VI. TRASLAZIONE ROTAZIONE ROTO-TRASLAZIONE

TRASLAZIONE

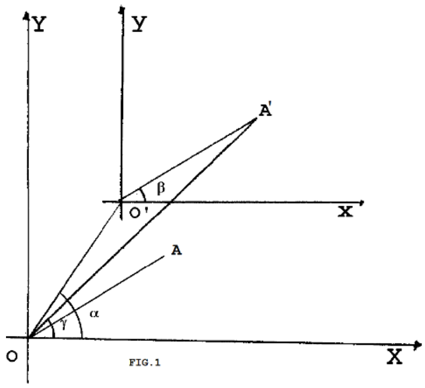


FIG.1

$$\begin{cases}\overline{OA}\cos\beta = X\\ \overline{OA}\sin\beta = Y\end{cases} \qquad \overline{OA} = \overline{O'A'} \qquad \begin{cases}\overline{OO'}\cos\alpha = a\\ \overline{OO'}\sin\alpha = b\end{cases}$$

$$\overline{OA'} = \overline{OO'} + \overline{O'A'}\ ; \qquad \overline{O'A'} = \overline{OA'} - \overline{OO'}$$

$$\begin{cases}\overline{OA'}\cos\gamma = \overline{O'A'}\cos\beta + \overline{OO'}\cos\alpha = x + a = X\\ \overline{OA'}\sin\gamma = \overline{O'A'}\sin\beta + \overline{OO'}\sin\alpha = y + b = Y\end{cases}$$

$$\overline{OA'} = \overline{OA'}\cos(\gamma-\beta) + \overline{OO'}\cos(\gamma-\alpha)$$

$$\begin{cases}\overline{O'A'}\cos\beta = \overline{OA'}\cos\gamma - \overline{OO'}\cos\alpha = X - a = x\\ \overline{O'A'}\sin\beta = \overline{OA'}\sin\gamma - \overline{OO'}\sin\alpha = Y - b = y\end{cases}$$

$$\overline{O'A'} = \overline{OA'}\cos(\beta-\gamma) - \overline{OO'}\cos(\beta-\alpha)$$

ROTAZIONE DI ρ DI OA

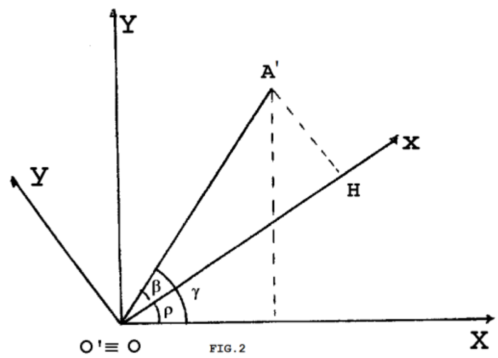


FIG.2

$$\begin{cases}\overline{OA}\cos\beta = X\\ \overline{OA}\sin\beta = Y\end{cases} \qquad \begin{matrix}\overline{OA} & \textit{posizione iniziale FIG.}1\\ \overline{OA} = \overline{O'A'} & \textit{posizione dopo } \rho\end{matrix}$$

$$\beta = \gamma - \rho \qquad \gamma = \beta + \rho$$

$$\begin{cases}\overline{O'A'}\cos\beta = x = \overline{OA}\cos(\gamma-\rho)\\ \overline{O'A'}sen\beta = y = \overline{OA}sen(\gamma-\rho)\end{cases} \quad \begin{cases}x = X\cos\rho + Ysen\rho\\ y = Y\cos\rho - Xsen\rho\end{cases}$$

$$\overline{O'A'} = \overline{OA}\cos(\gamma-\rho)\cos\beta + \overline{OA}\sin(\gamma-\rho)\sin\beta =$$
$$= \overline{OA}\cos[\gamma - (\rho+\beta)] = \overline{OA}$$

$$\begin{cases}\overline{O'A'}\cos\gamma = X = \overline{OA}\cos(\beta+\rho)\\ \overline{O'A'}\sin\gamma = Y = \overline{OA}\sin(\beta+\rho)\end{cases} \begin{cases}X = \overline{OA}\cos\beta\cos\rho - \overline{'A}\sin\beta\sin\rho\\ Y = \overline{OA}\sin\beta\cos\rho - \overline{OA}\cos\beta\sin\rho\end{cases} \begin{cases}X = x\cos\rho - y\sin\rho\\ Y = y\cos\rho + x\sin\rho\end{cases}$$

$$\overline{O'A'} = \overline{OA}\cos(\beta+\rho)\cos\gamma + \overline{OA}\sin(\beta+\rho)\sin\gamma =$$
$$= \overline{OA}\cos[\gamma - (\beta+\rho)] = \overline{OA}$$

