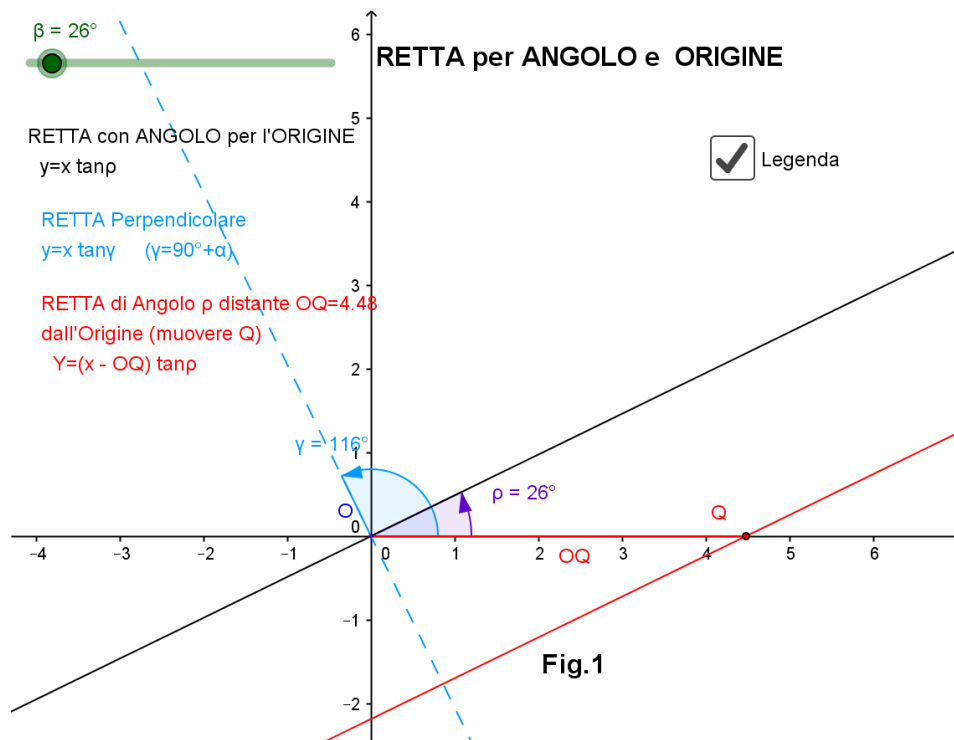


II. LA RETTA

LA RETTA

In un riferimento cartesiano ortogonale una qualunque retta si può orientare stabilendo la sua direzione e verso, secondo l'angolo che essa forma con il verso positivo dell'asse x, preso in senso antiorario.

RETTE PER L'ORIGINE.



Consideriamo una retta passante per l'Origine in un riferimento; sarà una ed una sola la retta di quel dato angolo ρ a passare per l' Origine. Tale retta di angolo ρ , che indicheremo con $r(\rho)$, passando per l'Origine del riferimento cartesiano, in realtà si presenta divisa in due semirette, ciascuna con angolo ρ e $(180^\circ + \rho)$. La retta dunque avrà verso e direzione sia (ρ) che opposta $(180^\circ + \rho)$ e sarà il valore dell'angolo a specificare il suo verso e direzione. Data dunque una retta orientata per ρ , tutti i suoi punti saranno determinati, e un qualunque valore x dell'ascissa la determinerà poiché

$$y = x \tan \rho \quad \text{oppure} \quad y = x \tan(180 + \rho)$$

$$\begin{aligned} \text{da cui:} \quad y \cos \rho &= x \sin \rho & y \cos \rho - x \sin \rho &= 0 \\ y \cos(180 + \rho) &= x \sin(180 + \rho) & y \cos(180 + \rho) - x \sin(180 + \rho) &= 0 \end{aligned}$$

Un eventuale punto $A(a,b)$ o $B(c,d)$ avrà

$$b \cos \rho - a \sin \rho = d \cos \rho - c \sin \rho = 0$$

$$b \cos(180 + \rho) - a \sin(180 + \rho) = d \cos(180 + \rho) - c \sin(180 + \rho) = 0$$

RETTA NON PER L'ORIGINE

Tuttavia una retta con direzione e verso, non passante per l'Origine non e' posizionata nel riferimento cartesiano, nel senso che sono infinite le rette con tale direzione e verso, e tutte parallele tra loro. Ma se nel nostro riferimento conosciamo un punto di tale retta, allora, tale retta risulterà posizionata e sarà unica, nel riferimento, ad avere quella direzione, quel verso e quel Punto: essa e' dunque orientata ed uguale orientamento avrà ogni suo punto o segmento.

