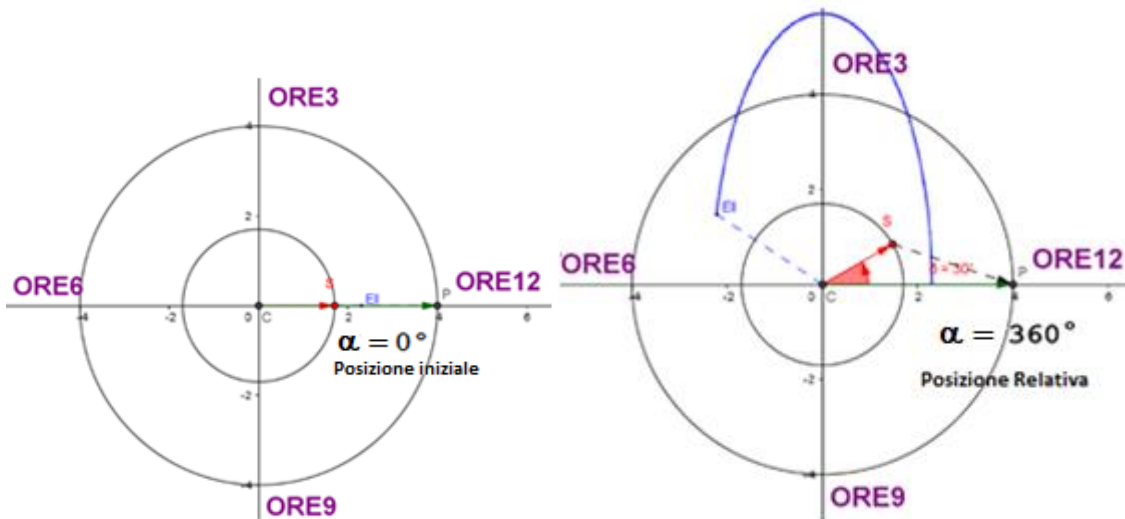


L'OROLOGIO DI TYCHO BRAHE E LE LEGGI DI KEPLERO

Se Tycho Brahe avesse avuto sul comodino una sveglia anziché una clessidra.....



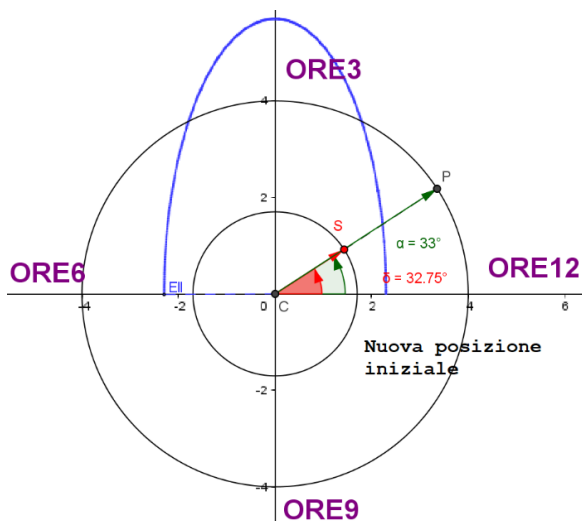
Può lo studio del moto di un orologio rappresentare il moto dei pianeti?

PRIMA PARTE: DESCRIZIONE DELL'APPLET

In un orologio che per comodità facciamo girare in senso antiorario, indichiamo l'estremità delle lancette: con S quella corta (r) delle ORE (rossa) e con P quella più lunga (R) dei MINUTI (verde), possiamo notare che quando esse sono in linea la loro distanza è una volta minima, come nella prima figura a ore 12, (come fosse un Perielio) e un'altra massima a ore 6 (come fosse un Afelio) e tutte le altre distanze intermedie saranno comprese tra questi due valori.

CLIK QUI

per vedere l'Applet che mostra il grafico e lo sviluppo di una equazione, come indicata nell'applet stesso in "Valore del Punto Ell", e spiegata più avanti.



a) Se nell'orologio facciamo partire le lancette dalla posizione ORE 12 (prima figura) in cui la distanza tra S e P è minima, ad ogni giro della lancetta lunga R (verde) pari a 360° la corta r (rossa) avanzerà di 30° con un rapporto $V=360^\circ/30^\circ=12$, come nella seconda figura. Quindi, quando il punto P ha percorso 360° (1h) il punto S ne ha percorsi 30° (1h) e la loro distanza (seconda figura) è quella tratteggiata; ma il punto P non è ancora alla distanza minima da S, perché anche S si è spostato.

