

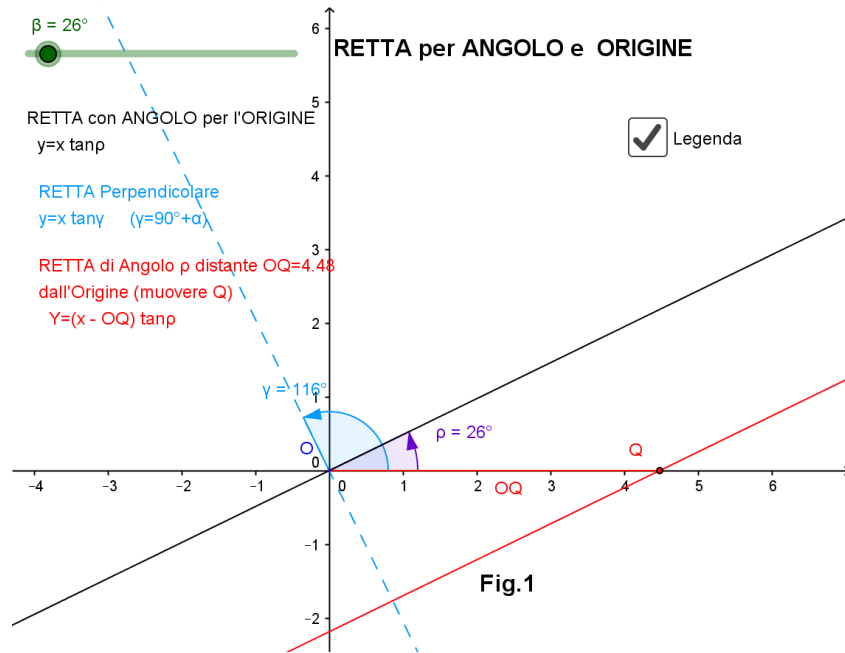
## **II. LA RETTA**

h

### LA RETTA

In un riferimento cartesiano ortogonale una qualunque retta si può orientare stabilendo la sua direzione e verso, secondo l'angolo che essa forma con il verso positivo dell'asse x, preso in senso antiorario.

RETTE PER L'ORIGINE.



Consideriamo una retta passante per l'Origine in un riferimento; sarà una ed una sola la retta di quel dato angolo  $\rho$  a passare per l' Origine. Tale retta di angolo  $\rho$ , che indicheremo con  $r(\rho)$ , passando per l'Origine del riferimento cartesiano, in realtà si presenta divisa in due semirette, ciascuna con angolo  $\rho$  e  $(180^\circ + \rho)$ . La retta dunque avrà verso e direzione sia  $(\rho)$  che opposta  $(180+\rho)$  e sarà il valore dell'angolo a specificare il suo verso e direzione. Data dunque una retta orientata per  $\rho$ , tutti i suoi punti saranno determinati, e un qualunque valore  $x$  dell'ascissa la determinerà poiché

$$y = x \tan \rho \quad \text{oppure} \quad y = x \tan(180 + \rho)$$

$$\begin{aligned} \text{da cui:} \quad & y \cos \rho = x \sin \rho \quad y \cos \rho - x \sin \rho = 0 \\ & y \cos(180 + \rho) = x \sin(180 + \rho) \quad y \cos(180 + \rho) - x \sin(180 + \rho) = 0 \end{aligned}$$

Un eventuale punto  $A(a,b)$  o  $B(c,d)$  avrà

$$b \cos \rho - a \sin \rho = d \cos \rho - c \sin \rho = 0$$

$$b \cos(180 + \rho) - a \sin(180 + \rho) = d \cos(180 + \rho) - c \sin(180 + \rho) = 0$$

RETTE NON PER L'ORIGINE

Tuttavia una retta con direzione e verso, non passante per l'Origine non e' posizionata nel riferimento cartesiano, nel senso che sono infinite le rette con tale direzione e verso, e tutte parallele tra loro. Ma se nel nostro riferimento conosciamo un punto di tale retta, allora, tale retta risulterà posizionata e sarà unica, nel riferimento, ad avere quella direzione, quel verso e quel Punto: essa e' dunque orientata ed uguale orientamento avrà ogni suo punto o segmento.