Nella Fig.3° e Fig.3b il punto A è quello che permette di fissare la retta r(ρ nel riferimento cartesiano. In realtà i punti sono due: il punto A e il punto Q intersezione (tale punto esisterà sempre per qualunque retta non parallela alla ascissa, per impostazione stessa). A meno che non sia dato, il punto Q è ricavabile dal punto A stesso, come distanza OQ.

Infatti dato il punto A(a,b) appartenente alla retta, abbiamo

$$OQ = c = a - \frac{b}{\tan\rho}$$

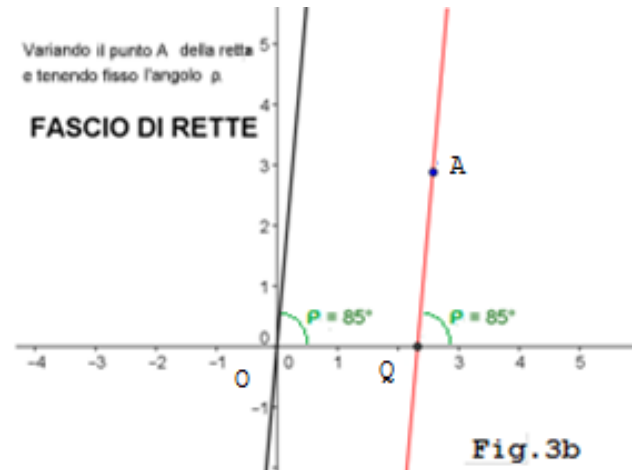
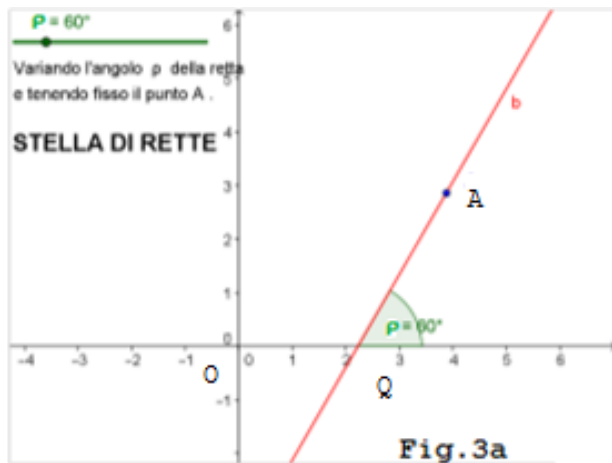
ed ogni punto appartenente alla r(ρ dovrà

soddisfare la condizione $OQ = c = x - \frac{y}{\tan\rho} = a - \frac{b}{\tan\rho}$ da cui l'eq. della retta

$$y = (x - c)\tan\rho \quad \text{oppure} \quad y = (x - a)\tan\rho + b$$

Per c=0 si riavrebbero le formule viste sopra: caso di retta per l'Origine.

Nella figura 3° e 3b che segue abbiamo:

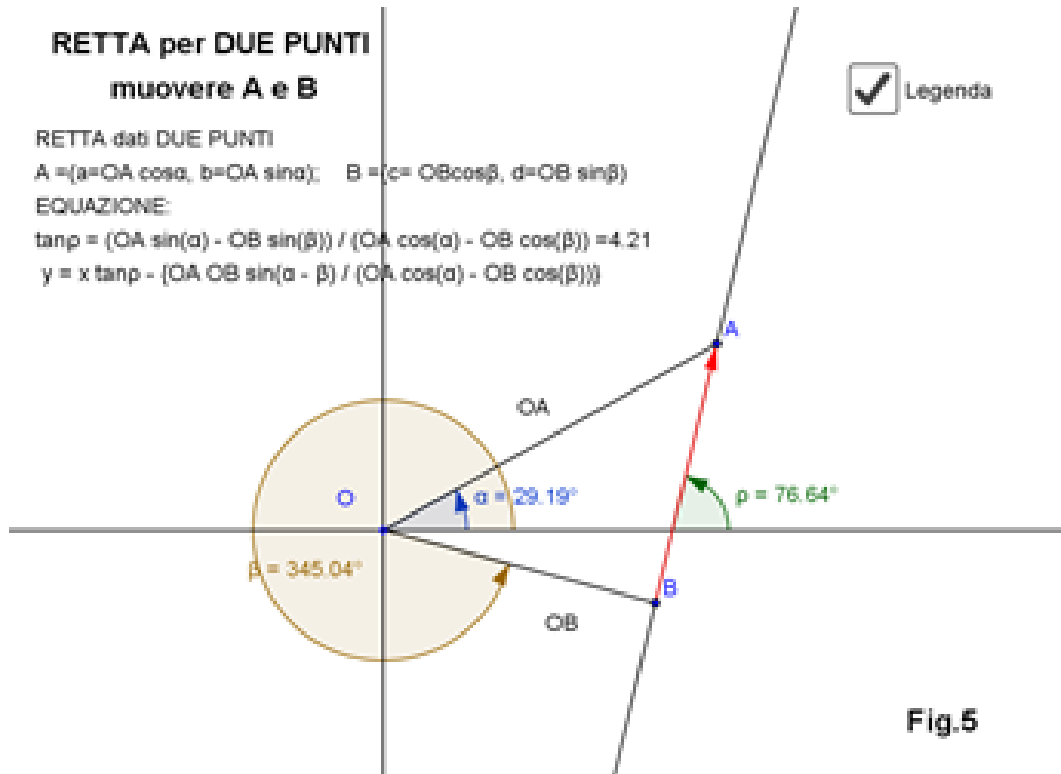


lasciando fisso A e variando l'angolo ρ come in Fig.3a abbiamo le infinite rette che ruotano intorno al punto A, cioè una Stella di Rette. Invece per un angolo ρ fisso, Fig.3b, e incrementando il valore dell'ascissa (con ordinata fissa) del punto A abbiamo un insieme di rette parallele, cioè un Fascio di Rette.

DATI DUE PUNTI DETERMINARE LA RETTA CONGIUNGENTE

Siano i punti $A(a=OA\cos\alpha, b=OA\sin\alpha)$ e $B(c=OB\cos\beta, d=OB\sin\beta)$. Il verso della loro congiungente sia per A verso B con angolo ρ e per B verso A con $(180+\rho)$. Avremo:

$$\tan\rho = \frac{b-d}{a-c} = \frac{OA\sin\alpha - OB\sin\beta}{OA\cos\alpha - OB\cos\beta} \quad \text{oppure} \quad \tan(180 + \rho) = \frac{d-b}{a-c} = \frac{OB\sin\beta - OA\sin\alpha}{OB\cos\beta - OA\cos\alpha}$$



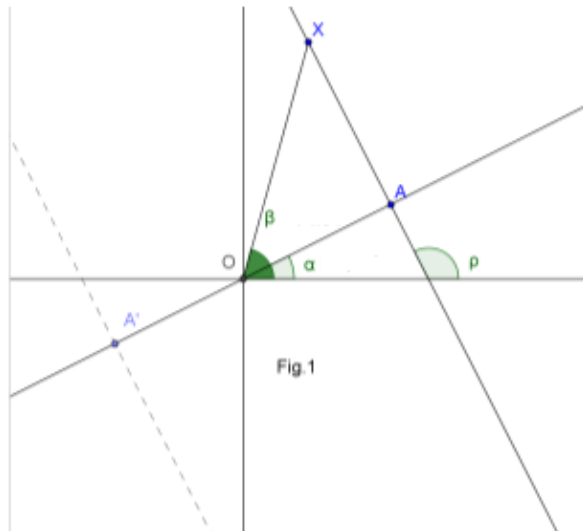
pertanto la scelta del verso r direzione della retta dipenderà dal problema posto. Un qualunque punto $X(x, y)$ per appartenere alla retta, dovrà avere:

$$\tan\rho = \frac{y-b}{x-a} = \frac{y-OA\sin\alpha}{x-OA\cos\alpha} \quad \text{oppure} \quad \tan(180 + \rho) = \frac{y-d}{x-c} = \frac{y-OB\sin\beta}{x-OB\cos\beta}$$

RETTE TRAMITE LA DISTANZA DALL'ORIGINE

In un riferimento cartesiano ortogonale una qualunque retta si può orientare stabilendo la sua direzione e verso, secondo l'angolo che essa forma con il verso positivo dell'asse x , preso in senso antiorario.

Tuttavia una retta con direzione e verso non è posizionata nel riferimento cartesiano, nel senso che sono infinite le rette con tale direzione e verso, cioè tutte le parallele.



