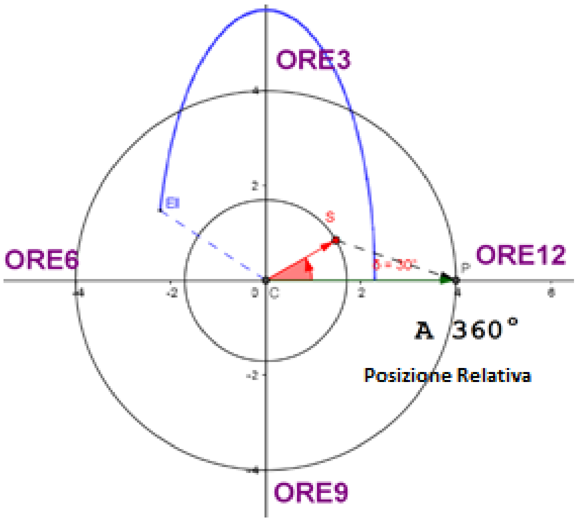
L'OROLOGIO DI TYCHO BRAHE E LE LEGGI DI KEPLERO

Se Tycho Brahe avesse avuto sul comodino una sveglia anziché una clessidra………………

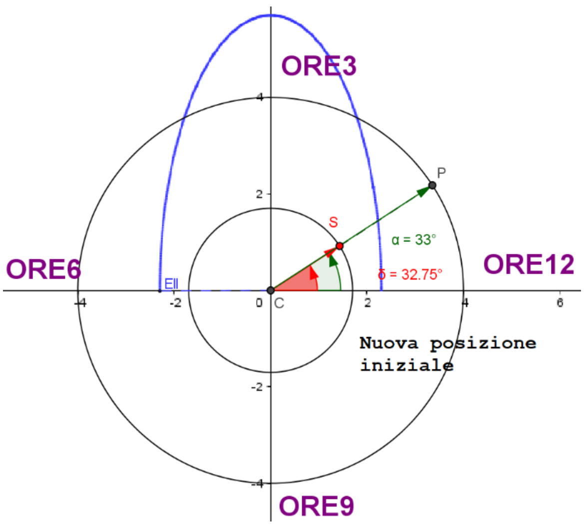




Può lo studio del moto di un orologio rappresentare il moto dei pianeti?

**PRIMA PARTE: DESCRIZIONE DELL'APPLET**

In un orologio che per comodità facciamo girare in senso antiorario, indichiamo l'*estremità delle lancette*: con S quella corta (r) delle ORE (rossa) e con P quella più lunga (R) dei MINUTI (verde), possiamo notare che quando esse sono in linea la loro distanza è una volta minima, come nella prima figura a ore 12, (come fosse un Perielio) e un'altra massima a ore 6 (come fosse un Afelio) e tutte le altre distanze intermedie saranno comprese tra questi due valori.

CLICCA QUI [http://www.geometriaparametrica.it/geogebra?file=t10%20orologio%20di%20tycho%20brahe] per vedere l'Applet che mostra il grafico e lo sviluppo di una equazione, come indicata nell'applet stesso in "Valore del Punto Ell", e spiegata più avanti.




a) Se nell'orologio facciamo partire le lancette dalla posizione ORE 12 (prima figura) in cui la distanza tra S e P è minima, ad ogni giro della lancetta lunga R (verde) pari a 360° la corta r (rossa) avanzerà di 30° con un rapporto V=360°/30°=12, come nella seconda figura. Quindi, quando il punto P ha percorso 360°(1h) il punto S ne ha percorsi 30°(1h) e la loro distanza (seconda figura) è quella tratteggiata; ma il punto P non è ancora alla distanza minima da S, perché anche S si è spostato.

Pertanto per poter arrivare nuovamente alla distanza minima da S cioè alla posizione iniziale di partenza, dovrà ancora percorrere 30° gradi; ma mentre P si muove per percorrere i 30° contemporaneamente il punto S continuerà a muoversi di C°=30°/12=2,5° gradi come in Achille e la tartaruga.

b) La situazione a questo punto (terza figura) è:
- S e P sono in linea (nuova distanza minima);
- P avrà infine percorsi 360°+30°+C°=360°+30°+2,5°=392,5° (arrotondato a 393° in applet).

Si tenga presente che l'applet dà la possibilità mediante le sue variabili varie ipotesi grafiche: una importante di queste è la (V), che rapporta le velocità angolari delle lancette e per V=12 dà l'orologio coma presentato, mentre per V=0 considera il punto S fermo sull'ascissa.