Matrice di Rivoluzione: $\begin{vmatrix}\cos\rho & -\sin\rho\\ \sin\rho & \cos\rho\end{vmatrix}$

ROTO-TRASLAZIONE

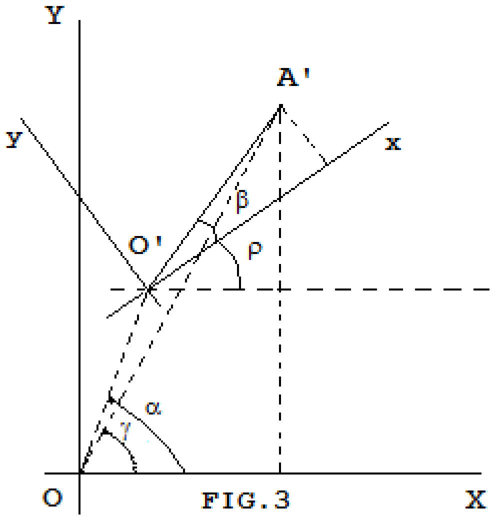


FIG.3

Sia OA'(X,Y) e angolo **γ** e O'A'(x,y) angolo β e $(OO'\cos\alpha = a, OO'sen\alpha = b)$ come da figura da cui l' Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{O'A'}\cos(\beta+\rho) = OA'\cos\gamma - OO'\cos\alpha = X - a \\ \overline{O'A'}\sin(\beta+\rho) = OA'\sin\gamma - OO'sen\alpha = Y - b \end{cases} \quad 1)$$

Sviluppiamo:

$$O'A' = (OA'\cos\gamma - OO'\cos\alpha)\cos(\beta+\rho) + (OAsen\gamma - OO'sen\alpha)sen(\beta+\rho)$$

$$O'A' = OA'\cos[\gamma - (\beta+\rho)] - O'O\cos[\alpha - (\beta+\rho)]$$

Infine l'Uguaglianza $O'A' = OA'\cos[(\gamma-\rho)-\beta] - O'O\cos[(\alpha-\rho)-\beta]$ *)

da cui:

$$\begin{cases} \overline{O'A'}\cos\beta = OA'\cos(\gamma-\rho) - OO'\cos(\alpha-\rho) = (X\cos\rho + Ysen\rho) - (a\cos\rho + bsen\rho) = x \\ \overline{O'A'}\sin\beta = OA'sen(\gamma-\rho) - OO'sen(\alpha-\rho) = (Y\cos\rho - Xsen\rho) - (b\cos\rho - asen\rho) = y \end{cases} \quad 1bis)$$

Inoltre dalla 1):

$$\begin{cases} \overline{O'A'}\cos\beta = (OA'\cos\gamma - OO'\cos\alpha)\cos\rho + (OA'\sin\gamma - OO'sen\alpha)sen\rho == (X-a)\cos\rho + (Y-b)sen\rho = x \\ \overline{O'A'}\sin\beta = (OA'sen\gamma - OO'sen\alpha)\cos\rho + (OA'\cos\gamma - OO'\cos\alpha)sen\rho = (Y-b)\cos\rho - (X-a)sen\rho = y \end{cases}$$

e le due forme uguali e risolutive:

$$1^*)\ \begin{cases} \overline{O'A'}\cos\beta = (X-a)\cos\rho + (Y-b)sen\rho = (X\cos\rho + Ysen\rho) - (a\cos\rho + bsen\rho) = x \\ \overline{O'A'}\sin\beta = (Y-b)\cos\rho - (X-a)sen\rho = (Y\cos\rho - Xsen\rho) - (b\cos\rho - asen\rho) = y \end{cases}$$