Se della retta conosciamo nel nostro riferimento cartesiano un suo punto o sappiamo che essa passa per un punto noto, allora, tale retta risulterà posizionata e sarà unica, nel riferimento, ad avere quella direzione, quel verso e quel punto: essa è dunque orientata ed uguale orientamento avrà ogni suo segmento.

Delle infinite rette di uguale direzione e verso, indicate con $r(\rho)$ che ha il significato di retta r con angolo (ρ) (preso in senso

antiorario con il verso positivo delle x), consideriamone una e

tracciamo come da figura Fig.1 la perpendicolare ad essa per l'origine. e sia \overline{OA} la sua distanza data:

L'Eq. di Vag della distanza \overline{OA} di punto A(a, b) e angolo α (ottenuto dall'angolo ρ (vedi avanti) è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} \cos \alpha = a \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ \overline{OA} \sin \alpha = b \quad \overline{OA}^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right. \quad \overline{OA} = a \cos \alpha + b \sin \alpha$$

dove il punto A(a,b) estremo di \overline{OA} è punto della retta r(ρ , che risulta dunque essere posizionata.

Infatti tra tutte le parallele alla retta r(ρ due sole avranno dall'origine la distanza $OA=OA'$ ma tale distanza e' unica per l'angolo α (infatti OA' avrà angolo $(180 + \alpha)$).

Qualunque altro punto X(x,y) rispetto alla distanza OA darà:

$$a) \quad \overline{OX} \cos(\beta - \alpha) = \pm \overline{OA} = \overline{OX} (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

(dove è $\pm OA$ in quanto ora OA é il valore di una coordinata)

Si osservi che il generico angolo $(\beta - \alpha)$ essendo l'angolo interno di un triangolo rettangolo e' sempre minore di 90° ; e che $(\beta - \alpha)$ sarà positivo o negativo a seconda di $\beta > o < \alpha$

$$\cos \pm(\beta - \alpha) = \cos(\beta - \alpha) \quad \sin \pm(\beta - \alpha) = \pm \sin(\beta - \alpha)$$

Analogamente accade per il valore dell'angolo OXA, dato da $(\rho - \beta)$ quindi:

$$a) \quad \overline{OX} \sin(\rho - \beta) = \pm \overline{OA} = \overline{OX} (\sin \rho \cos \beta - \cos \rho \sin \beta) = x \sin \rho - y \cos \rho$$

$$\cos \pm(\rho - \beta) = \cos(\rho - \beta) \quad \sin \pm(\rho - \beta) = \pm \sin(\rho - \beta)$$

Saranno punti di una retta orientata, distante OA dall'origine, tutti quei punti che soddisferanno le seguenti uguaglianze:

- 1) $x \sin \rho - y \cos \rho = \pm \overline{OA}$ in funzione dell'angolo della retta
- 2) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = \pm \overline{OA}$ in funzione dell'angolo della distanza
- 3) $a \sin \alpha - b \cos \alpha = 0$
- 4) $a \cos \rho + b \sin \rho = 0$ in quanto punto della retta

$$180 - \rho = 90 - \alpha \quad \tan(90 - \rho) = \tan - \alpha \quad \tan \alpha = - \frac{1}{\tan \rho}$$

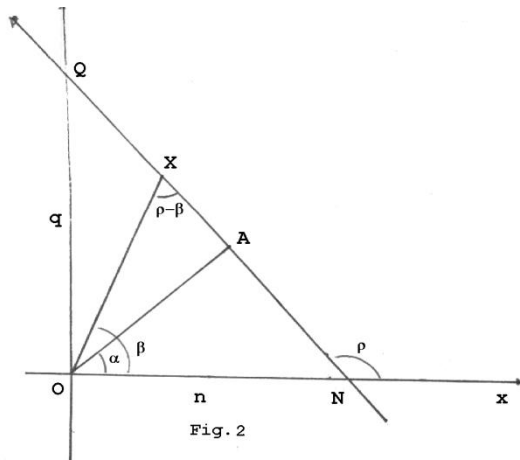
$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \quad \tan \rho = - \frac{a}{b}$$