Nella Fig.3a e Fig.3b il punto A è quello che permette di fissare la retta r( $\rho$  nel riferimento cartesiano. In realtà i punti sono due: il punto A e il punto Q intersezione (tale punto esisterà sempre per qualunque retta non parallela alla ascissa, per impostazione stessa). A meno che non sia dato, il punto Q è ricavabile dal punto A stesso, come distanza OQ.

Infatti dato il punto A(a,b) appartenente alla retta, abbiamo

$$OQ = c = a - \frac{b}{\tan\rho}$$

ed ogni punto appartenente alla r( $\rho$  dovrà

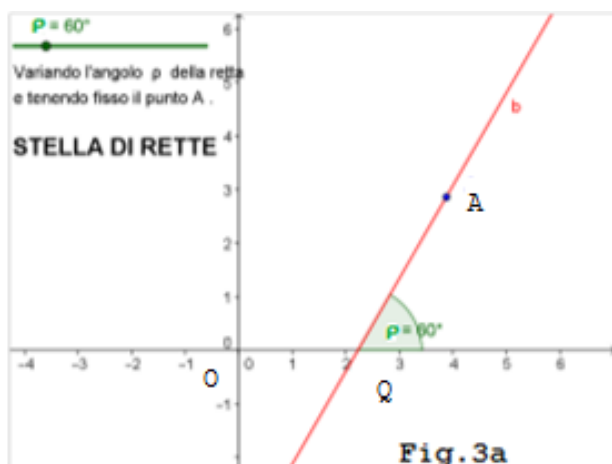
soddisfare la condizione  $OQ = c = x - \frac{y}{\tan\rho} = a - \frac{b}{\tan\rho}$  da cui l'eq.

della retta

$$y = (x - c)\tan\rho \text{ oppure } y = (x - a)\tan\rho + b$$

Per  $c=0$  si riavrebbero le formule viste sopra: caso di retta per l'Origine.

Nella figura 3a e 3b che segue abbiamo:

