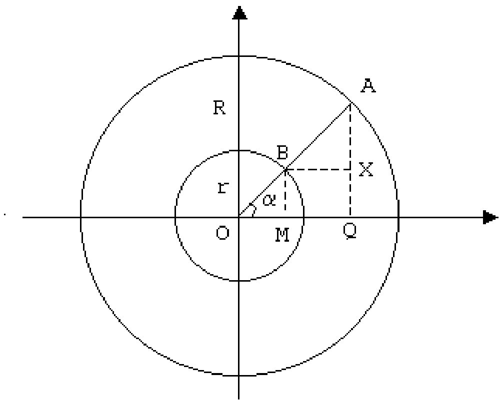
V. PARAMETRI COME FUNZIONE DI CIRCONFERENZA E COME VALORI DELLE COORDINATE

I PARAMETRI DI ELLISSE, IPERBOLE E PARABOLE COME FUNZIONE DI CIRCONFERENZA

Si è visto sin qui che il vantaggio dell'uso delle Equazioni di Vag è essenzialmente nel fatto di poter dare ai membri di tale equazione valori opportuni purchè si rispetti la condizione propria di tale equazione.
Qui vogliamo far vedere come sia possibile rappresentare i parametri delle Curve classiche mediante valori forniti da una circonferenza.

ELLISSE

Siano dunque due circonferenze di raggio rispettivamente R e r, come da fig., si avrà per un angolo α



$\overline{OQ} = R\cos\alpha \quad e \quad \overline{MB} = \overline{XQ} = r sen\alpha$

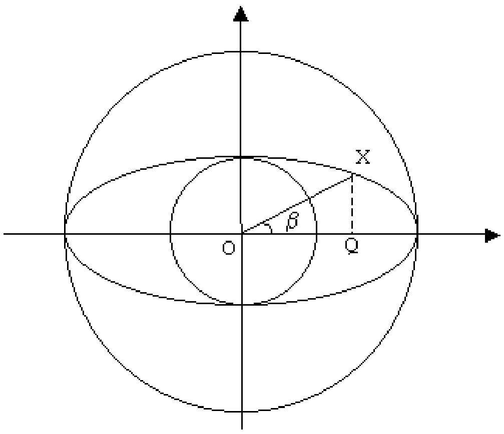
posto $\overline{OX}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{XQ}^2$

e per un opportuno β avremo l'Eq. Di Vag:

$$\left|\overline{OX}\right| = \overline{OQ}\cos\beta + \overline{BM} sen\beta$$

$$\begin{cases} \left|\overline{OX}\right|\cos\beta = R\cos\alpha = \overline{OQ} \\ \left|\overline{OX}\right| sen\beta = r sen\alpha = \overline{QX} \end{cases}$$

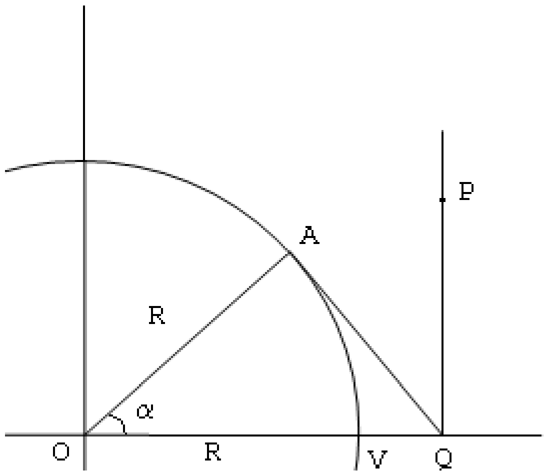
$$\tan\beta = \frac{r}{R}\tan\alpha$$



facendo q =R e m = r riavrò la classica equazione parametrica dell'Ellisse in funzione delle circonferenze e dell'angolo α per 0°≤ α ≤ 360°:

$$\left|\overline{OX}\right| = (q\cos\alpha)\cos\beta + (m\, sen\alpha) sen\beta$$

IPERBOLE EQUILATERA



$$\overline{OQ} = \frac{R}{\cos\alpha} \; ; \; \overline{QA} = \overline{QP} = R\tan\alpha$$

$$\overline{OP}^2 = R^2 \frac{(1+\mathrm{sen}^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