PROPRIETA' DELLA RETTA ORIENTATA

Sia una retta orientata, per direzione e verso, e il suo angolo con l'asse x come da figura; il punto X (x,y; β) con angolo OXA= $(\rho - \beta)$ per cui l' Eq. di Vag.:

$$\overline{OX} = \overline{AX} \cos(\rho - \beta) + \overline{OA} \sin(\rho - \beta) \quad *]$$

$$\begin{cases} \overline{OX} \cos(\rho - \beta) = \overline{OX}(\cos \rho \cos \beta + \sin \rho \sin \beta) = x \cos \rho + y \sin \rho = \overline{AX} \\ \overline{OX} \sin(\rho - \beta) = \overline{OX}(\sin \rho \cos \beta - \cos \rho \sin \beta) = x \sin \rho - y \cos \rho = \overline{OA} \end{cases}$$



dove AX e OA assumono un segno essendo i valori delle coordinate di OX per un angolo $(\rho - \beta)$.
Sviluppamo *] in funzione dell'angolo ρ :

$$\begin{cases} \overline{OX} \cos \rho = \overline{AX} \cos \beta - \overline{OA} \sin \beta \\ \overline{OX} \sin \rho = \overline{AX} \sin \beta + \overline{OA} \cos \beta \end{cases}$$

$$\tan \rho = \frac{\overline{AX} \sin \beta + \overline{OA} \cos \beta}{\overline{AX} \cos \beta - \overline{OA} \sin \beta}$$

$$\overline{OX} = (\overline{AX} \cos \beta - \overline{OA} \sin \beta) \cos \rho + (\overline{AX} \sin \beta + \overline{OA} \cos \beta) \sin \rho$$

Sviluppamo *] in funzione dell'angolo β :

$$\begin{cases} \overline{OX} \cos \beta = \overline{AX} \cos \rho + \overline{OA} \sin \rho = x \\ \overline{OX} \sin \beta = \overline{AX} \sin \rho - \overline{OA} \cos \rho = y \end{cases} \quad \tan \beta = \frac{\overline{AX} \sin \rho - \overline{OA} \cos \rho}{\overline{AX} \cos \rho + \overline{OA} \sin \rho} = \frac{y}{x}$$

$$\overline{OX} = (\overline{AX} \cos \rho + \overline{OA} \sin \rho) \cos \beta + (\overline{AX} \sin \rho - \overline{OA} \cos \rho) \sin \beta$$

Vediamo anche le uguaglianze:

$x \sin \rho - y \cos \rho = \pm \overline{OA}$ punti di una retta distante OA dall'origine.
 $x \sin \rho - y \cos \rho = 0$ punti di una retta per l'origine.

Consideriamo l'angolo $(\beta - \alpha)$ anziché $(\rho - \beta)$:

$$\begin{cases} \overline{OX} \cos(\beta - \alpha) = \overline{OX}(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = x \cos \alpha + y \sin \alpha = \overline{OA} \\ \overline{OX} \sin(\beta - \alpha) = \overline{OX}(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) = y \cos \alpha - x \sin \alpha = \overline{AX} \end{cases}$$

Eq. di Vag che per le considerazioni fatte:

$$\overline{OX} \cos(\beta - \alpha) = \overline{OA} = \pm |\overline{OA}| = x \cos \alpha + y \sin \alpha = \pm (a \cos \alpha + b \sin \alpha)$$

e analogamente a quanto fatto nella pagina precedente per $(\rho - \beta)$:

$$\begin{cases} \overline{OX} \cos \beta = \overline{OA} \cos \alpha - \overline{AX} \sin \alpha = x \\ \overline{OX} \sin \beta = \overline{OA} \sin \alpha + \overline{AX} \cos \alpha = y \end{cases}$$

Infatti:

$$OX^2 = AX^2 + OA^2; \quad \cos^2(\rho - \beta) + \sin^2(\rho - \beta) = 1; \quad \cos^2(\beta - \alpha) + \sin^2(\beta - \alpha) = 1$$

mentre la Ug. del teorema delle proiezioni "può essere" una Eq. di Vag.

Sia la retta $r(\rho)$ e un suo punto $B(a_0; b_0; \alpha_0)$ l'insieme dei suoi punti $X(x; y; \beta)$ è tale che:

$$\pm OA = OX \operatorname{sen}(\rho - \beta) = OB \operatorname{sen}(\rho - \alpha_0)$$

$$*) \pm OA = x \operatorname{sen} \rho - y \cos \rho = a_0 \operatorname{sen} \rho - b_0 \cos \rho$$

da cui si ricava l'equazione di tutti i punti della retta tramite il suo angolo (coefficiente angolare):

$$(x - a_0) \operatorname{sen} \rho - (y - b_0) \cos \rho = 0; \quad \tan \rho = -\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{y - b_0}{x - a_0} = \frac{\overline{OX} \operatorname{sen} \beta - \overline{OB} \operatorname{sen} \alpha}{\overline{OX} \cos \beta - \overline{OB} \cos \alpha}$$