c) L'angolo compreso tra le lancette R e r vediamo essere dato dalla differenza degli angoli **α-δ= E (dove nell'applet per V=0 è δ=0):** comunque, per qualunque valore del parametro **V**, la formula(Carnot) che fornisce tutti i valori delle distanze tra P e S, compresivi di un minimo ($P_e$) ed un massimo ($A_f$) è:

$$*** \qquad SP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos E} \qquad ***$$

d) Pertanto, se noi avessimo presentato in una "Tabella" tutti i valori delle distanze SP con le distanze P e S come punti massa di Marte e Sole, si sarebbero presentati proprio come la «Tavola» compilata da Tycho Brahe, con le distanze tra Sole e Marte, lasciata in eredità a Keplero.
Infatti posto il punto P con raggio R=227,9 (Circonferenza) e l'altro punto S (fisso) con valore r= 21,2 da **C e δ=0**, avremmo ottenuto la seguente tabella:

| Tabella delle distanze SP=Marte-Sole in funzione di E=α | | | |
|---|---|---|---|
| E° | $SP^2$ | SP | |
| 0° | 42.724,89 | 206,7 | Perielio (R-r) |
| 35,3° | 44.501,545 | 210,953 | |
| 105,15° | 54.913,235 | 234,335 | |
| 180° | 62.050,81 | 249,1 | Afelio (R+r) |
| 123,27° | 57.668,806 | 240,184 | |
| 270° | 52.385,85 | 228,883 | |

E' dai valori delle misurazioni della "Tavola" di Tycho Brahe, che Keplero dedusse e formulò la sua ipotesi supponendo che il punto P=(Marte) si muovesse secondo una curva ellittica ed il punto S=(Sole) doveva essere fisso nel suo punto fuoco.
Non aveva altra scelta!

**SECONDA PARTE: ANALISI DELLA FORMULA** $SP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos E}$

e) Nel caso in esame, avendo la distanza di P da S e cercando *l'effettivo moto* di P rispetto ad S, non abbiamo bisogno di ipotizzare una Ellisse come Keplero: **l'abbiamo! è SP**.

Infatti l'equazione SP *essa stessa rappresenta una ellisse*, come sappiamo dal "Teorema dei Pianeti", di cui l'enunciato:
*«Data una circonferenza, ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza sono vettori di ellisse, la traiettoria una ellisse e il punto fisso il suo centro.»*.
Che in formule vuol dire, con un semplice sviluppo:

$$\boldsymbol{SP = \sqrt{R^2 + r^2 - 2RrcosE} = \sqrt{(R-r)^2 \cos^2 E/2 + (R+r)^2 \sin^2 E/2}}$$

dove l'ultima espressione è l'equazione di una ellisse, con (R+r) distanza massima e semi asse maggiore e con (R-r) distanza minima e semi asse minore, che indicate con $A_f$ e $P_e$ danno:

$$SP = \sqrt{P_e^2 cos^2 E/2 + A_f^2 \sin^2 E/2} = \sqrt{1/2[P_e^2(1+\cos E) + A_f^2(1-\cos E)]}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\beta = \frac{A_f}{P_e}\tan E/2$$

dove (beta) è l'angolo al centro dell'ellisse.

**L'ellisse** indicata dal Teorema non è «visibile» come moto del punto massa P, ma essendo le sue distanze dal punto massa S raggi di ellisse, posso affermare che il moto di P (circolare rispetto al suo centro di riferimento C) si comporta rispetto a S effettivamente come un moto ellittico, indicato dalla distanza SP e tracciato in blu nell'Applet.

Dall'analisi di tale Teorema il punto-fisso S e la circonferenza sono considerati complanari (per la dimostrazione di questo teorema nello **SPAZIO** vedi (www.Geometriaparametrica.it Equazione di Vag nello Spazio Indice Cap III Pag14).
La nostra complanarità è una esemplificazione discorsiva.

f) Il Teorema citato con le sue prerogative dimostra:
1. Corrispondenza biunivoca tra circonferenza ed ellisse.
2. Velocità Angolare doppia della circonferenza rispetto alla velocita angolare sull'ellisse.
3. Velocità Areale (doppia sulla circonferenza che sull'ellisse)
4. Nell'ellisse Aree uguali in tempi uguali.
5. Perimetri uguali tra circonferenza e relativo ellisse: $2R\pi = (A_f+P_e)\pi$ ma, attenzione, gli archi non sono uguali nei valori intermedi. Infatti gli archi di settore minore dei quarti di ellisse non sono uguali tra loro.

Grande importanza riveste il punto 1. perché risolve l'esempio empirico:
*«Se prendo un anello (di metallo ad esempio) e lo stringo su due poli, l'anello si allarga assumendo la forma di una ellisse e più stringo più si allarga. Notiamo che l'area originale della*

*circonferenza tende a zero se continuiamo a stringere, mentre il suo perimetro rimane sempre uguale a quello dell'anello iniziale».*

Questa identità perimetrica e i valori degli archi sono in «www.geometriaparametrica.it Cap.VII "Area e Perimetro Ellisse"»

g) Mediante le formule sopra, ottenute dai valori delle distanze SP, nella nostra applet è tracciata una ellisse di raggio C-Ell=SP, ellisse di riferimento di raggi uguali alle distanze dei punti S, P e ricavata, come visto, dalla stessa formula.
*Tale ellisse rappresenta l'effettivo comportamento del punto P rispetto al punto S (pur ruotando P come punto di circonferenza di centro C)*, per cui i valori dei suoi semiassi $A_f$ e $P_e$ non possono risultare mai in linea, come invece vediamo sulla circonferenza: ciò è dovuto al principio fondamentale della Velocità Areale, doppia sulla circonferenza rispetto a quella dell'Ellisse, com'è indicata chiaramente dall'analisi e che solo la nostra ellisse mette in evidenza nell'applet.