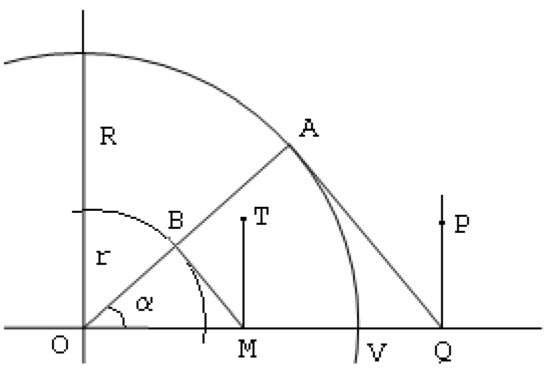
$$\begin{cases} \overline{OP}\cos\beta = \dfrac{R}{\cos\alpha} \\ \overline{OP}\,\mathrm{sen}\,\beta = R\tan\alpha \end{cases}$$

$$\tan\beta = \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$(q = m = R; 0° \le \alpha \le 360°)$$

Si osservi che i valori di x e y sono i valori delle funzioni Parametriche (Goniometriche)Iperboliche (vedi Cap.III "Le Curve" Pag.7).

IPERBOLE



$$\overline{OQ} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$\overline{BM} = \overline{MT} = \overline{QP} = r\tan\alpha$$

$$\overline{OP}^2 = \frac{R^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\begin{cases} \overline{OP}\cos\beta = \dfrac{R}{\cos\alpha} \\ \overline{OP}\,\mathrm{sen}\,\beta = r\tan\alpha \end{cases}$$

$$\tan\beta = \frac{r}{R}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$(q = R; m = r; 0° \le \alpha \le 360°)$$

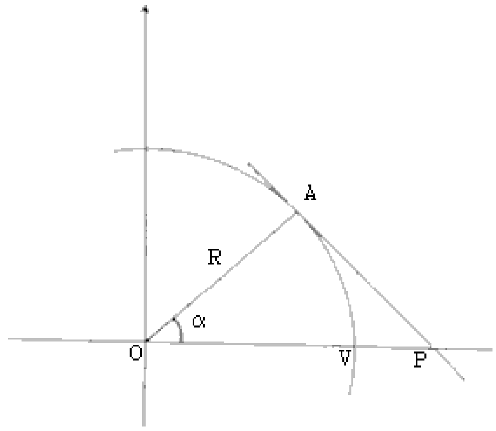
PARABOLA

Come per l’ellisse e l’Iperbole anche per la Parabola e possibile il calcolo tramite una circonferenza.
In precedenza abbiamo visto che le quattro Parabole fondamentali hanno come distanza di ciascun punto della curva dall’origine:

$$\frac{p}{2} \le (p \pm x); \quad \frac{p}{2} \le (p \pm y)$$

cioè un valore positivo uguale o maggiore a $\frac{p}{2}$ il che possiamo rappresentarlo facendo con $0° \le \alpha \le 90°$.

$$\frac{p}{2}\frac{1}{\cos\alpha} = (p \pm x) \text{ oppure } \frac{p}{2}\frac{1}{\cos\alpha} = (p \pm y)$$



Dalla figura vediamo $\overline{OP} = \frac{R}{\cos\alpha}$ per cui posto p=2R (R distanza Vertice-Fuoco per definizione) avremo:

$$\frac{p}{2}\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha} = (2R \pm x); \frac{R}{\cos\alpha} = (2R \pm y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x \\ \dfrac{R}{\cos\alpha} sen\beta = y \end{cases}$$

In questa ultima Eq. di Vag abbiamo soltanto la distanza OP(distanza di un punto di Parabola dal Fuoco nell’Origine) e nessun legame tra gli angoli α e β per ottenere le quali e le quattro parabole, dobbiamo dare dei valori alle rispettive coordinate ricavandole dall’uguaglianza precedente:

$$x = \frac{R}{\cos\alpha} - 2R = 2R - \frac{R}{\cos\alpha}$$ parabole aperte a destra e a sinistra

$$y = \frac{R}{\cos\alpha} - 2R = 2R - \frac{R}{\cos\alpha}$$ parabole aperte in alto e in basso

Analizziamo le parabole aperte a destra e a sinistra cioè quelle di valore $(p \pm x)$ (analogo ragionamento vale per le parabole aperte in alto e in basso).