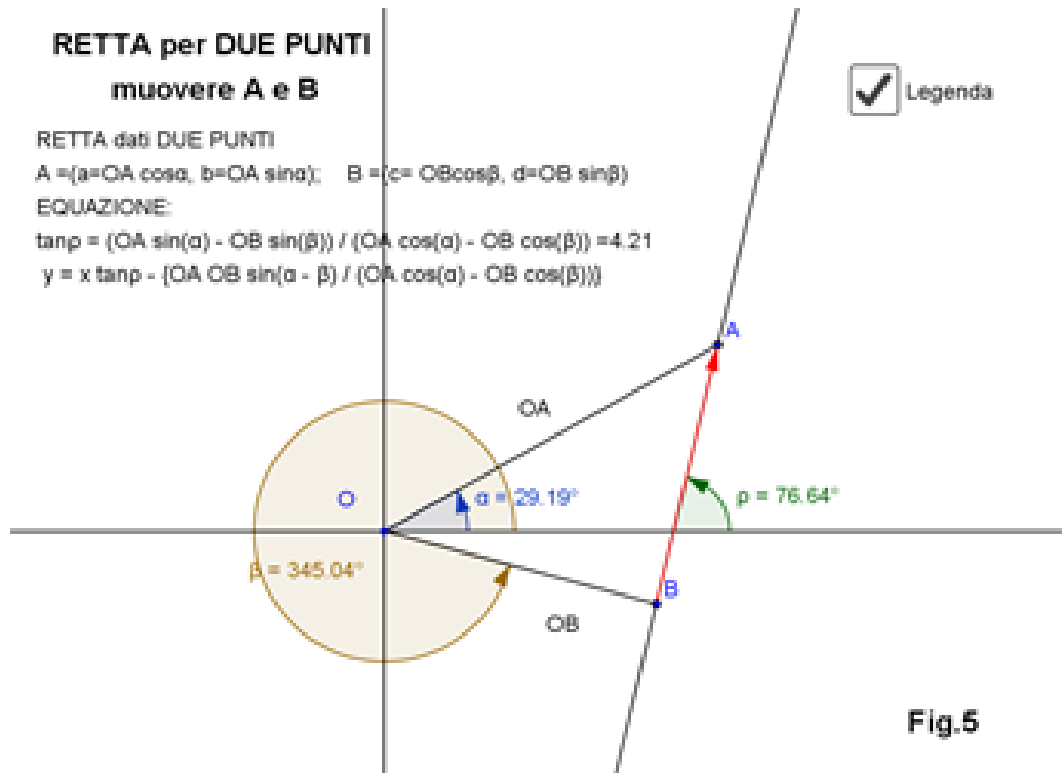


lasciando fisso A e variando l'angolo  $\rho$  come in Fig.3a abbiamo le infinite rette che ruotano intorno al punto A, cioè una Stella di Rette. Invece per un angolo  $\rho$  fisso, Fig.3b, e incrementando il valore dell'ascissa (con ordinata fissa) del punto A abbiamo un insieme di rette parallele, cioè un Fascio di Rette.

DATI DUE PUNTI DETERMINARE LA RETTA CONGIUNGENTE

Siano i punti  $A(a=OA\cos\alpha, b=OA\sin\alpha)$  e  $B(c=OB\cos\beta, d=OB\sin\beta)$ . Il verso della loro congiungente sia per A verso B con angolo  $\rho$  e per B verso A con  $(180+\rho)$ . Avremo:

$$\tan\rho = \frac{b-d}{a-c} = \frac{OA\sin\alpha - OB\sin\beta}{OA\cos\alpha - OB\cos\beta} \quad \text{oppure} \quad \tan(180 + \rho) = \frac{d-b}{a-c} = \frac{OB\sin\beta - OA\sin\alpha}{OB\cos\beta - OA\cos\alpha}$$



pertanto la scelta del verso  $r$  direzione della retta dipenderà dal problema posto. Un qualunque punto  $X(x, y)$  per appartenere alla retta, dovrà avere:

$$\tan\rho = \frac{y-b}{x-a} = \frac{y-OA\sin\alpha}{x-OA\cos\alpha} \quad \text{oppure} \quad \tan(180 + \rho) = \frac{y-d}{x-c} = \frac{y-OB\sin\beta}{x-OB\cos\beta}$$

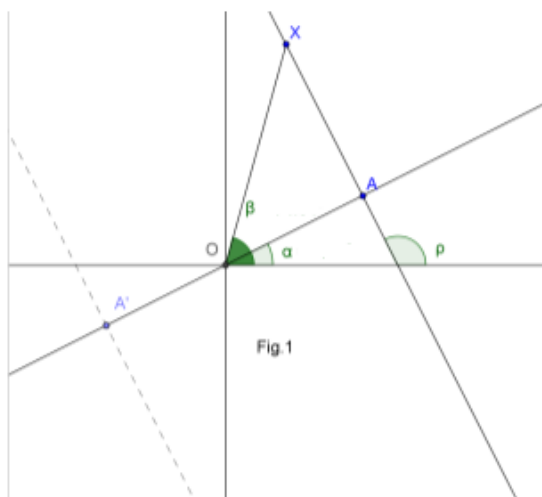
RETTE TRAMITE LA DISTANZA DALL'ORIGINE

In un riferimento cartesiano ortogonale una qualunque retta si può orientare stabilendo la sua direzione e verso, secondo l'angolo che essa forma con il verso positivo dell'asse x, preso in senso antiorario.

Tuttavia una retta con direzione e verso non è posizionata nel riferimento cartesiano, nel senso che sono infinite le rette con tale direzione e verso, cioè tutte le parallele.

Se della retta conosciamo nel nostro riferimento cartesiano un suo punto o sappiamo che essa passa per un punto noto, allora, tale retta risulterà posizionata e sarà unica, nel riferimento, ad avere quella direzione, quel verso e quel punto: essa è dunque orientata ed uguale orientamento avrà ogni suo segmento.