(α è l'angolo della distanza della retta dal centro)

Facendo $\pm \overline{OA} = \pm \overline{OQ} \cos \rho = \pm \overline{ON} \operatorname{sen} \rho$ (vedi fig 2)

$OQ = q$ e $ON = n$ intersezione della retta con gli assi

si avrà l'eq. classica della retta se li sostituiamo in *)

$y = x \tan \rho \pm q$ e $y = (x \pm n) \tan \rho$ dando a quest'ultima dei valori generici a, b, c

$$\tan \rho = -\frac{a}{b} \quad e \quad -\frac{c}{b} = q \quad e \quad \frac{c}{a} = n \quad \text{sara' } y = -\frac{ax + c}{b} \quad \text{si ha l'eq. implicita della retta } ax + by + c = 0$$

Si osservino le equazioni polari:

$$\frac{\overline{OX}}{\operatorname{sen}(\rho - \beta)} = \frac{\pm \overline{OA}}{\operatorname{sen}(\rho - \beta)} \quad \frac{\overline{OX}}{\cos(\beta - \alpha)} = \frac{\pm \overline{OA}}{\cos(\beta - \alpha)}$$

RETTA TRAMITE DUE PUNTI

Dati due punti $A(a_0, b_0)$ e $B(a_1, b_1)$ e' possibile scrivere:

$$(a_0 - a_1) \cos \rho + (b_0 - b_1) \operatorname{sen} \rho = \overline{BA}$$

$$(a_1 - a_0) \cos \rho' + (b_1 - b_0) \operatorname{sen} \rho' = \overline{AB}$$

entrambe le equazioni danno:

$$\overline{BA}^2 = \overline{AB}^2 = (a_0 - a_1)^2 + (b_0 - b_1)^2 = (a_1 - a_0)^2 + (b_1 - b_0)^2$$

$$\cos^2 \rho + \operatorname{sen}^2 \rho = 1 \quad \cos^2 \rho' + \operatorname{sen}^2 \rho' = 1 \quad \rho' = 180 - \rho$$

dovrà essere scelta tuttavia quella il cui verso ci interessa cioè

\overline{BA} o \overline{AB} indicate rispettivamente dall'angolo ρ oppure ρ'

Puo' essere utile sapere i legami esistenti tra una retta determinata dai suoi punti e una retta orientata:

$$\cos(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}(\rho - \beta); \quad \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \cos(\rho - \beta)$$

$$\frac{1}{\tan(\beta - \alpha)} = \tan(\rho - \beta)$$

(Vedi ESEMPIO IV° numerico)

STELLA E FASCIO DI RETTE

Dato un punto P (x_0, y_0) possiamo scrivere

$$x_0 \operatorname{sen} \rho - y_0 \operatorname{cos} \rho = \pm \overline{OA}$$

Il variare del valore dell'angolo ρ varia la distanza $\pm \overline{OA}$ di tutte le rette per il punto P (Stella di rette).

Per un punto qualunque X (x, y) e un valore fisso di ρ si avrà

$$x \operatorname{sen} \rho - y \operatorname{cos} \rho = \pm \overline{OA}$$

il variare delle coordinate del punto X si avrà una serie di rette parallele (Fascio di rette) di angolo ρ costante e distanza $\pm \overline{OA}$ variabile.

FISSATA UNA RETTA TROVARE LA SUA DISTANZA DALL'ORIGINE E LE COORDINATE DI QUESTA (ESEMPIO 1)

Sia la retta $r(\rho)$ e il punto che la fissi sul piano $P(x_0, y_0)$.

Sappiamo

$$x_0 \operatorname{sen} \rho - y_0 \operatorname{cos} \rho = \pm \overline{OA}$$

per cui $\pm \overline{OA}$ risulta noto e se le coordinate di A supponiamo essere (a,b) potremmo scrivere:

$$\begin{cases} a \operatorname{sen} \rho - b \operatorname{cos} \rho = \pm \overline{OA} \\ a \operatorname{cos} \rho + b \operatorname{sen} \rho = 0 \end{cases}$$

sistema che dà come risultato:

$$b = -(\pm \overline{OA} \operatorname{cos} \rho) \quad \text{e} \quad a = \pm \overline{OA} \operatorname{sen} \rho$$