Pertanto per poter arrivare nuovamente alla distanza minima da S

cioè alla posizione iniziale di partenza, dovrà ancora percorrere 30° gradi; ma mentre P si muove per percorrere i 30° contemporaneamente il punto S continuerà a muoversi di un angolo $C^\circ=30^\circ/12=2,5^\circ$ gradi come in Achille e la tartaruga.

b) La situazione a questo punto (terza figura) è:

- S e P sono in linea (nuova distanza minima);
- P avrà infine percorsi $360^\circ+30^\circ+C^\circ=360^\circ+30^\circ+2,5^\circ=392,5^\circ$ (arrotondato a 393° in applet).

Si tenga presente che l'applet dà la possibilità mediante le sue variabili, varie ipotesi grafiche: una importante di queste è la (V), che rapporta le velocità angolari delle lancette e per $V=12$ dà l'orologio come presentato, mentre per $V=0$ considera il punto S fermo sull'ascissa.

c) L'angolo compreso tra le lancette R e r vediamo essere dato dalla differenza degli angoli $\alpha-\delta= E$ (dove nell'applet per $V=0$ è $\delta=0$ e S fisso): comunque, per qualunque valore del parametro V, la formula (Carnot) che fornisce tutti i valori delle distanze tra P e S, compresi di un minimo (P_e) ed un massimo (A_f) è:

$$*** \quad SP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos E} \quad ***$$

d) Pertanto, se noi avessimo presentato in una "Tabella" tutti i valori delle distanze SP con P e S come punti massa di Marte e Sole, si sarebbero presentati proprio come la «Tavola» compilata da Tycho Brahe, con le distanze tra Sole e Marte, lasciata in eredità a Keplero.

Infatti posto il punto P con raggio $R=227,9$ (Circonferenza) e l'altro punto S (fisso per $\delta=0$ quindi $\alpha=E$) con valore $r= 21,2$ da O, avremmo ottenuto la seguente tabella:

Tabella delle distanze SP=Marte-Sole in funzione di E			
E°	SP^2	SP	
0°	42.724,89	206,7	Perielio (R-r)
$35,3^\circ$	44.501,545	210,953	
$105,15^\circ$	54.913,235	234,335	
$123,27^\circ$	57.668,806	240,184	
180°	62.050,81	249,1	Afelio (R+r)
270°	52.387,85	228,883	

E' dai valori delle misurazioni della "Tavola" di Tycho Brahe, identici a quelli indicati, che Keplero dedusse e formulò la sua ipotesi supponendo che il punto P=(Marte) si muovesse secondo una curva ellittica ed il punto S=(Sole) doveva essere fisso nel suo punto fuoco. Non aveva altra scelta!

In modo analogo si sarebbe potuto ottenere i valori delle distanze di qualunque altro Pianeta dal Sole.

SECONDA PARTE: ANALISI DELLA FORMULA $SP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos E}$

e) Nel caso in esame, avendo la distanza di P da S e cercando l'effettivo moto di P rispetto ad S, non abbiamo bisogno di ipotizzare una Ellisse come Keplero: **l'abbiamo! è SP.**

Infatti l'equazione SP essa stessa rappresenta una ellisse, come sappiamo dal "[Teorema dei Pianeti](#)", di cui l'enunciato: «Data una circonferenza, ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza sono vettori di ellisse, la traiettoria una ellisse e il punto fisso il suo centro.».

