

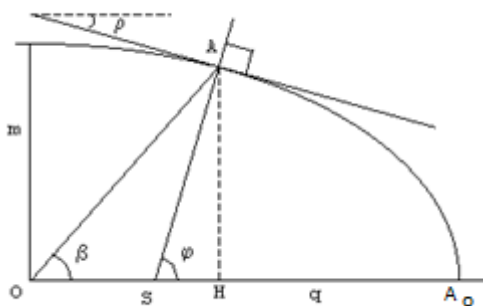
III BIS. PERPENDICOLARI ALLE TANGENTI

PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELL'ELLISSE

Abbiamo visto essere la tangente alla ellisse (vedi fig.) nel punto $A(q\cos\alpha, m\sin\alpha)$ di valore:

$$\tan \rho = -\frac{m}{q} \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Sia la perpendicolare alla tangente nel punto A; si avrà il segmento SA e SA₀ ed il relativo angolo φ . Sappiamo che la relazione che lega i due angoli è:



$$\tan \rho = -\frac{1}{\tan \varphi} = -\frac{m}{q} \frac{1}{\tan \alpha} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Contatti di Primo Ordine, } S = \text{Centro di curvatura} \\ \varphi \text{ angolo dei Raggi di Curvatura} \end{array} \right.$$

e $\tan \varphi = \frac{q}{m} \tan \alpha$ esprime il legame tra gli angoli φ e α .

Sviluppiamo l'ultima espressione:

$$m \sin \varphi \cos \alpha = q \sin \alpha \cos \varphi \quad \text{e per SA} \quad m \cos \alpha \overline{SA} \sin \varphi = q \sin \alpha \overline{SA} \cos \varphi$$

$$\text{Sappiamo anche che :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{SA} \cos \varphi = q \cos \alpha - \overline{OS} \\ \overline{SA} \sin \varphi = m \sin \alpha \end{array} \right.$$

Sostituendo questa con la precedente: $m \cos \alpha \cdot m \sin \alpha = q \sin \alpha (q \cos \alpha - \overline{OS})$

$$\overline{OS} = \frac{q^2 - m^2}{q} \cos \alpha = e^2 q \cos \alpha \quad (e = \text{eccentricità}) \quad \text{infine:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{SA} \cos \varphi = q \cos \alpha - \overline{OS} = q \cos \alpha (1 - e^2) = \frac{m^2}{q} \cos \alpha \\ \overline{SA} \sin \varphi = m \sin \alpha \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \beta = \frac{m}{q} \tan \alpha \\ \tan \varphi = \frac{q}{m} \tan \alpha = \frac{q^2}{m^2} \tan \beta \end{array} \right.$$

$$\overline{SA}^2 = \left(\frac{m^2}{q} \cos \alpha \right)^2 + (m \sin \alpha)^2 ; \quad \alpha = 0^\circ \quad \overline{SA} = \frac{m^2}{q} ; \quad \alpha = 90^\circ \quad \overline{SA} = m$$

L'ultima formula dà il valore del segmento perpendicolare alla tangente in un punto dell'Ellisse, svolgendola:

$$|\overline{SA}| = \frac{m}{q} \sqrt{m^2 \cos^2 \alpha + q^2 \sin^2 \alpha} \quad (\text{con asse } m \text{ sull'ascissa})$$

$$|\overline{SA}| = \frac{m}{q} \sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha} \quad (\text{con asse } q \text{ sull'ascissa})$$

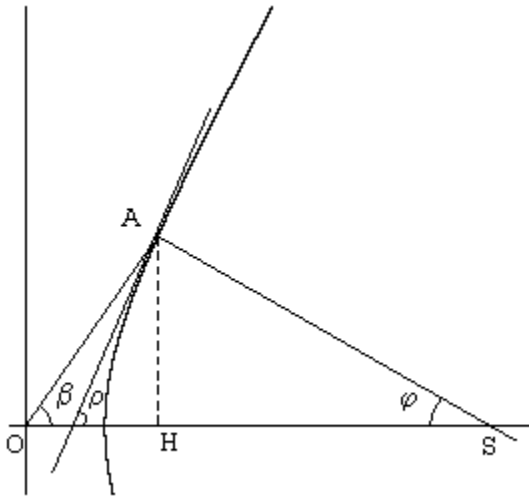
Dal Cap.VII "ARCO DELL'ELLISSE - RETTIFICAZIONE" abbiamo che:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha} \quad \text{ellisse con asse } q \text{ sull'ascissa, pertanto}$$

$$\overline{SA} = \left(\frac{m}{q} \frac{ds}{d\alpha} \right); \quad \frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m} \overline{SA} \quad \alpha = 0^\circ \quad \frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m} \frac{m^2}{q} = m \quad \alpha = 90^\circ \quad \frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m} m = q$$

PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELL'IPERBOLE

Sia la tangente nel punto A (x,y) all'iperbole (vedi figura) e la



perpendicolare ad esso. La relazione che lega gli angoli φ e ρ è la stessa che abbiamo visto nell'ellisse:

$$\tan \rho = -\frac{1}{\tan(180 - \varphi)} = \frac{m}{q} \frac{1}{\sin \alpha} \quad \text{quindi}$$

$$\tan \varphi = \frac{q \sin \alpha}{m}; \quad m \sin \varphi = q \sin \alpha \cos \varphi$$

Sapendo che:

$$\begin{cases} SA \cos \varphi = SH = OS - OH = OS - \frac{q}{\cos \alpha} \\ SA \sin \varphi = OA \sin \beta = m \tan \alpha \end{cases}$$

da cui $m \overline{SA} \sin \varphi = q \sin \alpha \overline{SA} \cos \varphi$ $m^2 \tan \alpha = q \sin \alpha \left(\overline{OS} - \frac{q}{\cos \alpha} \right)$

$$m^2 \tan \alpha = q \sin \alpha \overline{OS} - q^2 \tan \alpha \quad q \sin \alpha \overline{OS} = (m^2 + q^2) \tan \alpha \quad \overline{OS} = \frac{m^2 + q^2}{q} \frac{1}{\cos \alpha} = e^2 \frac{q}{\cos \alpha}$$

Sostituiamo: $\begin{cases} SA \cos \varphi = \frac{q}{\cos \alpha} (e^2 - 1) = \frac{m^2}{q} \frac{1}{\cos \alpha} \\ SA \sin \varphi = m \tan \alpha \end{cases}$ $\tan \varphi = \frac{q}{m} \sin \alpha = \frac{q^2}{m^2} \tan \beta$

$$\overline{SA}^2 = \left(\frac{m^2}{q} \frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 + (m \tan \alpha)^2 \quad \overline{SA}^2 = \frac{m^4}{q^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{m^2 q^2}{q^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha};$$

$$\overline{SA} = \frac{m}{q \cos \alpha} \sqrt{m^2 + q^2 \sin^2 \alpha} = \frac{m \cos \alpha}{q} \frac{\sqrt{m^2 + q^2 \sin^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha}$$

ma come abbiamo visto per l'ellisse dal Cap.VII "PERIMETRO DELL'IPERBOLE (RETTIFICAZIONE)" sappiamo:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{m^2 + q^2 \sin^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha} \quad \text{avremo:} \quad \overline{SA} = \frac{m \cos \alpha}{q} \frac{ds}{d\alpha} \quad \frac{ds}{d\alpha} = \overline{SA} \frac{q}{m \cos \alpha}$$

infine applicando la [2] si ottiene:

$$\frac{ds}{d\beta} = p \frac{\sqrt{2(1-\cos\beta)}}{(1-\cos\beta)^2} \quad [3]$$

Considerazioni sulla tangente della parabola.

Si osservi che:

$$\overline{HT} = \frac{\overline{HA}}{\tan \rho} \quad \overline{HA} = y \quad \tan \rho = \frac{p}{y} \quad \overline{HT} = \frac{y^2}{p}$$

dai valori della pagina precedente si sostituisca y:

$$\overline{HT} = \frac{1}{p} \left(\frac{p \sin \beta}{1 - \cos \beta} \right)^2 = p \frac{1 - \cos^2 \beta}{(1 - \cos \beta)^2} = p \frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}$$

Vediamo come $TV=VH$ infatti:

$$\overline{VH} = \frac{p}{2} + x = \frac{p}{2} + \frac{p \cos \beta}{1 - \cos \beta} = \frac{p}{2} \frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta} = \frac{\overline{HT}}{2}$$

pertanto $\overline{TV} = \overline{HT} - \overline{VH}$ quindi $\overline{TV} = \frac{\overline{HT}}{2} = \overline{VH}$

In una parabola con origine nel Fuoco la tangente in un suo punto taglia l'asse delle X in un punto che dista dal vertice:

$$\overline{TV} = \overline{VH} = \frac{p}{2} + x = \frac{p}{2} \frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}$$

Inoltre: $\overline{TO} = \overline{TV} + \overline{VO} = \left(\frac{p}{2} + x \right) + \frac{p}{2} = (p+x) = \overline{OA}$

Poichè TOA è un triangolo isoscele in O è $\beta=2\rho$.

Potendosi considerare OA raggio di una circonferenza di centro O, anche TO diventa raggio di tale circonferenza.

Sarà anche $\overline{SH} = \overline{SO} - \overline{HO} = (p+x) - x = p = \overline{OB}$ (parametro della Parabola)

RIEPILOGANDO:

$$\overline{SO} = \overline{OA}; \quad \overline{OT} = \overline{OA}; \quad \overline{SH} = \overline{OB} = p \text{ (costante)}; \quad \overline{TV} = \overline{VH}$$

Detto γ l'angolo della tangente in A alla circonferenza avremo:

$$\beta = 2\rho$$

$$\gamma = 90^\circ - \beta; \quad \beta = 90^\circ - \gamma; \quad \gamma = 90^\circ - 2\rho.$$