A questo punto per ottenere il vero valore di α , angolo di OA

distanza della retta dall'origine, si dovrà fare $\alpha = \operatorname{arctan} \frac{b}{a}$ e poi

considerando i segni di (a,b) vedere in quale quadrante esso capita per poter decidere:

$$\begin{array}{ll} I / \text{Quadr} & \alpha = |\alpha| \\ III / Q & \alpha = 180 + |\alpha| \end{array} \quad \begin{array}{ll} II / Q & \alpha = 180 - |\alpha| \\ IV / Q & \alpha = 360 - |\alpha| \end{array}$$

TRACCIARE UNA RETTA ORIENTATA (ESEMPIO 2)

Sia la retta $r(\rho)$ e un punto $P(x_0, y_0)$ che la fissi sul piano: è ovvio che essendo noti i tre dati $\rho; x_0; y_0$ è possibile tracciarla per verso e direzione.

Ma vediamo come dobbiamo fare per tracciarla per punti; cioè allineare tutti i suoi punti.

Nell'esempio che segue si deve trovare la distanza $\pm OA$ della retta $r(\rho)$, le coordinate del punto A e l'angolo α di OA proprio come si è fatto nell'esempio 1. L'angolo α di OA deve avere il suo valore vero rispetto all'asse delle ascisse.

Una volta trovato l'angolo α e $\pm OA$ possiamo far variare l'angolo β

di ogni punto della retta tra:

$$(90 - \rho) = (180 - \alpha)$$

$$\alpha = 90 + \rho ; \rho = \alpha - 90$$

$$\rho \leq \beta \leq 180 + \rho \quad \text{da cui}$$

$$(\alpha - 90) \leq \beta \leq (\alpha + 90)$$

per poter trovare

$$|\overline{OX}| = \frac{\pm OA}{\text{sen}(\rho - \beta)}$$

e quindi avere tutti i punti che determinano la $r(\rho)$:

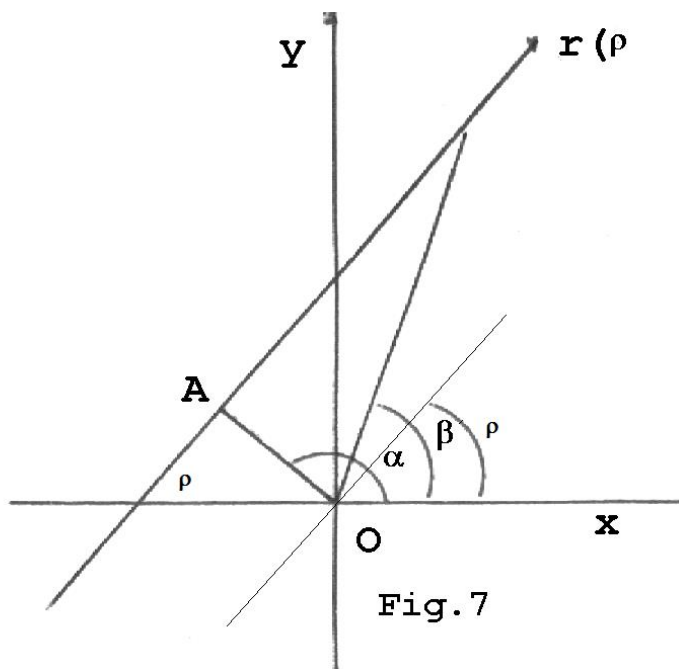
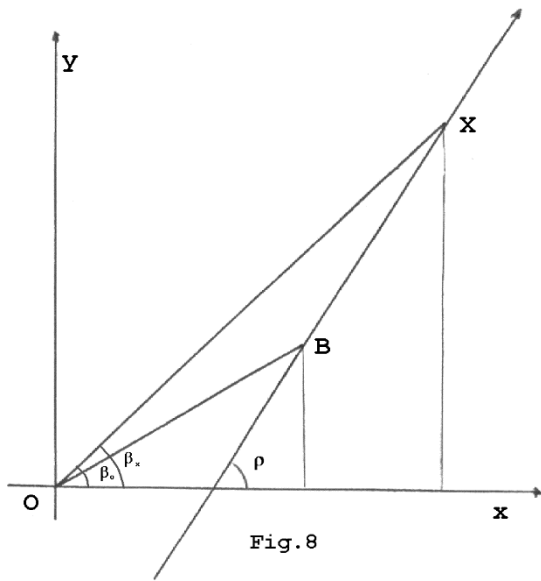