Prendiamo le parabole tipo (p+x) (aperte a destra) e scriviamone l’Eq. di Vag:

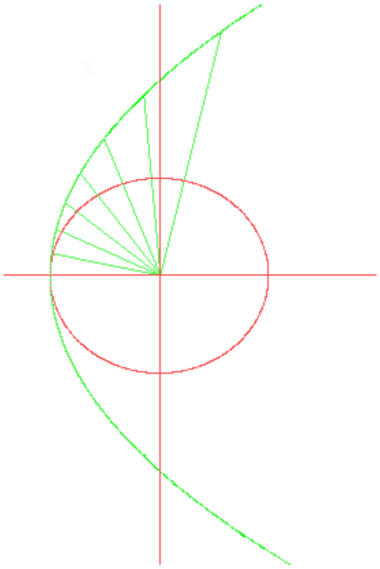
$$\begin{cases} \dfrac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = (\dfrac{R}{\cos\alpha} - 2R) = \dfrac{R}{\cos\alpha}(1 - 2\cos\alpha) \\ \dfrac{R}{\cos\alpha}\,\text{sen}\,\beta = y \end{cases}$$

prendendo $x = 2R - \frac{R}{\cos\alpha}$ (aperte a sinistra) il valore della y non cambia.
Dalla prima riga del sistema si può ottenere il valore di $\beta = \arccos(1 - 2\cos\alpha)$ e da questo ottenere tramite la seconda riga il valore di y. Volendo possiamo anche fare:

$$y^2 = \left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2 (1-2\cos\alpha)^2 = 4\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2 (\cos\alpha - \cos^2\alpha)$$

$$y = \pm 2\frac{R}{\cos\alpha}\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$$

$$\begin{cases} \frac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = (\frac{R}{\cos\alpha} - 2R) = \frac{R}{\cos\alpha}(1 - 2\cos\alpha) \\ \frac{R}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta = y = \frac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \end{cases}$$



Tale parabola ha il fuoco nell'origine e Vertice (-R,0).
Dividendo i membri dell'Eq. di Vag avremo:

$$\begin{cases} \cos\beta = (1 - 2\cos\alpha) \\ \operatorname{sen}\beta = \pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)} \end{cases} \qquad \tan\beta = \frac{\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{+(1-2\cos\alpha)}$$

si stabilisce così il legame tra gli angoli α e β, e si osservi che:

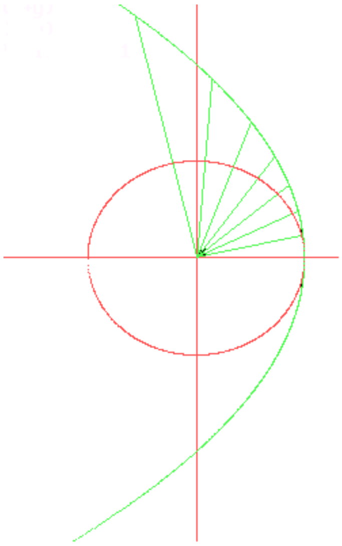
a] $R = R(1-2\cos\alpha)\cos\beta + R(\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)})\,sen\beta$

è Eq. di Vag di una circonferenza di raggio R.

b] $\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha)\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha}(\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)})\operatorname{sen}\beta$

è Eq. Di Vag di una parabola di parametro p=2R.

Prendiamo le parabole tipo (p-x) (aperta a sinistra): $x = -(\frac{R}{\cos\alpha} - 2R)$
tutto il procedimento visto non sarebbe cambiato se non per il solo valore della x (negativo in questo caso).L'Eq. di Vag risultante sarebbe stata:



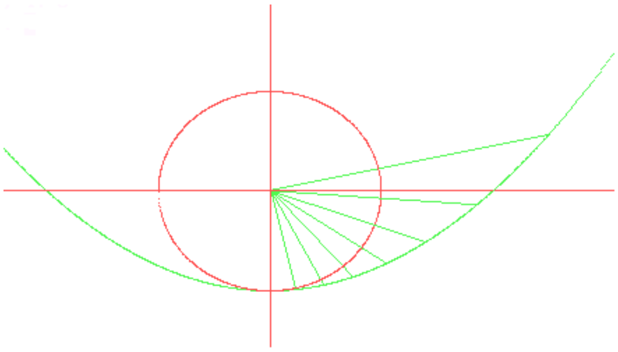
$$\begin{cases} \dfrac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = -\left(\dfrac{R}{\cos\alpha} - 2R\right) = -\dfrac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha) \\ \dfrac{R}{\cos\alpha}\mathrm{sen}\beta = y = \dfrac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \end{cases}$$

$$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha} - (1-2\cos\alpha)\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha}\left(\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right)\mathrm{sen}\beta$$

Il rapporto tra α e β non è mutato:

$$\tan\beta = \frac{\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{-(1-2\cos\alpha)} = \frac{\mp 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{+(1-2\cos\alpha)}$$

Prendiamo le parabole tipo (p+y) (aperta verso l’alto):

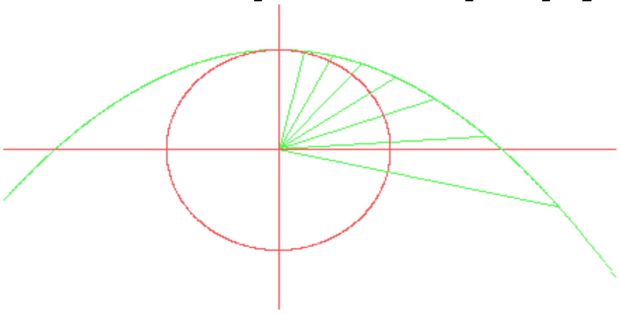


$$\begin{cases} \dfrac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = \dfrac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \\ \dfrac{R}{\cos\alpha}\mathrm{sen}\beta = y = \left(\dfrac{R}{\cos\alpha} - 2R\right) = \dfrac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\tan\beta = \frac{(1-2\cos\alpha)}{\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}$$

$$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right]\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha)\mathrm{sen}\beta$$

Prendiamo le parabole tipo (p-y) (aperta verso il basso):



$$\begin{cases} \dfrac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = \dfrac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \\ \dfrac{R}{\cos\alpha}\mathrm{sen}\beta = y = \left(\dfrac{R}{\cos\alpha} - 2R\right) = -\dfrac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\tan\beta = \frac{+(1-2\cos\alpha)}{\mp 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}$$

$$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right]\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha} - (1-2\cos\alpha)\mathrm{sen}\beta$$

TANGENTE DELLA PARABOLA (DERIVATA)

Prendiamo in considerazione i valori dell'Eq.Parametrica (p+x):

$$y=\frac{R}{\cos\alpha}\left[+2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right]; \qquad x=\frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha)$$

e cerchiamone la derivata prima:

$$\frac{dy}{d\alpha}=\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)'\left(2\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)+\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)\left(2\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)'=$$

$$=\frac{Rsen\alpha}{\cos^2\alpha}2\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{Rsen\alpha}{\cos\alpha}\frac{2\cos\alpha-1}{\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{Rsen\alpha}{\cos^2\alpha}\left[\left(2\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)+\frac{2\cos^2\alpha-\cos\alpha}{\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}}\right]=$$

$$=\frac{Rsen\alpha}{\cos^2\alpha}\left[\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}}\right]$$

$$\frac{dx}{d\alpha}=\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)'(1-2\cos\alpha)+\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)(1-2\cos\alpha)'=\frac{Rsen\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{2Rsen\alpha}{\cos\alpha}+\frac{2Rsen\alpha}{\cos\alpha}=\frac{Rsen\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{dy}{dx}=\tan\rho=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}}=\frac{\sqrt{\cos\alpha-\cos^2\alpha}}{(1-\cos\alpha)}=\sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

da quanto visto nei capitoli precedenti si avrà:

Caso (p+x): $\tan\rho=\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}=\frac{1-\cos\beta}{sen\beta}=\sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ dove $\cos\alpha=\frac{1-\cos\beta}{2}$

Caso (p-x): $\tan\rho=\frac{dy}{dx}=-\frac{p}{y}=-\frac{1+\cos\beta}{sen\beta}=-\sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ dove $\cos\alpha=\frac{1+\cos\beta}{2}$