Delle infinite rette di uguale direzione e verso, indicate con r(ρ che ha il significato di retta r con angolo (ρ (preso in senso antiorario con il verso positivo delle x), consideriamone una e tracciamo come da figura Fig.1 la perpendicolare ad essa per



l'origine. e sia  $\overline{OA}$  la sua distanza data:

L'Eq. di Vag della distanza  $\overline{OA}$  di punto A(a, b) e angolo α (ottenuto dall'angolo ρ (vedi avanti) è:

$$\begin{cases} |\overline{OA}| \cos \alpha = a & \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ |\overline{OA}| \sin \alpha = b & \overline{OA}^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$|\overline{OA}| = a \cos \alpha + b \sin \alpha$$

dove il punto A(a,b) estremo di  $\overline{OA}$  è punto della retta r(ρ, che risulta dunque essere posizionata.

Infatti tra tutte le parallele alla retta r(ρ due sole avranno dall'origine la distanza OA=OA' ma tale distanza è unica per l'angolo α (infatti OA' avrà angolo (180 + α)).

Qualunque altro punto X(x, y) rispetto alla distanza OA darà:

$$a) \quad |\overline{OX}| \cos(\beta - \alpha) = \pm \overline{OA} = |\overline{OX}| (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

(dove è ±OA in quanto ora OA è il valore di una coordinata)

Si osservi che il generico angolo (β-α) essendo l'angolo interno di un triangolo rettangolo è sempre minore di 90°; e che (β-α) sarà positivo o negativo a seconda di β > o < α

$$\cos \pm(\beta - \alpha) = \cos(\beta - \alpha) \quad \sin \pm(\beta - \alpha) = \pm \sin(\beta - \alpha)$$

Analogamente accade per il valore dell'angolo OXA, dato da (ρ-β) quindi:

$$a) \quad |\overline{OX}| \sin(\rho - \beta) = \pm \overline{OA} = |\overline{OX}| (\sin \rho \cos \beta - \cos \rho \sin \beta) = x \sin \rho - y \cos \rho$$

$$\cos \pm(\rho - \beta) = \cos(\rho - \beta) \quad \sin \pm(\rho - \beta) = \pm(\rho - \beta)$$



$$\overline{OX} = (\overline{AX} \cos \rho + \overline{OA} \sin \rho) \cos \beta + (\overline{AX} \sin \rho - \overline{OA} \cos \rho) \sin \beta$$

Vediamo anche le uguaglianze:

$x \sin \rho - y \cos \rho = \pm \overline{OA}$  punti di una retta distante OA dall'origine.

$x \sin \rho - y \cos \rho = 0$  punti di una retta per l'origine.

Consideriamo l'angolo  $(\beta - \alpha)$  anziché  $(\rho - \beta)$ :

$$\begin{cases} \overline{OX} \cos(\beta - \alpha) = \overline{OX}(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = x \cos \alpha + y \sin \alpha = OA \\ \overline{OX} \sin(\beta - \alpha) = \overline{OX}(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = y \cos \alpha - x \sin \alpha = AX \end{cases}$$

Eq. di Vag che per le considerazioni fatte:

$$\overline{OX} \cos(\beta - \alpha) = \overline{OA} = \pm |\overline{OA}| = x \cos \alpha + y \sin \alpha = \pm (a \cos \alpha + b \sin \alpha)$$

e analogamente a quanto fatto nella pagina precedente per  $(\rho - \beta)$ :

$$\begin{cases} \overline{OX} \cos \beta = \overline{OA} \cos \alpha - \overline{AX} \sin \alpha = x \\ \overline{OX} \sin \beta = \overline{OA} \sin \alpha + \overline{AX} \cos \alpha = y \end{cases}$$

Infatti:

$$\overline{OX}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{OA}^2; \quad \cos^2(\rho - \beta) + \sin^2(\rho - \beta) = 1; \quad \cos^2(\beta - \alpha) + \sin^2(\beta - \alpha) = 1$$

mentre la Ug. del teorema delle proiezioni "può essere" una Eq. di Vag.