Spostando i termini nella 1):

$$2^*)\begin{cases}\overline{OA}'\cos\gamma = \overline{O'A}'\cos(\beta+\rho) + OO'\cos\alpha = (x\cos\rho - ysen\rho) + a = x + a = X \\ \overline{OA}'\sin\gamma = \overline{O'A}'\sin(\beta+\rho) + OO'\sin\alpha = (y\cos\rho + xsen\rho) + b = y + b = Y\end{cases} \quad 2)$$

da cui l'Uguaglianza:

$$\overline{OA} = \overline{O'A}\cos[\gamma - (\beta+\rho)] + \overline{O'O}\cos(\alpha-\gamma) \quad **)$$

Se **ρ=0** la 1) e la 2) diventano una traslazione.
Se $\overline{O'O} = 0$ la 1) e la 2) diventano una rotazione.

Traslazione e Rotazione nello stesso riferimento indichiamo la loro generica posizione:

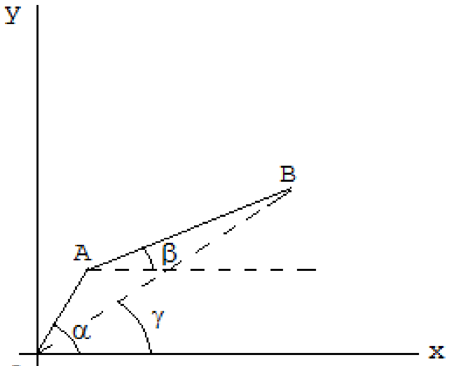


FIG.1

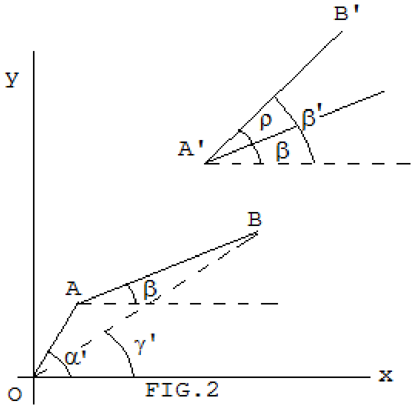


FIG.2

Traslazione: AB=A'B' $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB}$ come FIG.1 con angoli α,γ e β

$$\begin{cases}AB\cos\beta = OB\cos\gamma - OA\cos\alpha \\ AB\sin\beta = OB\sin\gamma - OA\sin\alpha\end{cases} \quad \begin{cases}OB\cos\gamma = OAos\alpha + AB\cos\beta \\ OB\sin\gamma = OA\sin\alpha + AB\sin\beta\end{cases} \quad \begin{cases}OA\cos\alpha = OB\cos\gamma - AB\cos\beta \\ OA\sin\alpha = OB\sin\gamma - AB\sin\beta\end{cases}$$

Roto-Traslazione: AB=A'B' $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$ $\overline{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$ $\overline{OA'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{A'B'}$

come FIG.2 con angoli α',γ' e β'=β+ρ

$$\begin{cases}A'B'\cos\beta' = OB'\cos\gamma' - OA'\cos\alpha' \\ A'B'\sin\beta' = OB'\sin\gamma' - OA'\sin\alpha'\end{cases}$$

$$\begin{cases}OB'\cos\gamma' = OA'\cos\alpha' + A'B'\cos\beta' \\ OB'\sin\gamma' = OA\sin\alpha' + A'B'\sin\beta'\end{cases} \quad \begin{cases}OA'\cos\alpha' = OB'\cos\gamma' - A'B'\cos\beta' \\ OA\sin\alpha = OB'\sin\gamma'' - A'B'\sin\beta'\end{cases}$$

Per ρ=0 sarà β'=β solo traslazione
Per A≡A' sarà α'=α solo rotazione

ROTO-TRASLAZIONE DELLE FIGURE

Proseguendo nel ragionamento precedentemente fatto, possiamo pensare O' come centro di una qualsivoglia figura, come ad esempio:

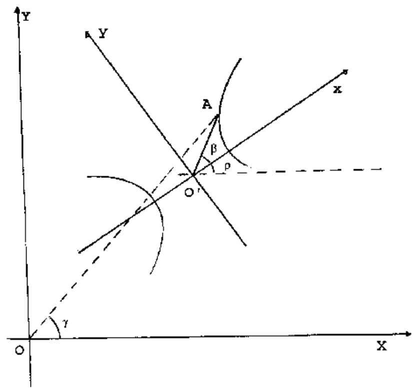
$O'A = r$ Circonferenza

$O'A = \sqrt{q^2 \cos^2\alpha + m^2 sen^2\alpha}$ Ellisse con centro O'

$O'A = \dfrac{p}{1-\cos\beta};\dfrac{p}{1-sen\beta}$ Parabola con Fuoco ≡ O'

$O'A = \sqrt{\dfrac{q^2 + m^2 sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$ Iperbole

Infatti se volessimo scrivere una IPERBOLE



$$\begin{cases} O'A\cos\beta = x = \dfrac{q}{\cos\alpha} \\ O'A sen\beta = y = m\tan\alpha \end{cases}$$

Supposto O'(a;b;α_0) rispetto ad O di YOX; e angoli ρ=xO'X, γ=AOX, applicherò la 2*) vista:

$$\begin{cases} OA\cos\gamma = X = \overline{O'A}\cos(\beta+\rho) + a \\ OA sen\gamma = Y = \overline{O'A} sen(\beta+\rho) + b \end{cases}$$

e l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} OA\cos\gamma = \left[\dfrac{q}{\cos\alpha}\cos\rho - m\tan\alpha sen\rho + a\right] \\ OA sen\gamma = \left[m\tan\alpha\cos\rho + \dfrac{q}{\cos\alpha} sen\rho + b\right] \end{cases}$$

da cui l'Uguaglianza:

$$OA = \frac{q}{\cos\alpha}\cos(\gamma-\rho) + m\tan\alpha sen(\gamma-\rho) + OO'\cos(\gamma-\alpha_0)$$

Se nell'ultima espressione vista consideriamo OO'=0 la roto-traslazione diventa una semplice rotazione degli assi. Fatto si e' che O'≡ O e O'A ≡ OA, per cui l' ultima espressione diventa l'Eq. di Vag:

$$O'A = OA = \frac{q}{\cos\alpha}\cos(\gamma-\rho) + m\tan\alpha sen(\gamma-\rho)$$

$$\begin{cases} OA\cos\beta = OA\cos(\gamma-\rho) = \dfrac{q}{\cos\alpha} = x \\ OA \,\mathrm{sen}\,\beta = OA\,\mathrm{sen}(\gamma-\rho) = m\tan\alpha = y \end{cases}$$

$$OA = \frac{q}{\cos\alpha}\cos\beta + m\tan\alpha sen\beta$$

Essendo gli angoli $\beta = (\gamma-\rho)$, si avrà:

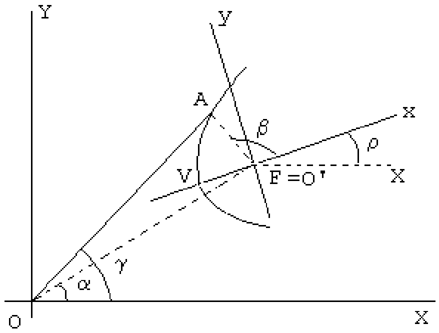
$$OA = \frac{q}{\cos\alpha}\cos(\gamma-\rho) + m\tan\alpha sen(\gamma-\rho) = \left(\frac{q}{\cos\alpha}\cos\rho - m\tan\alpha sen\rho\right)\cos\gamma + \left(\frac{q}{\cos\alpha} sen\rho + m\tan\alpha\cos\rho\right) sen\gamma$$

ed infine l' Eq. di Vag dell'Iperbole vista, ruotata di un angolo ρ:

$$\begin{cases} OA\cos\gamma = \left[\dfrac{q}{\cos\alpha}\cos\rho - m\tan\alpha\,\mathrm{sen}\,\rho\right] = X \\ OA\,\mathrm{sen}\,\gamma = \left[\dfrac{q}{\cos\alpha}\mathrm{sen}\,\rho + m\tan\alpha\cos\rho\right] = Y \end{cases}$$

$$OA = X\cos\gamma + Y\,\mathrm{sen}\,\gamma = X\cos(\beta+\rho) + Y\,\mathrm{sen}(\beta+\rho)$$