Caso (p+y): $\tan\rho=\frac{dy}{dx}=\frac{x}{p}=\frac{\cos\beta}{1-sen\beta}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}}$ dove $\cos\alpha=\frac{1-\sin\beta}{2}$

Caso (p-y): $\tan\rho=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{p}=-\frac{\cos\beta}{1+sen\beta}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}}$ dove $\cos\alpha=\frac{1+\sin\beta}{2}$

EQ. DEL MOTO DEGLI ASTEROIDI

Da ciò che abbiamo visto nel precedente Titolo "PARABOLA", scriviamo l'Eq. della "PARABOLA di Vag":

a]
$$\begin{cases} \frac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = \pm(\frac{R}{\cos\alpha} - 2R) = \pm\frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha) \\ \frac{R}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta = y = \frac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \end{cases}$$

che può anche essere scritta (intendendo α=90-α cioè cos(90-α)= senα):

b]
$$\begin{cases} \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\beta = x = \pm(\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} - 2R) = \pm\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}(1-2\operatorname{sen}\alpha) \\ \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\beta = y = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\operatorname{sen}\alpha(1-\operatorname{sen}\alpha)}\right] \end{cases}$$

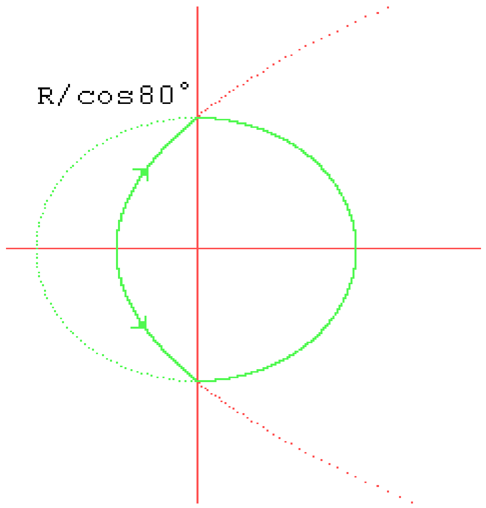
Entrambe hanno lo stesso significato con la sola differenza che a] parte dal vertice della parabola verso l' infinito mentre la b] viene dall'infinito verso il vertice.
Si osservi la seguente variazione:

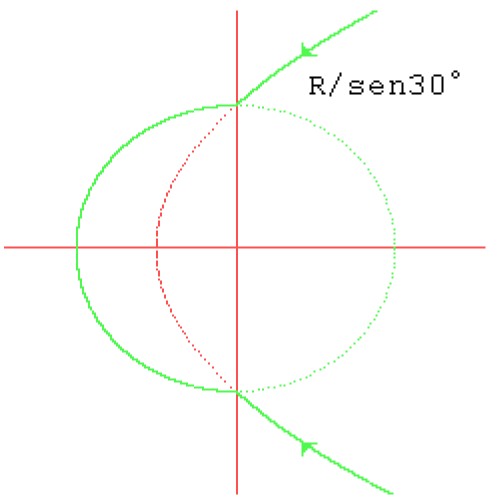
$$\begin{cases} x = \pm\frac{R}{\cos\alpha_1}(1-2\cos\alpha) \\ y = \frac{R}{\cos\alpha_1}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \end{cases}$$

dove ponendo α_1=α non ci sarà nessuna diversità con le Eq. Di Vag viste sopra. Se però poniamo un limite ad α_1:

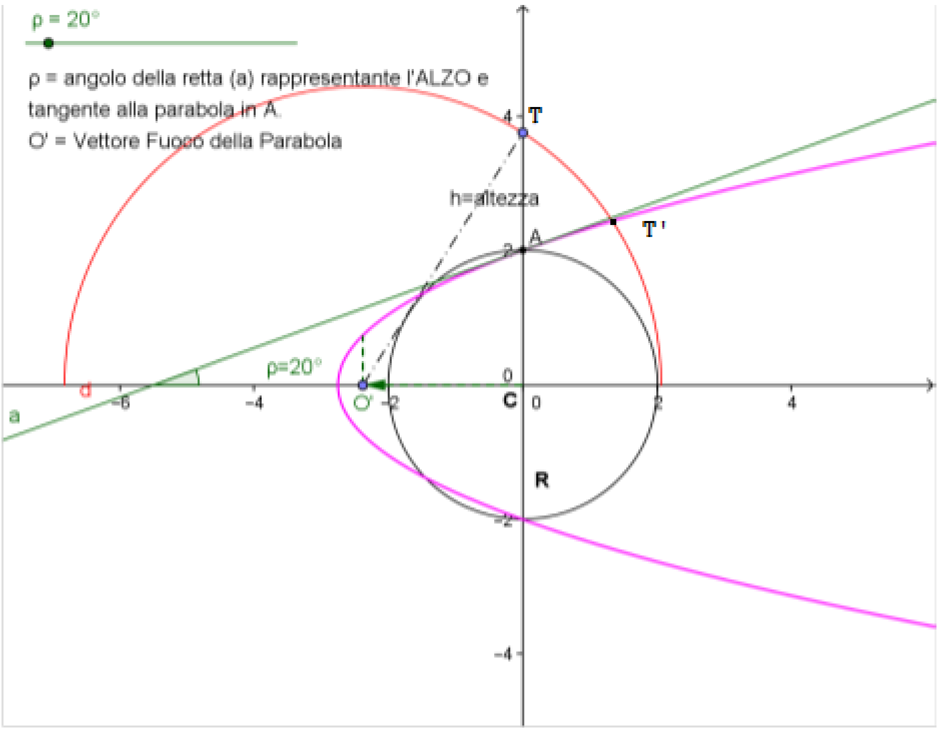
$$\begin{cases} \alpha = 0°..............\alpha'....................90° \\ \alpha_1 = 0°..............\alpha'...\alpha'..\alpha'...\alpha'...\alpha' \end{cases}$$

cioè α_1=α fino al valore α' dopo di che α_1=α' costante si avrà che nella equazione anche $\frac{R}{\cos\alpha'} = R'$ e la equazione sarà una parabola fino al valore α_1=α' dopo di che diventerà una circonferenza di raggio R'





PARABOLA DEL MOTO TRAMITE UNA SUA TANGENTE



Sia ρ angolo di una tangente in A(0,R) della parabola che vogliamo cercare: il tutto come in figura sopra.
La tangente è relativa ad una Parabola riferita al suo Fuoco del tipo (p+x) di cui abbia visto in precedenza.

$$\tan\rho = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{p}{R} = \frac{1-\cos\beta}{sen\beta} = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

dove $\cos\alpha = \frac{1-\cos\beta}{2}$ e β = 2ρ (Cap.III Bis Pag.4)

quindi il Parametro della parabola è: p=ytan(ρ)= Rtan(ρ)

pertanto possiamo scrivere l' Eq. della parabola cercata:

$$\begin{cases} \frac{p}{1-\cos\beta}\cos\beta = x \\ \frac{p}{1-\cos\beta}\sin\beta = y = R \end{cases} \qquad p = \frac{R(1-\cos\beta)}{\sin\beta} \quad parametro\ Parabola$$

da cui $x = \frac{\cos\beta}{1-\cos\beta}\frac{R(1-\cos\beta)}{\sin\beta} = \frac{R}{\tan\beta} = \frac{R}{\tan 2\rho}$

analogamente $\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{R}{x}$ $\qquad x = \frac{R}{\tan\beta} = \frac{R}{\tan 2\rho}$

Il valore della x, è quello della distanza O'A=(p+x) e la x è l'ascissa del Fuoco con Coordinate O'=F(x,0)= $\left(\frac{R}{\tan 2\rho},0\right)$.