Sia la retta  $r(\rho)$  e un suo punto  $B(a_0; b_0; \alpha_0)$  l'insieme dei suoi punti  $X(x; y; \beta)$  è tale che:

$$\pm \overline{OA} = \overline{OX} \sin(\rho - \beta) = \overline{OB} \sin(\rho - \alpha_0)$$

$$*) \pm \overline{OA} = x \sin \rho - y \cos \rho = a_0 \sin \rho - b_0 \cos \rho$$

da cui si ricava l'equazione di tutti i punti della retta tramite il suo angolo (coefficiente angolare):

$$(x - a_0) \sin \rho - (y - b_0) \cos \rho = 0; \quad \tan \rho = -\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{y - b_0}{x - a_0} = \frac{\overline{OX} \sin \beta - \overline{OB} \sin \alpha}{\overline{OX} \cos \beta - \overline{OB} \cos \alpha}$$

( $\alpha$  è l'angolo della distanza della retta dal centro)

Facendo  $\pm \overline{OA} = \pm \overline{OQ} \cos \rho = \pm \overline{ON} \sin \rho$  (vedi fig 2)

$OQ = q$  e  $ON = n$  intersezione della retta con gli assi

si avrà l'eq. classica della retta se li sostituiamo in \*)

$y = x \tan \rho \pm q$  e  $y = (x \pm n) \tan \rho$  dando a quest'ultima dei valori generici  $a, b, c$

$$\tan \rho = -\frac{a}{b} \quad e \quad \frac{c}{b} = q \quad e \quad \frac{c}{a} = n \quad \text{sara' } y = -\frac{ax + c}{b} \quad \text{si ha l'eq. implicita della retta } ax + by + c = 0$$

Si osservino le equazioni polari:

$$\overline{OX} = \frac{\pm \overline{OA}}{\text{sen}(\rho - \beta)} \quad \overline{OX} = \frac{\pm \overline{OA}}{\text{cos}(\beta - \alpha)}$$

### RETTA TRAMITE DUE PUNTI

Dati due punti  $A(a_0, b_0)$  e  $B(a_1, b_1)$  e' possibile scrivere:

$$(a_0 - a_1)\text{cos}\rho + (b_0 - b_1)\text{sen}\rho = \overline{BA}$$

$$(a_1 - a_0)\text{cos}\rho' + (b_1 - b_0)\text{sen}\rho' = \overline{AB} \quad \text{entrambe le equazioni danno:}$$

$$\overline{BA}^2 = \overline{AB}^2 = (a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2 = (a_1 - a_0)^2 + (b_1 - b_0)^2$$

$$\text{cos}^2 \rho + \text{sen}^2 \rho = 1 \quad \text{cos}^2 \rho' + \text{sen}^2 \rho' = 1 \quad \rho' = 180 - \rho$$

dovrà essere scelta tuttavia quella il cui verso ci interessa cioè

$\overline{BA}$  o  $\overline{AB}$  indicate rispettivamente dall'angolo  $\rho$  oppure  $\rho'$

Puo' essere utile sapere i legami esistenti tra una retta determinata dai suoi punti e una retta orientata:

$$\text{cos}(\beta - \alpha) = \text{sen}(\rho - \beta); \quad \text{sen}(\beta - \alpha) = \text{cos}(\rho - \beta)$$

$$\frac{1}{\text{tan}(\beta - \alpha)} = \text{tan}(\rho - \beta)$$

(Vedi ESEMPIO IV<sup>o</sup> numerico)

### STELLA E FASCIO DI RETTE

Dato un punto P  $(x_0, y_0)$  possiamo scrivere

$$x_0 \text{sen}\rho - y_0 \text{cos}\rho = \pm \overline{OA}$$

Il variare del valore dell'angolo  $\rho$  varia la distanza  $\pm \overline{OA}$  di tutte le rette per il punto P (Stella di rette).