Che in formule vuol dire, con un semplice sviluppo:

$$SP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos E} = \sqrt{(R-r)^2 \cos^2 E/2 + (R+r)^2 \sin^2 E/2}$$

l'ultima espressione è l'equazione di una ellisse, con (R+r) distanza massima e semi asse maggiore e con (R-r) distanza minima e semi asse minore, che indicate con A_f e P_e danno:

$$\begin{cases} A_f = R + r \\ P_e = R - r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2R = A_f + P_e \\ 2r = A_f - P_e \end{cases}$$

$$SP = \sqrt{P_e^2 \cos^2 E/2 + A_f^2 \sin^2 E/2} = \sqrt{1/2[P_e^2(1 + \cos E) + A_f^2(1 - \cos E)]}$$

$$\frac{y}{x} = \tan \beta = \frac{A_f}{P_e} \tan E/2$$

dove (beta) è l'angolo al centro dell'ellisse.

L'ellisse indicata dal Teorema dei Pianeti «**non è visibile**» come moto del punto massa P, ma essendo le sue distanze dal punto massa S raggi di ellisse, posso affermare che il moto di P (circolare rispetto al suo centro di riferimento O) si comporta rispetto a S effettivamente come un moto ellittico, che noi abbiamo tracciato in blu nell'Applet con suo centro C coincidente con O del nostro riferimento. Il punto C rappresenta il punto S, secondo il dettame del Teorema, ed è posto in O del nostro riferimento per comodità visiva.

(L'ellisse poteva essere tracciata in qualunque altra parte essendo solo una rappresentazione del moto di P rispetto ad S).

Dall'analisi di tale Teorema il punto-fisso S e la circonferenza sono considerati complanari (per la dimostrazione di questo teorema nello **SPAZIO** vedi (www.Geometriaparametrica.it Equazione di Vag nello Spazio Indice Cap III Pag14)).

La nostra complanarità è una esemplificazione discorsiva.

f) Il "Teorema dei Pianeti" citato con le sue prerogative dimostra:

1. Corrispondenza biunivoca tra circonferenza ed ellisse.
2. Velocità Angolare doppia della circonferenza rispetto alla velocità angolare sull'ellisse.
3. Velocità Areale (doppia sulla circonferenza che sull'ellisse)
4. Nell'ellisse Aree uguali in tempi uguali.
5. Perimetri uguali tra circonferenza e relativo ellisse:
 $2R\pi = (A_f + P_e)\pi$ ma, attenzione, gli archi non sono uguali nei valori intermedi. Infatti gli archi di settore minore dei quarti di ellisse non sono uguali tra loro.

Grande importanza riveste il punto 1. perché risolve l'esempio empirico:

«Se prendo un anello (di metallo ad esempio) e lo stringo su due poli, l'anello si allarga assumendo la forma di una ellisse e più stringo più si allarga. Notiamo che l'area originale della circonferenza tende a zero se continuiamo a stringere, mentre il suo perimetro rimane sempre uguale a quello dell'anello iniziale».

Questa identità perimetrica e i valori degli archi sono in www.geometriaparametrica.it Cap.VII "Area e Perimetro Ellisse"

g) Nella nostra applet è tracciata una ellisse che rappresenta l'effettivo comportamento del punto P rispetto al punto S (pur ruotando P come punto di circonferenza di centro C), per cui i valori dei suoi semiassi A_f e P_e non possono risultare mai in linea, come invece vediamo sulla circonferenza: ciò è dovuto al principio fondamentale della Velocità Areale, doppia sulla circonferenza rispetto a quella dell'Ellisse, com'è indicata chiaramente dall'analisi e che solo la nostra ellisse mette in evidenza nell'applet.

TERZA PARTE: COMPARAZIONE

h) Supposti gli estremi P e S punti massa e le lancette la loro distanza dal Centro di Massa, vediamo che essi interagiscono tra loro secondo una distanza ellittica su un piano di riferimento che è quello in cui i vari punti massa si trovano. Nell'applet abbiamo tracciato l'ellisse nello stesso piano del moto delle lancette e posto, per comodità visiva, il suo centro nel punto C , centro dell'orologio e punto del riferimento cartesiano, quindi $S \equiv C$.