Se avessimo voluto scrivere una PARABOLA, in analogia alla Iperbole:



$$\begin{cases} O'A\cos\beta = x = \dfrac{p}{1-\cos\beta}\cos\beta \\ O'A\mathrm{sen}\beta = y = \dfrac{p}{1-\cos\beta}\sin\beta \end{cases}$$

Supposto O'=F (a;b;α) e V(p/2;0) applicando la 2*) analogamente all'esempio visto:

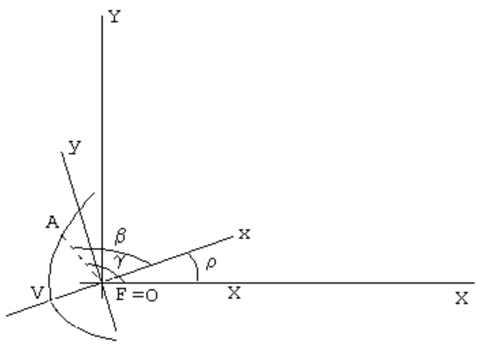
$$\begin{cases} OA\cos\gamma = X = \overline{O'A}\cos(\beta+\rho)+a \\ OA\mathrm{sen}\gamma = Y = \overline{O'A}\mathrm{sen}(\beta+\rho)+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA\cos\gamma = \left[\dfrac{p}{1-\cos\beta}\cos\beta\cos\rho - \dfrac{p}{1-\cos\beta}\sin\beta\mathrm{sen}\rho + a\right] \\ OA\sin\gamma = \left[\dfrac{p}{1-\cos\beta}\sin\beta\cos\rho + \dfrac{p}{1-\cos\beta}\cos\beta\mathrm{sen}\rho + b\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA\cos\gamma = \dfrac{p}{1-\cos\beta}\cos(\beta+\rho)+a \\ OA\sin\gamma = \dfrac{p}{1-\cos\beta}\sin(\beta+\rho)+b \end{cases}$$ da cui l'uguaglianza: $$OA = \frac{p}{1-\cos\beta}\cos(\gamma-(\beta+\rho)) + OO'\cos(\gamma-\alpha)$$

$$\begin{cases} OV\cos\gamma' = OF\cos\alpha + FV\cos(180+\rho) = a - \dfrac{p}{2}\cos\rho \\ OV\sin\gamma' = OF\sin\alpha + FV\sin(180+\rho) = b - \dfrac{p}{2}\sin\rho \end{cases}$$ $$OV = OF\cos(\gamma'-\alpha) - \frac{p}{2}\cos(\gamma'-\rho)$$

Se consideriamo OO'=0 la roto-traslazione diventa una semplice rotazione degli assi ed avremo che O'≡ O e O'A ≡ OA, F=0, γ=β+ρ e l'Eq. di Vag:



$$\begin{cases} FA\cos\gamma = OA\cos(\beta+\rho) \\ FA\sin\gamma = OA\sin(\beta+\rho) \end{cases} \qquad FA = OA$$

dove ricordiamo essere: $OA = \dfrac{p}{1-\cos\beta)} = (p+x)$

OSSERVAZIONE: negli esempi visti, si tenga presente il variare delle relative tangenti:

Rotazione:

1) Iperbole $\tan\beta = \tan(\gamma-\rho) = \dfrac{m}{q}\operatorname{sen}\alpha$; $\tan\gamma = \dfrac{\dfrac{m}{q}\operatorname{sen}\alpha + \tan\rho}{1-\dfrac{m}{q}\tan\alpha\tan\rho} = \dfrac{q\tan\rho + m\operatorname{sen}\alpha}{q - m\tan\alpha\tan\rho}$

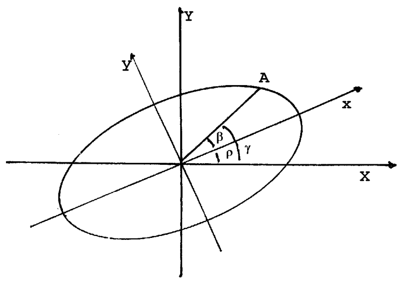
2) Ellisse $\tan\beta = \tan(\gamma-\rho) = \dfrac{m}{q}\tan\alpha$; $\tan\gamma = \dfrac{\dfrac{m}{q}\tan\alpha + \tan\rho}{1-\dfrac{m}{q}\tan\alpha\tan\rho} = \dfrac{q\tan\rho + m\tan\alpha}{q - m\tan\alpha\tan\rho}$