Per un punto qualunque X  $(x, y)$  e un valore fisso di  $\rho$  si avrà

$$x \text{sen}\rho - y \text{cos}\rho = \pm \overline{OA}$$

il variare delle coordinate del punto X si avrà una serie di rette parallele (Fascio di rette) di angolo  $\rho$  costante e distanza  $\pm \overline{OA}$  variabile.



FISSATA UNA RETTA TROVARE LA SUA DISTANZA DALL'ORIGINE E LE COORDINATE DI QUESTA (ESEMPIO 1)

Sia la retta  $r(\rho)$  e il punto che la fissi sul piano  $P(x_0, y_0)$ .

Sappiamo

$$x_0 \operatorname{sen} \rho - y_0 \operatorname{cos} \rho = \pm \overline{OA}$$

per cui  $\pm \overline{OA}$  risulta noto e se le coordinate di A supponiamo essere (a,b) potremmo scrivere:

$$\begin{cases} a \operatorname{sen} \rho - b \operatorname{cos} \rho = \pm \overline{OA} \\ a \operatorname{cos} \rho + b \operatorname{sen} \rho = 0 \end{cases}$$

sistema che dà come risultato:

$$b = -(\pm \overline{OA} \operatorname{cos} \rho) \quad \text{e} \quad a = \pm \overline{OA} \operatorname{sen} \rho$$

A questo punto per ottenere il vero valore di  $\alpha$ , angolo di OA

distanza della retta dall'origine, si dovrà fare  $\alpha = \operatorname{inv} \tan \frac{b}{a}$  e poi

considerando i segni di (a,b) vedere in quale quadrante esso capita per poter decidere:

$$\begin{array}{llll} I / \text{Quadr} & \alpha = |\alpha| & II / \text{Q} & \alpha = 180 - |\alpha| \\ III / \text{Q} & \alpha = 180 + |\alpha| & IV / \text{Q} & \alpha = 360 - |\alpha| \end{array}$$

TRACCIARE UNA RETTA ORIENTATA (ESEMPIO 2)

Sia la retta  $r(\rho)$  e un punto  $P(x_0, y_0)$  che la fissi sul piano: è ovvio che essendo noti i tre dati  $\rho; x_0; y_0$  è possibile tracciarla per verso e direzione.

Ma vediamo come dobbiamo fare per tracciarla per punti; cioè allineare tutti i suoi punti.

Nell'esempio che segue si deve trovare la distanza  $\pm OA$  della retta  $r(\rho)$ , le coordinate del punto A e l'angolo  $\alpha$  di OA proprio come si è fatto nell'esempio 1. L'angolo  $\alpha$  di OA deve avere il suo valore vero rispetto all'asse delle ascisse.

Una volta trovato l'angolo  $\alpha$  e  $\pm OA$  possiamo far variare l'angolo  $\beta$  di ogni punto della retta tra:

$$(90 - \rho) = (180 - \alpha)$$

$$\alpha = 90 + \rho ; \rho = \alpha - 90$$

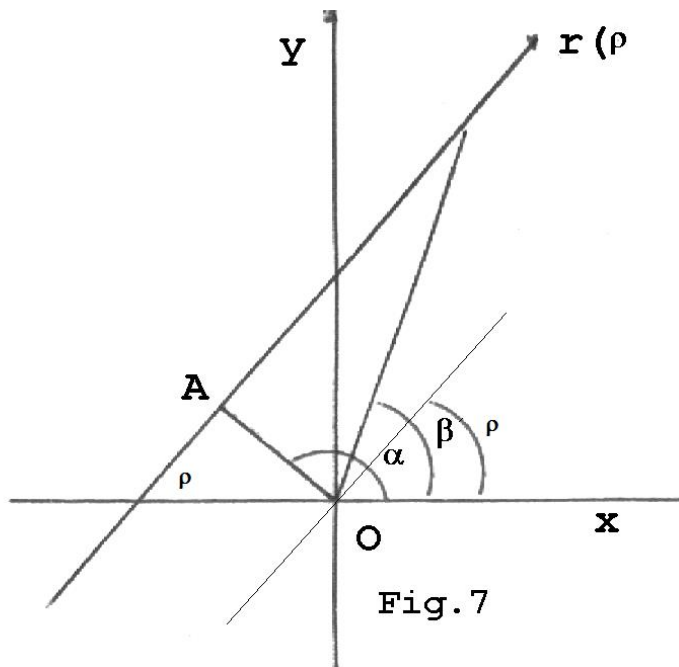
$$\rho \leq \beta \leq 180 + \rho \quad \text{da cui}$$