Fig. 7

$$\begin{cases} |\overline{OX}| \cos \beta = x \\ |\overline{OX}| \text{sen} \beta = y \end{cases} \quad \frac{\pm OA}{\text{sen}(\rho - \beta)} = OX = x \cos \beta + y \text{sen} \beta \quad \text{Eq. di Vag}$$

DISTANZA DI DUE PUNTI DI UNA RETTA ORIENTATA (ESEMPIO 3)



Dati due punti

$B(x_0; y_0; \beta_0)$ e $X(x; y; \beta_x)$ della retta r (ρ come da figura, la loro distanza è data:

$$\begin{aligned} \overline{BX} &= \overline{OX} \cos(\rho - \beta_x) - \overline{OB} \cos(\rho - \beta_0) = \\ &= (\overline{OX} \cos \beta_x - \overline{OB} \cos \beta_0) \cos \rho + \\ &+ (\overline{OX} \sin \beta_x - \overline{OB} \sin \beta_0) \sin \rho = \\ &= (x - x_0) \cos \rho + (y - y_0) \sin \rho \end{aligned}$$

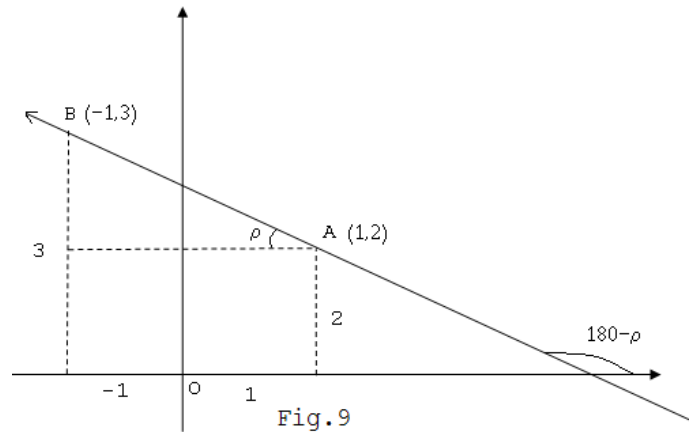
$$\begin{cases} \overline{BX} \cos \rho = \overline{OX} \cos \beta_x - \overline{OB} \cos \beta_0 \\ \overline{BX} \sin \rho = \overline{OX} \sin \beta_x - \overline{OB} \sin \beta_0 \end{cases}$$

L'espressione ora vista darà un valore positivo o negativo a seconda se facciamo

$$(x - x_0); (y - y_0); \tan \rho = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{oppure} \quad (x_0 - x); (y_0 - y); \tan \rho = \frac{y_0 - y}{x_0 - x}$$

CALCOLO NUMERICO DELLA DISTANZA DI DUE PUNTI

ESEMPIO IV



Siano i punti $A(1;2)$, $B(-1,3)$.

Per ottenere l'angolo della retta per verso e direzione dobbiamo tener presente:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cos \rho = (-1-1) = -2 \\ \overrightarrow{AB} \sin \rho = (3-2) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \overrightarrow{BA} \cos \rho = (1+1) = 2 \\ \overrightarrow{BA} \sin \rho = (2-3) = -1 \end{cases} \quad \overline{AB} = \overline{BA} = \sqrt{5}$$

L'angolo della retta con asse delle X sarà:

$$\tan \rho = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = -0,5 \quad \rho = -26,565051$$

Il vero verso e direzione della retta avrà angolo $(180-\rho)$ per \overrightarrow{AB} e $(360-\rho)$ per \overrightarrow{BA} , ma ai fini del calcolo e del posizionamento della retta, basta considerare $\rho = -26,565051$.

L'angolo della distanza $d=OA$ perpendicolare dal centro O alla retta sappiamo essere $\alpha = 90 - \rho$ o meglio:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{\tan \rho} = \frac{-1}{-0,5} = 2 \quad \alpha = (63,434949).$$

e la sua distanza sappiamo essere: $d = x \sin \rho - y \cos \rho$ cioè:

$$\begin{cases} \text{col punto A} & +1 \sin(-26,565051) - 2 \cos(-26,565051) = -2,236067 \\ \text{col punto B} & -1 \sin(-26,565051) - 3 \cos(-26,565051) = -2,236067 \end{cases}$$

Tramite il valore assoluto della distanza $-d-$ e del suo angolo α abbiamo le coordinate:

$$\begin{cases} (2,236067) \cos(63,434949) = x = 1 \\ (2,236067) \sin(63,434949) = y = 2 \end{cases}$$

dove il punto $A(1,2)$ è anche l'estremo della distanza $-d-$.