Ed è giusto che l'ellisse non sia **posizionale**, perchè Newton, considera le **interazioni** delle masse tra loro e non la loro posizione rispetto ad un qualunque riferimento. Conoscere le distanze di due Masse e studiarle, non ci dice qual è la loro posizione nello spazio. Tuttavia anche Newton nelle sue formulazioni conclude con una conica (ellisse) che noi otteniamo, non secondo una ipotesi ma traendola direttamente dal valore SP come indicato in e).

i) LA TRAIETTORIA CIRCOLARE. Il "Teorema dei Pianeti" definito in e), nel suo enunciato, non indica la traiettoria circolare; questo perché nel caso è implicita: un uomo fermo all'equatore gira secondo una circonferenza e quindi rispetto ad un qualunque punto fermo dello spazio secondo una traiettoria ellittica, ma rispetto ad un qualunque punto della perpendicolare al centro dell'equatore, come ad esempio un Polo, gira secondo una distanza costante ed uguale alla distanza tra l'uomo e il Polo, come fosse una circonferenza, in analogia a quanto visto per l'ellisse.

CONCLUSIONE

Se mediante lo studio di un orologio abbiamo potuto ricavare un esempio che mi permette di ottenere quei valori che normalmente si ottengono mediante la diversa considerazione di Keplero possiamo allora affermare:

"I Pianeti ruotano secondo proprie Orbite Circolari e tutti, uno rispetto all'altro, secondo traiettorie Ellittiche"

Quindi la Luna (un Pianeta) che giri secondo una circonferenza avrà una traiettoria ellittica rispetto alla Terra, ma anche rispetto al Sole e così tutti i Pianeti!

Una legge Universale per tutti i corpi celesti.

#####

APPLICAZIONI

Le leggi e i principi di Newton non essendo stati toccati, perché si rifanno alla interazione delle Masse, il cui moto è proprio una ellisse di riferimento come da noi indicata, data non da una ipotesi ma ricavata da considerazioni prettamente matematiche, rimangono inalterati, cambiando soltanto i valori delle variabili secondo quanto indicato di seguito.

1) E' importante vedere che il valore dell'angolo E della circonferenza fornisce la velocità angolare $\frac{dE}{dt} = \omega$ sulla circonferenza, doppia della velocità angolare sull'ellisse

$$\frac{dE/2}{dt} = \omega'; \quad \frac{dE}{dt} = 2\omega'; \quad \omega' = \frac{\omega}{2}$$

il che giustifica il punto f) **3.** sulla Velocità Areale.

2) LA TERZA LEGGE. La terza legge di Keplero si sviluppa:

$$\frac{2\pi R}{T} = V = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2} = \text{costante}; \quad \text{con } R = \frac{A_f + P_e}{2}$$

per Keplero R è il raggio del cerchio circoscritto all'ellisse; nel nostro caso per il "Teorema dei Pianeti" è raggio della circonferenza di uguale perimetro dell'ellisse:

$$\begin{cases} A_f = R + r \\ P_e = R - r \end{cases} \quad \text{vedi punto e)} \quad R = \frac{A_f (\text{Asse Maggiore}) + P_e (\text{Asse Minore})}{2}$$

$$\text{e la sua Velocità Media } V = \sqrt{\frac{2GM}{(A_f + P_e)}}$$

3) VELOCITA' ORBITALE. Anche la velocità Orbitale di un pianeta, intesa come moto di un pianeta rispetto ad un altro sarà:

$$V = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad r = \text{distanza delle masse}; \quad a = \text{Asse Maggiore Ellisse}$$

e poiché per noi la distanza delle masse è CELL=SP (vedi formula ***) ed essendo $a = \text{asse maggiore ellisse} = A_f$ avremo:

$$V = \sqrt{GM \left(\frac{2}{SP} - \frac{1}{A_f} \right)}$$

4) La stessa espressione vista $SP = \sqrt{P_e^2 \cos^2 E/2 + A_f^2 \sin^2 E/2}$ sviluppata in coseno dà

$$SP = \sqrt{P_e^2 \cos^2 E/2 + A_f^2 - A_f^2 \cos^2 E/2} = A_f \sqrt{1 - e^2 \cos^2 E/2}$$

dove l'ultimo membro integrato è l'**Integrale ellittico di Seconda Specie**, integrale che rappresenta archi di ellisse.