$$(\alpha - 90) \leq \beta \leq (\alpha + 90)$$

per poter trovare

$$|\overline{OX}| = \frac{\pm OA}{\text{sen}(\rho - \beta)}$$

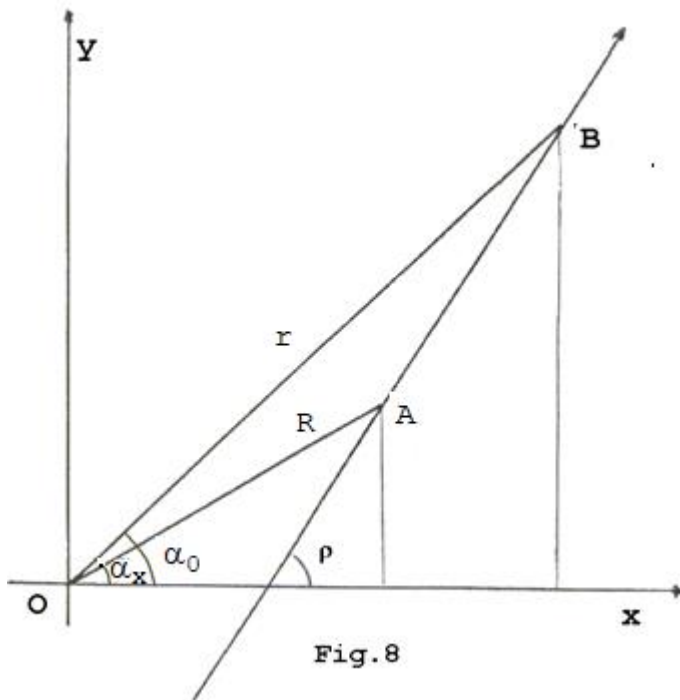
e quindi avere tutti i punti che determinano la  $r(\rho)$  :



$$\begin{cases} |\overline{OX}| \cos \beta = x \\ |\overline{OX}| \text{sen} \beta = y \end{cases}$$

$$\frac{\pm OA}{\text{sen}(\rho - \beta)} = OX = x \cos \beta + y \text{sen} \beta \quad \text{Eq. di Vag}$$

DISTANZA DI DUE PUNTI DI UNA RETTA ORIENTATA (ESEMPIO 3)



Dati due punti

$B(x_0; y_0; \alpha_0)$  e  $A(x; y; \alpha_x)$  della retta ( $\rho$  come da figura, la loro distanza è data:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{OA} \cos(\rho - \alpha_x) - \overline{OB} \cos(\rho - \alpha_0) = \\ &= (\overline{OA} \cos \alpha_x - \overline{OB} \cos \alpha_0) \cos \rho + \\ &+ (\overline{OA} \sin \alpha_x - \overline{OB} \sin \alpha_0) \sin \rho = \\ &= (x - x_0) \cos \rho + (y - y_0) \sin \rho \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overline{AB} \cos \rho = \overline{OA} \cos \alpha_x - \overline{OB} \cos \alpha_0 = X \\ \overline{AB} \sin \rho = \overline{OA} \sin \alpha_x - \overline{OB} \sin \alpha_0 = Y \end{cases}$$

$$\tan \rho = \frac{Y}{X}$$

L'espressione ora vista darà un valore positivo o negativo a seconda se

facciamo

$$(x - x_0); (y - y_0); \tan \rho = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{oppure} \quad (x_0 - x); (y_0 - y); \tan \rho = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}$$