Roto-Traslazione:

1)Iperbole $\tan\gamma = \dfrac{m\operatorname{sen}\alpha\cos\rho + q\operatorname{sen}\rho + b\cos\alpha}{q\cos\rho - m\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\rho + a\cos\alpha}$

1)Parabola $\tan\gamma = \dfrac{p\sin(\beta+\rho) + b(1-\cos\beta)}{p\cos(\beta+\rho) + a(1-\cos\beta)}$

ROTAZIONE DELLA FIGURA (ELLISSE)



Facciamo l'esempio della sola rotazione di una ellisse; per definizione di Ellisse:

Eq. di Vag: $\begin{cases} OA\cos\beta = q\cos\alpha \\ OAsen\beta = msen\alpha \end{cases}$

Ma:

$$\begin{cases} OA\cos\gamma = OA\cos(\beta+\rho) \\ OAsen\gamma = OAsen(\beta+\rho) \end{cases}$$

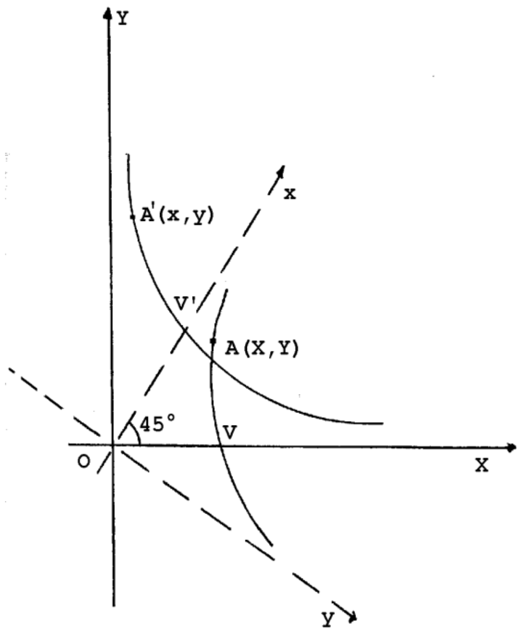
Sviluppiamo: $\begin{cases} OA\cos\gamma = (q\cos\alpha)\cos\rho - (msen\alpha)sen\rho \\ OAsen\gamma = (msen\alpha)\cos\rho + (q\cos\alpha)sen\rho \end{cases}$

Essendo la precedente espressione una Eq. di Vag si avrà di conseguenza:

$$\overline{OA} = q\,cos\,\alpha\,cos(\gamma-\rho) + m\,sen\,\alpha\,sen(\gamma-\rho)$$

$$\begin{cases} OA\cos(\gamma-\rho) = q\cos\alpha \\ OA\,\mathrm{sen}(\gamma-\rho) = m\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

ROTAZIONE DI UNA IPERBOLE EQUIL.(ESEMPIO)



Nel riferometo xOy tra le IP.EQ. vi e' quella avente per asintoti gli assi:

$$xy = a^2$$ dove

$a \in R^+ \quad e \quad V'(\pm a\,;\pm a) \quad OV' = a\sqrt{2}$

Si consideri invece una normale IPER.EQ. m=q. Posto $q^2=2a^2$ si avrà

$$X^2 - Y^2 = q^2 = 2a^2$$

per cui $q = a\sqrt{2}; \overline{OA} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}\sqrt{1+sen^2\alpha}$

$$X = \frac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha} \qquad V(a\sqrt{2};0)$$

$$Y = \frac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha \qquad OV = a\sqrt{2}$$