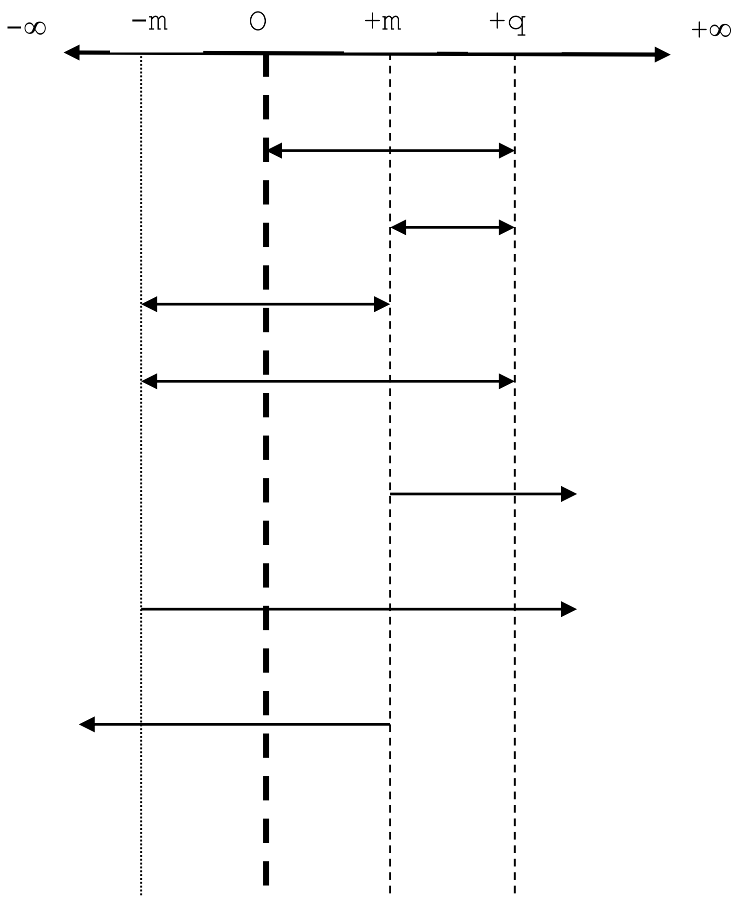
In funzione del valore della variabile ρ della tangente in A possiamo ottenere, con lo stesso procedimento qualunque altra parabola.
Nella pagina 7, precedente, abbiamo visto come una parabola si possa trasformare in una circonferenza: cerchiamo dunque la circonferenza che passi per un dato punto T (AT= h)il che varrà per tutte le nostre parabole ottenute dalle varie tangenti, le quali rappresentano l'"ALZO" nel punto A.
Per definizione (p + x)= O'T =O'T'= R_T (raggio della circonferenza) essendo T' punto della parabola e della nuova circonferenza: abbiamo visto nella pag. precedente che se la variabile α diviene α_1 costante la parabola diventa una circonferenza per

$$\left(\frac{R}{\cos\alpha_1} = R_T\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha_1 = \frac{R}{R_T}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{R}{\cos\alpha_1}(1-2\cos\alpha) = R_T\ (1-2\cos\alpha) \\ y = \dfrac{R}{\cos\alpha_1}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] = R_T\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \end{cases}$$

l'ultima espressione è l'eq. parametrica della circonferenza di raggio R_T passante per T.

SCHEMA DEI VALORI DELLE COORDINATE



	(derivate)
$q \cos\alpha$	$-q \operatorname{sen}\alpha$
$(q-m)\cos\alpha + m$	$-(q-m)\operatorname{sen}\alpha$
$(2m\cos\alpha - m)$	$-2m \operatorname{sen}\alpha$
$(q+m)\cos\alpha - m$	$-(q+m)\operatorname{sen}\alpha$
$\frac{m}{\cos\alpha}$	$-\frac{m\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}$
$\frac{m}{\cos\alpha} - 2m$	$-\frac{m\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}$
$2m - \frac{m}{\cos\alpha}$	$\frac{m\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}$

Si possono prendere in considerazione anche i valori seno e tangente.

Una particolare applicazione per convertire dell’ espressioni in coordinate parametriche è quella di utilizzare i PARAMETRI dell’ ellisse e dell’iperbole.
Nel relativo capitolo avevamo descritto le curve ellisse e iperbole partendo dalle equazioni generiche:

Ellisse	$\begin{cases} x = q\cos\alpha \\ y = m\sin\alpha \end{cases}$	$mq = mx\cos\alpha + qy\sin\alpha$	$(mq)^2 = (mx)^2 + (qy)^2$
Iperbole	$\begin{cases} x = q/\cos\alpha \\ y = m\sin\alpha/\cos\alpha \end{cases}$	$mx = mq\cos\alpha + qy\sin\alpha$	$(mq)^2 = (mx)^2 - (qy)^2$
Iperboli (I°;II°) con asintoti le rette q e m	a) $\begin{cases} x = q/\cos\alpha \\ y = m/\sin\alpha \end{cases}$	$yx = mx\sin\alpha + qy\cos\alpha$	$(yx)^2 = (mx)^2 + (qy)^2$
	b) $\begin{cases} x = q/\cos\alpha \\ y = m\sin\alpha \end{cases}$	$mx = mq\cos\alpha + yx\sin\alpha$	$(yx)^2 = (mx)^2 - (mq)^2$