Facendo:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= X^2 + Y^2 = (R \cos \alpha_x - r \cos \alpha_0)^2 + (R \sin \alpha_x - r \sin \alpha_0)^2 = \\ &= R^2 + r^2 - 2Rr(\cos \alpha_x \cos \alpha_0 + \sin \alpha_x \sin \alpha_0) = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha_x - \alpha_0) = \\ &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha \quad \text{per} \quad |\alpha| = (\alpha_x - \alpha_0) \end{aligned}$$

quadrando e svolgendo l'ultima espressione si ottiene il segmento di ellisse:

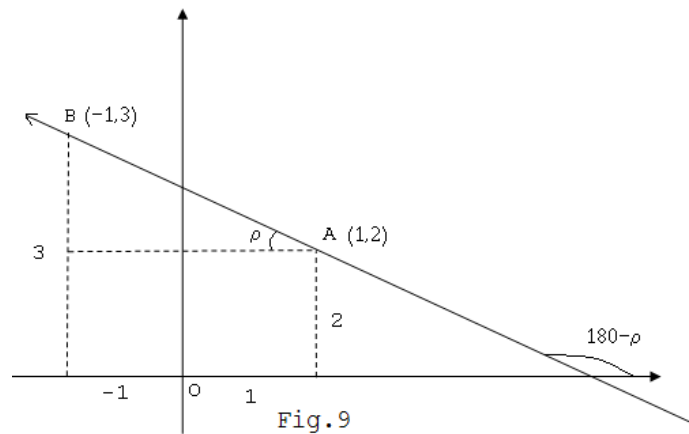
$$\overline{AB}^2 = (R - r)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + (R + r)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (R - r) = \text{asse min}; \quad (R + r) = \text{asse mag}$$

Se  $\alpha_0 = 0$  (cioè punto B sull'ascissa), allora

$$\overline{AB} = \overline{OA} \cos(\rho - \alpha_x) - \overline{OB} \cos(\rho).$$

CALCOLO NUMERICO DELLA DISTANZA DI DUE PUNTI

ESEMPIO IV



Siano i punti  $A(1;2)$ ,  $B(-1,3)$ .

Per ottenere l'angolo della retta per verso e direzione dobbiamo tener presente:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cos \rho = (-1-1) = -2 \\ \overrightarrow{AB} \sin \rho = (3-2) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \overrightarrow{BA} \cos \rho = (1+1) = 2 \\ \overrightarrow{BA} \sin \rho = (2-3) = -1 \end{cases} \quad \overline{AB} = \overline{BA} = \sqrt{5}$$

L'angolo della retta con asse delle X sarà:

$$\tan \rho = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = -0,5 \quad \rho = -26,565051$$

Il vero verso e direzione della retta avrà angolo  $(180-\rho)$  per  $\overrightarrow{AB}$  e  $(360-\rho)$  per  $\overrightarrow{BA}$ , ma ai fini del calcolo e del posizionamento della retta, basta considerare  $\rho = -26,565051$ .

L'angolo della distanza  $d=OA$  perpendicolare dal centro  $O$  alla retta sappiamo essere  $\alpha = 90 - \rho$  o meglio:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{\tan \rho} = \frac{-1}{-0,5} = 2 \quad \alpha = (63,434949).$$

e la sua distanza sappiamo essere:  $d = x \sin \rho - y \cos \rho$  cioè:

$$\begin{cases} \text{col punto A} & +1 \sin(-26,565051) - 2 \cos(-26,565051) = -2,236067 \\ \text{col punto B} & -1 \sin(-26,565051) - 3 \cos(-26,565051) = -2,236067 \end{cases}$$

Tramite il valore assoluto della distanza  $-d$  e del suo angolo  $\alpha$  abbiamo le coordinate:

$$\begin{cases} (2,236067) \cos(63,434949) = x = 1 \\ (2,236067) \sin(63,434949) = y = 2 \end{cases}$$

dove il punto  $A(1,2)$  è anche l'estremo della distanza  $-d$ .