**TERZA PARTE: COMPARAZIONE**

h) Supposti gli estremi P e S punti massa e le lancette la loro distanza dal Centro di Massa, vediamo che essi interagiscono tra loro secondo una distanza ellittica su un piano di riferimento che è quello in cui i vari punti massa si trovano.
Nell'applet abbiamo tracciato l'ellisse nello stesso piano del moto delle lancette e posto, per comodità visiva, il suo centro nel punto C, centro dell'orologio e punto del riferimento cartesiano, quindi S≡C.

Ed è giusto che l'ellisse non sia **posizionale**, perchè Newton, considera le ***interazioni*** delle masse tra loro e non la loro posizione rispetto ad un qualunque riferimento. Conoscere le distanze di due Masse e studiarle, non ci dice qual è la loro posizione nello spazio. Tuttavia anche *Newton nelle sue formulazioni conclude con una conica (ellisse) che noi otteniamo, non secondo una ipotesi ma traendola direttamente dal valore SP come indicato in* e).

i) LA TRAIETTORIA CIRCOLARE. Il "Teorema dei Pianeti" definito in e), nel suo enunciato, non indica la traiettoria circolare; questo perché nel caso è implicita: un uomo fermo all'equatore gira secondo una circonferenza e quindi rispetto ad un qualunque punto fermo dello spazio secondo una traiettoria ellittica, ma rispetto ad un qualunque punto della perpendicolare al centro dell'equatore, come ad esempio un Polo, gira secondo una distanza costante ed uguale alla distanza tra l'uomo e il Polo, come fosse una circonferenza, in analogia a quanto visto per l'ellisse.

**CONCLUSIONE**

l) Se mediante lo studio di un orologio abbiamo potuto ricavare un esempio che mi permette di ottenere quei valori che normalmente si

ottengono mediante la diversa considerazione di Keplero possiamo allora concludere:
"I Pianeti ruotano secondo proprie Orbite Circolari e tutti, uno rispetto all'altro, secondo traiettorie Ellittiche"
Quindi la Luna (un Pianeta) che giri secondo una circonferenza avrà una traiettoria ellittica rispetto alla Terra, ma anche rispetto al Sole e così tutti i Pianeti!
Una legge Universale per tutti i corpi celesti.

#################################################################
**APPLICAZIONI**
Le leggi e i principi di Newton non essendo stati toccati, perché si rifanno alla interazione delle Masse, il cui moto è proprio una ellisse di riferimento come da noi indicata, data non da una ipotesi ma ricavata da considerazioni prettamente matematiche, rimangono inalterati.

**1)** E' importante vedere che il valore dell'angolo E della circonferenza fornisce la velocità angolare $\frac{dE}{dt} = \omega$ sulla circonferenza, doppia della velocità angolare sull'ellisse

$$\frac{dE/2}{dt} = \omega'; \quad \frac{dE}{dt} = 2\omega'; \quad \omega' = \frac{\omega}{2}$$

il che giustifica il punto f) **3.** sulla Velocità Areale.

**2)** LA TERZA LEGGE. La terza legge di Keplero si sviluppa:

$$\frac{2\pi R}{T} = V = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2} = costante; \quad con\ R = \frac{A_f + P_e}{2}$$

per Keplero R è il raggio del cerchio circoscritto all'ellisse; nel nostro caso per il "Teorema dei Pianeti" è raggio della circonferenza di uguale perimetro dell'ellisse:

$$\begin{cases} A_f = R + r \\ P_e = R - r \end{cases}$$ vedi punto e) $$R = \frac{A_f\,(Asse\ Maggiore) + P_e(Asse\ Minore)}{2}$$

e la sua Velocità Media $$V = \sqrt{\frac{2GM}{(A_f + P_e)}}$$

**3)** VELOCITA' ORBITALE. Anche la velocità Orbitale di un pianeta, intesa come moto di un pianeta rispetto ad un altro sarà:

$$V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \qquad r = distanza\ delle\ masse; \qquad a = Asse\ Maggiore\ Ellisse$$

e poiché per noi la distanza delle masse è CEll=SP (vedi formula ***) ed essendo $a = asse\ maggiore\ ellisse = A_f$ avremo:

$$V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{SP} - \frac{1}{A_f}\right)}$$

**4)** La stessa espressione vista $SP = \sqrt{P_e^2 cos^2 E/2 + A_f^2 \sin^2 E/2}$ sviluppata in coseno dà

$$SP = \sqrt{P_e^2 cos^2 E/2 + A_f^2 - A_f^2 cos^2 E/2} = A_f \sqrt{1 - e^2 cos^2 E/2}$$

dove l'ultimo membro integrato è l'**Integrale ellittico di Seconda Specie**, integrale che rappresenta archi di ellisse.

**5)** Il perimetro di ogni pianeta sarà: $R\pi = \frac{(A_f + P_e)}{2} \pi$

POSTA:max.vaglieco@tiscali.