5) Il perimetro di ogni pianeta sarà: $2R\pi = (A_f + P_e)\pi$

Dimostrato, non con una ipotesi, ma matematicamente la "Prima Legge del Moto dei Pianeti" «**I Pianeti ruotano secondo proprie Orbite Circolari e tutti, uno rispetto all'altro secondo Orbite Ellittiche**» diamo degli ESEMPI in analogia alla tabella vista per Marte-Sole di Tycho Brahe, mediante i valori calcolati su:

$$SP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos E} = \sqrt{(R-r)^2 \cos^2 E/2 + (R+r)^2 \sin^2 E/2} = \sqrt{P_e^2 \cos^2 E/2 + A_f^2 \sin^2 E/2}$$

tali valori vogliono solo dimostrare la validità della nuova Legge e non tiene in considerazione l'inclinazione dell'orbita sulla eclittica, né di altri parametri la cui applicazione e studio è lasciato agli Astronomi.

ESEMPIO I°: Terra-Sole (da Wikipedia-David Williams)

$$\text{Massa}_{\text{Terra}} = 5,9726^{24} \quad \text{Massa}_{\text{Sole}} = \mathbf{M} = 1,989^{30}$$

$$\mathbf{G} \times \mathbf{M} = 6,670^{-8} \times 1,989^{30} = 1,326663^{23}$$

$$\text{PERIELIO} = \mathbf{P}_e = 147098074 \text{ Km} \quad \text{AFELIO} = \mathbf{A}_f = 152097701 \text{ Km}$$

Raggio delle Circonferenze corrispondente:

$$R = \frac{A_f + P_e}{2} = \frac{152097701 + 147098074}{2} = 149597887,5 \text{ Km}$$

$$r = \frac{A_f - P_e}{2} = \frac{152097701 - 147098074}{2} = 2499813,5 \text{ Km}$$

$$\mathbf{T} = \text{Periodo} = 365,256366 \text{ gg} = 31558150,02 \text{ sec}$$

Tabella delle distanze SP=Terra-Sole in funzione di				
$SP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos E} = \sqrt{P_e^2 \cos^2 E/2 + A_f^2 \sin^2 E/2}$				
E°	$E^\circ/2$	SP^2	SP	
0°	0°	2,163784337 ¹⁶	147,098074	Perielio (R-r)
35,3°	17,65°	2,177536025 ¹⁶	147,564766	
90°	45°	2,238577701 ¹⁶	149,618772	
105,15°	52,572°	2,258124718 ¹⁶	150,270579	

123,27°	61,635°	2,279608227 ¹⁶	150,983715	
180°	90°	2,313371065 ¹⁶	152,097701	Afelio (R+r)
270°	135°	2,238577701 ¹⁶	149,618772	
360°	180°	2,163784337 ¹⁶	147,098074	Perielio (R-r)

*****TERZA LEGGE DI KEPLERO

$$V_1 = \frac{2\pi R}{T} = \frac{939.951.247,7}{31558150,02} = 29,78473859 \text{ Km/sec (VOM)}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{1,326663^{23}}{149597887,5}} = \sqrt{8,868193409^{14}} = 29,779512 \text{ Km/sec}$$

$$V_1 \cong V_2$$

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{149597887^3}{31558150,02^2} = \frac{3,34793007^{24}}{9,959168327^{14}} = 3.361.656.275,0$$

$$\frac{GM}{4\pi^2} = \frac{1,326663^{23}}{39,4784176} = 3,360476637^{21} \quad \text{Costante K}$$

