi $h_D = h_{max} = h_{min}$.

Potendo conoscere dal valore dell'alzo imposto, il valore di OO' (poiché si conosce $\beta=2\rho$), noto OD, è possibile conoscere il raggio R_q (Fig.2) e quindi le coordinate del punto Q rispetto ad O', il tutto mediante calcoli elementari.

Noto R_q del punto Q abbiamo la velocità parabolica e la velocità circolare rispetto ad O', che sappiamo essere la prima $V_F^2 = \frac{2GM}{R_q}$ e la seconda $V_C^2 = \frac{GM}{R_q}$ (con la nota simbologia di G=costante di gravitazione universale ed M = somma delle masse), quest' ultima è quella velocità che serve al corpo per potersi immettere nella circonferenza di raggio R_q, e quindi possiamo affermare che se nel punto Q un corpo riduce la sua velocità da V_F a V_C vuol dire che si muoverà secondo una nuova tangente, cioè secondo una traiettoria circolare di raggio R_q.

Per ottenere la velocità orbitale del punto Q (o di qualunque altro punto della circonferenza di raggio R_q) dobbiamo applicare quello che è indicato dalla 2) del Richiamo di Geometrica e cioè: la distanza OQ non è che la distanza di una ellisse in cui i semiassi sono dati da

$$\begin{cases} R_q - \overline{OO'} = R + h_{min} = m & \text{semiasse minore} \\ R_q + \overline{OO'} = R + h_{max} = q & \text{semiasse maggiore} \end{cases}$$

con l'equazione in forma generale della ellisse:

$$\begin{cases} \left|\overline{OQ}\right| \cos\beta_E = m\cos\alpha/2 \\ \left|\overline{OQ}\right| \sin\beta_E = q\sin\alpha/2 \end{cases} \qquad \tan\beta_E = \frac{m}{q}\tan\frac{\alpha}{2}$$

o in forma lineare $$\left|\overline{OQ}\right| = (m\cos\frac{\alpha}{2})\cos\beta_E + (q\sin\frac{\alpha}{2})\sin\beta_E$$

essendo β_E l'angolo del vettore dell'ellisse con centro in O e α l'angolo della circonferenza di raggio R_q.
E' evidente che l'ellisse diventa una circonferenza se la tangente alla parabola nel punto T avesse avuto angolo uguale a 45° in quanto O=O'.
E' possibile ora calcolare la velocità orbitale nel punto Q:

$$V_E^2 = GM\left(\frac{2}{OQ} - \frac{1}{R + h_{max}}\right)$$

Volendo il periodo del punto Q e centro O' avrò

$$\left(\frac{2R_q\pi}{T}\right)^2 = V^2 = \frac{GM}{R_q} \quad \text{da cui} \quad \frac{T^2}{R_q^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}$$

giusta l'affermazione del Sig. Keplero nella terza legge, quando però tale affermazione sia riferita a tutte le circonferenze di centro in O'.
Siamo dunque pervenuti a determinare quale sarà la posizione e la velocità di un satellite (considerato come punto), partendo da due dati: **l'altezza e l'alzo** applicando solo alcuni aspetti che la geometria parametrica ci suggerisce, per avere una base su cui sviluppare quei principi della dinamica che governano il moto dei punti come corpi.
E' ovvio che le regole geometriche poste non sono sufficienti per il moto nella realtà, perché privi di ogni elemento di «perturbazione» che la fisica e la matematica indicano come variabili.
Basta solo pensare come sia tuttaltro che facile determinare nel modo voluto l'angolo di partenza o alzo tenendo conto dei vari moti di rivoluzione e traslazione.