Come esempio di applicazione di queste formule si abbia, la generica espressione:

$ax^2 + by^2$

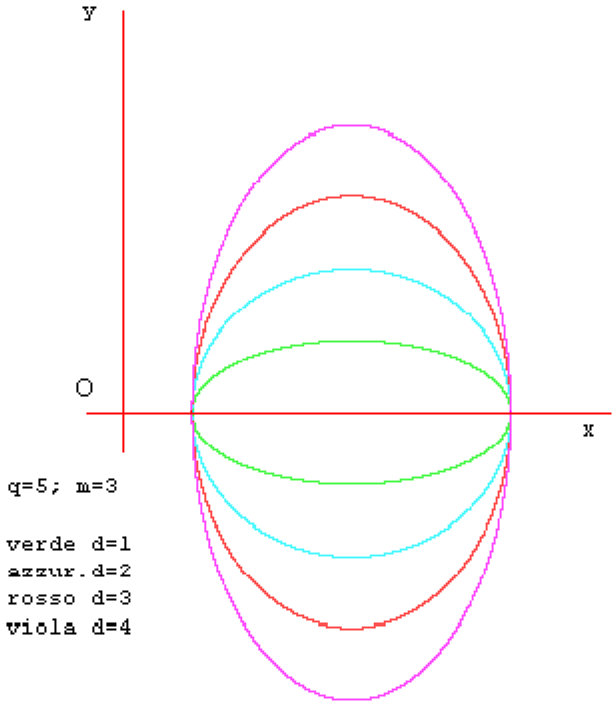
non avendo qui importanza se a è maggiore o minore di b, possiamo considerare a=m^2 e b=q^2 e scrivere:

$(mx)^2 + (qy)^2$

questa espressione raffrontata con la tabellina vista sopra può essere uguagliata alla ellisse per $(mq)^2$ e dare $mq = mx\cos\alpha + qy\sin\alpha$ oppure all’iperbole per $(yx)^2$ e dare $yx = mx\sin\alpha + qy\cos\alpha$: la scelta dipende evidentemente dall’ uso e significato che vogliamo.

PARAMETRI COME VALORI DELLE COORDINATE

Agli assi x e y è possibile assegnare dei valori secondo quanto visto nel precedente capitolo "SCHEMA DEI VALORI DELLE COORDINATE".
Per esempio posso considerare $x=q\cos\alpha_1$ e $y=m\cos\alpha_2$ e se poi considero $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1$ posso anche scrivere $x=q\cos\alpha_1$ e $y=m\,\mathrm{sen}\,\alpha_1$ che come Eq. di Vag rappresenta una Ellisse.
Analogamente avrei potuto scrivere $x=d\cos\alpha_1$ e $y=(q-m)\cos\alpha_2+m$ e per la medesima considerazione fatta sopra $y=(q-m)\,\mathrm{sen}\,\alpha_1+m$ e così via per tutte le altre combinazioni.
Tracciamone un esempio: $x=(q-m)\cos\alpha+m$ e $y=d\,\mathrm{sen}\,\alpha$, con $0°\leq \alpha \leq 360°$:



Si osservi che per d=2 l'Ellisse è data da: $x=2\cos\alpha+3 \quad y=2\sin\alpha$
cioè una circonferenza il cui centro è spostato dall'origine O di 3.

LA FIGURA "UOVO"

Manipolando opportunamente la formula parametrica possiamo ottenere diverse e nuove figure. Questa che presentiamo è derivata dalla Ellisse e assume la forma di un UOVO.

La formula: $$\begin{cases} x = (q\cos\alpha) + R\cos^2\alpha \\ y = m\sin\alpha \end{cases}$$

Dove q ed m sono i semi assi dell'Ellisse; R un qualunque valore.