$$\frac{R^3}{T^2} \cong \frac{GM}{4\pi^2} = K$$

*****PERIMETRO ORBITALE

$$2\pi R = (A_f + P_e)\pi = 939.951.247,7$$

*****VELOCITA' (max/min)

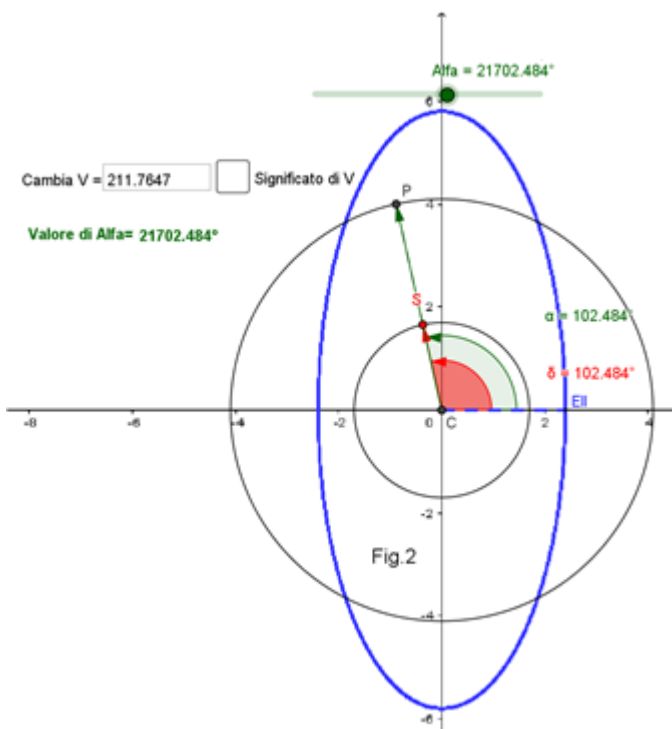
$$V_{A_f} = \sqrt{GM \frac{1}{A_f}} = \sqrt{\frac{1,326663^{23}}{152097701}} = \sqrt{8,722439532^{14}} = 29,533776 \text{ Km/sec}$$

$$V_{P_e \text{ Circ.}} = \sqrt{GM \frac{1}{P_e}} = \sqrt{1,326663^{23} \cdot 6,798185543^{-9}} = \sqrt{9,018901226^{14}} = 30,031485 \text{ Km/sec}$$

$$V_{media} = \frac{V_{P_e} + V_{A_f}}{2} = \frac{30,031485 + 29,533776}{2} = 29,7826305$$

$$V_1 \cong V_{media}$$

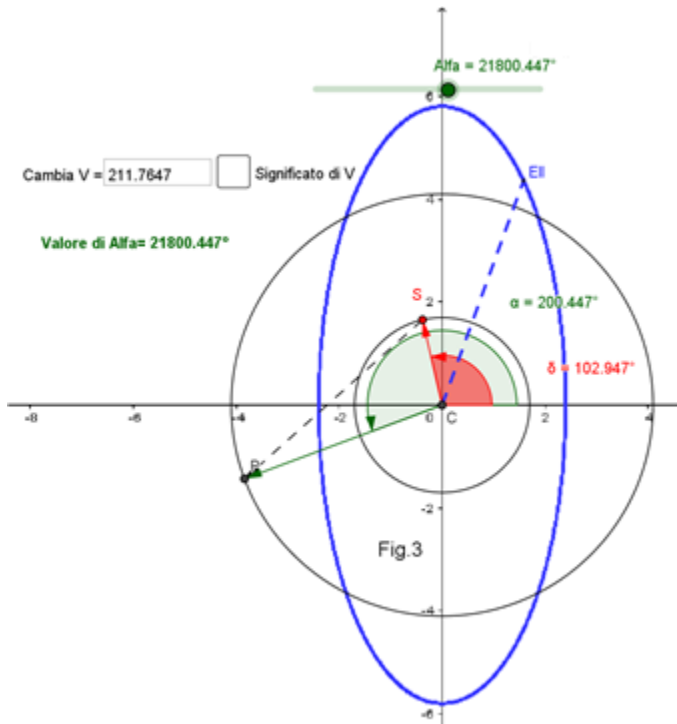
La Velocità Orbitale è la stessa data dalla formula (VOM) vista sopra, in quanto il perimetro della Circonferenza di raggio R e il perimetro dell'Ellisse **sono uguali**, come anche i quadranti, ma non sono uguali i loro valori intermedi.



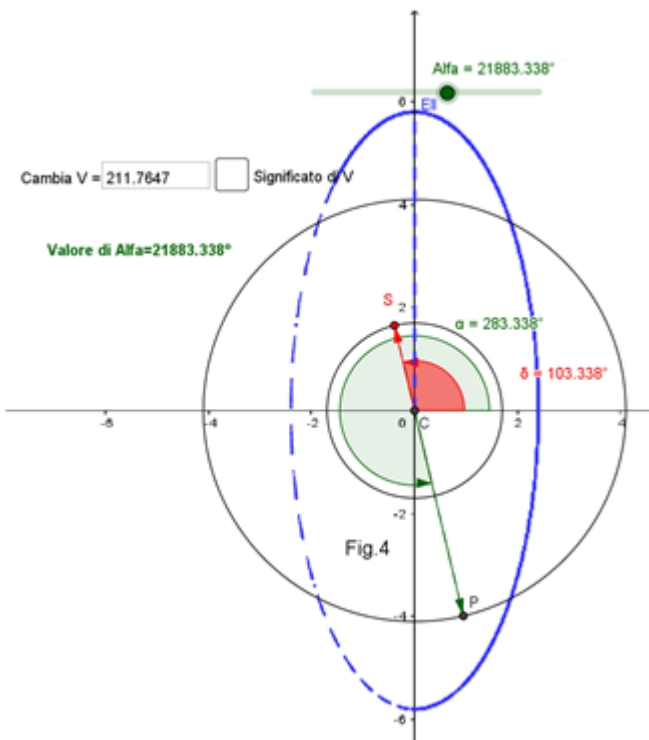
B) Per avere la Longitude of perihelion di 102,947 indicata, il valore di **Alfa** raggiungerebbe valori molto alti impedendo una gestione idonea di Geogebra, questo avviene perchè la velocità sulla circonferenza è doppia di quella dell'ellisse, come la loro velocità angolare; per avere una visione grafica comprensibile e matematica, poniamo nell'Applet $V=V:100=215,437$, come in **Fig.2** con valori esatti ma con i decimali spostati.

Manovrando lo slider nell'Applet con il mouse, avvicinando $Alfa \approx 21550$ e

avanzando poi con +/- otteniamo il grafico, in cui è $Alfa=21702,484^\circ$ e $\delta=LongPerielio=102,484^\circ$ il totale dei gradi dal primo Longitude Perielio di partenza (anno 1; $Alfa=0^\circ$; come Fig.1 ma ora con $V:100$) ed otteniamo anche il valore di $\alpha=102,484$ (Fig.2) che dà la differenza $\alpha-\beta=E=0^\circ$ con cui possiamo calcolare la distanza $EllC=SP=Perielio=(R-r)=149597887,5-2499813,5=147098074$



C) Incrementando ancora Alfa, la Longitudine del perielio di valore 102,947 fornita dal Mr.Williams la otteniamo nella **Fig.3** ma non dà il valore del Perielio; infatti $E = \alpha - \beta = 200,447^\circ - 102,947^\circ = 97,5^\circ \neq 0^\circ$, valore di E che, applicata alla formula data, ha distanza $E11C = SP = 149,9446632$



D) Continuando a incrementare Alfa e α , quando il punto P è in opposizione a S si avrà **Fig.4**: $(\alpha - \delta) = 283,338^\circ - 103,338^\circ = 180^\circ$ il valore dell': **Afelio**= $E11C = SP = (R+r) = 152,097701$

=====

ESEMPIO III°: LUNA-SOLE

Le considerazioni che seguono sono l'applicazione del "Teorema dei Pianeti".

Dati LUNA (da Wikipedia-David Williams):

PERIELIO LUNA = $LP_e = 0,3633^6$

AFELIO LUNA = $LA_f = 0,4055^6$

PERIODO Anomalistico=27,3217 gg=2,360594⁶ sec

$$\text{Raggio Luna} = R_L = \frac{LA_f - LP_e}{2} = 0,3844^6 \text{ Km}$$

Dati SOLE-LUNA

Distanza Sole – CentroOrbitaLuna = $R_{SL} = 149,6^6 \text{ Km}$ (valore da letteratura)

Periodo Rivoluzione Luna-Sole= $T_{SL}=31558150,2 \text{ sec}$ = Periodo rivoluzione Terra

$A_f = R_{SL} + R_L = 149.984.400 \text{ K}$ (rispetto al Sole)

$P_e = R_{SL} - R_L = 149.215.600 \text{ K}$ (rispetto al Sole)

Tabella delle distanze SP=Sole-Luna in funzione di				
$SP = \sqrt{R_{SL}^2 + R_L^2 + 2R_{SL}R_L \cos E} = \sqrt{A_f^2 \cos^2 E/2 + P_e^2 \sin^2 E/2}$				
E°	$E^\circ/2$	SL^2	SL	
0°	0°	2,249532024 ¹⁶	149.984.400	Afelio ($R_{SL}+R_L$)
35,3°	17,65°	2,247417377 ¹⁶	149.913.887,9	
90°	45°	2,238030776 ¹⁶	149.600.493,9	
105,15°	52,575°	2,23502496 ¹⁶	149.499.998,7	
123,27°	61,635°	2,2231721363 ¹⁶	149.389.469,6	
180°	90°	2,226529528 ¹⁶	149.215.600	Perielio ($R_{SL}-R_L$)
270°	135°	2,238030776 ¹⁶	149.600.493,9	
360°	180°	2,249532024 ¹⁶	149.984.400	Afelio ($R_{SL}+R_L$)

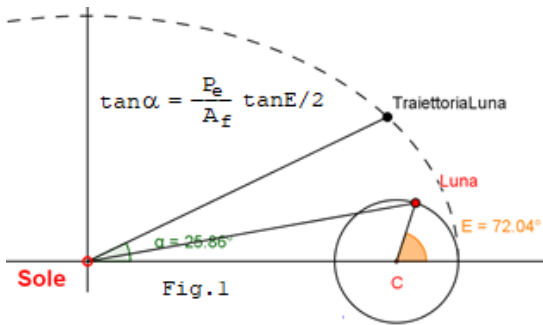
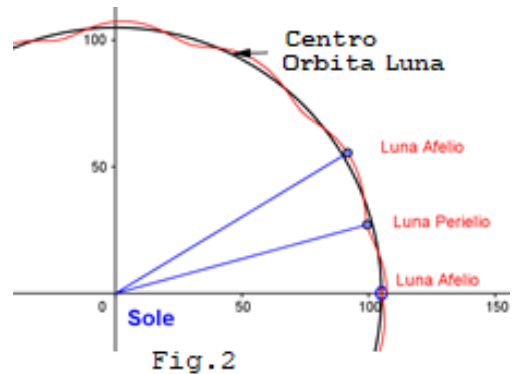


Fig.1
La Velocità Areale della Luna è doppia di quella del Sole
Per $E=180^\circ=360^\circ$ avremo $\alpha=90^\circ=180^\circ$
Aree Uguali del Sole sono percorse in tempi uguali



Per Applet Fig.1 [CLIK QUI](#) L'applet Fig.1 è l'applicazione del "Teorema dei Pianeti" che mi permette di calcolare l'Afelio e il Perielio e i valori intermedi dell'orbita effettiva della Luna, come riportata in Fig.2.

*****PERIMETRO ORBITALE Luna-Sole

$$2\pi R_{SL} = 2\pi 149,6^6 = 939.964.522$$

*****TERZA LEGGE DI KEPLERO

$$V_1 \frac{2\pi R_{SL}}{T_{SL}} = \frac{2\pi 149,6^6}{31558150,2} = \frac{939.964.522}{31558150,2} = 29,78515919$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_{SL}}} = \sqrt{\frac{1,326663^{23}}{149,6^6}} = \sqrt{8,868068182^{14}} = 29.779.301,84$$

$$\frac{R_{SL}^3}{T_{SL}^2} = \frac{149.600.000^3}{31558150,02^2} = \frac{3,348071936^{24}}{9,959168327^{14}} = 3.361.798.723,00$$

*****VELOCITA' (max/min) Luna-Sole

$$V_{A_f} = \sqrt{GM \frac{1}{A_f}} = \sqrt{\frac{1,326663^{23}}{149.984.400}} = \sqrt{8,845339915^{14}} = 29,741.116,18 \text{ Km/sec}$$

$$V_{P_e} = \sqrt{GM \frac{1}{P_e}} = \sqrt{\frac{1,326663^{23}}{149.215.400}} = \sqrt{8,890925467^{14}} = 29,817.654,95 \text{ Km/sec}$$

$$V_{media} = \frac{V_{P_e} + V_{A_f}}{2} = \frac{29.817.654,95 + 29.741.116,18}{2} = 29.779.385,57$$

M.Vaglieco