Si consideri una rotazione di 45° del riferimento xOy per cui A andrà in A’ e OA=OA’. Calcoliamo il punto A’ rispetto ai due riferimenti

$$\begin{cases} A\hat{O}X = A\hat{O}x = \beta \\ A'\hat{O}A = 45° \quad sen45 = \cos 45 = \sqrt{0{,}5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA\cos\beta = X \\ OAsen\beta = Y \end{cases} \quad \begin{cases} OA'\cos(\beta+45) = x = X\cos 45 - Ysen45 = (X-Y)\sqrt{0{,}5} \\ OA'sen(\beta+45) = y = Y\cos 45 + Xsen45 = (X+Y)\sqrt{0{,}5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (X-Y)\sqrt{0{,}5} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}(1-\operatorname{sen}\alpha)\sqrt{0.5} = \dfrac{a}{\cos\alpha}(1-\operatorname{sen}\alpha) \\ y = (X+Y)\sqrt{0{,}5} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}(1+\operatorname{sen}\alpha)\sqrt{0.5} = \dfrac{a}{\cos\alpha}(1+\operatorname{sen}\alpha) \end{cases}$$

se facciamo: $xy = (X^2 - Y^2)0{,}5 = (X^2 - Y^2)\dfrac{1}{2} = a^2$ riotteniamo la equazione di partenza.

ROTAZIONE DI UNA IPERBOLE EQUILATERA (continua)

Sia data una Iperb. Eq. del tipo:

$$X^2 - Y^2 = 2a^2$$

e la sua Eq. di Vag:

$$\begin{cases} X = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha} \\ Y = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha} sen\alpha \end{cases} \qquad \overline{OA} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}\sqrt{1+sen^2\alpha}$$

la sua rotazione di 45° e' l'Eq. di Vag vista:

$$xy = a^2$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}(1-\text{sen}\,\alpha) \\ y = \dfrac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}(1+\text{sen}\,\alpha) \end{cases}$$

$$OA' = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}\right)^2\left[(1-\text{sen}\,\alpha)^2 + (1+\text{sen}\,\alpha)^2\right]} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}2(1+\text{sen}^2\,\alpha)} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos\alpha}\sqrt{1+\text{sen}^2\,\alpha}$$

Dunque OA e OA' hanno lo stesso valore. Ma non è la stessa cosa se facessimo:

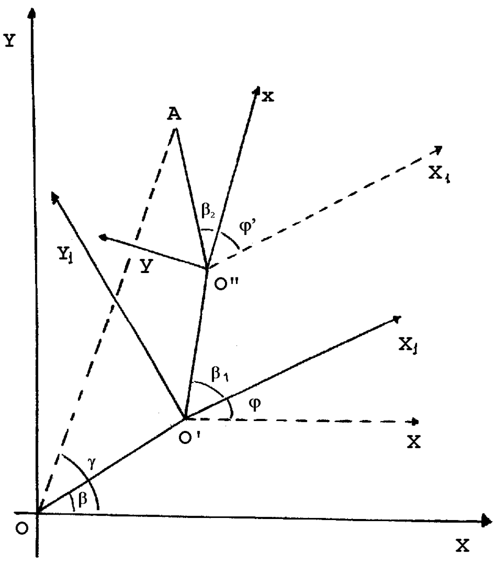
$$XY = \frac{2a^2}{\cos^2\alpha}\text{sen}\,\alpha; \qquad xy = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}(1-\text{sen}^2\,\alpha) = a^2$$

poichè pur rappresentando la stessa Iperb. Eq. le loro coord. si presentano diversamente, in quanto riferite a <u>due riferimenti diversi.</u>

LA ROTO-TRASLAZIONE DI UNA ROTO-TRASLAZIONE

Analogamente a quanto detto precedentemente, nella roto-traslazione di una roto-traslazione avremo:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\gamma = X = \overline{O''A}\cos(\beta_2+\varphi'+\varphi)+\overline{O'O''}\cos(\beta_1+\varphi)+\overline{OO'}\cos\beta \\ \overline{OA}sen\gamma = Y = \overline{O''A}sen(\beta_2+\varphi'+\varphi)+\overline{O'O''}sen(\beta_1+\varphi)+\overline{OO'}sen\beta \end{cases}$$



cioè l'Eq. di Vag:

$$\overline{OA} = X\cos\gamma + Ysen\gamma =$$

$$= \begin{bmatrix} O''A\cos(\beta_2+\varphi'+\varphi)+ \\ +O'O''\cos(\beta_1+\varphi)+OO'\cos\beta \end{bmatrix}\cos\gamma +$$

$$+\begin{bmatrix} O''Asen(\beta_2+\varphi'+\varphi)+ \\ +O'O''sen(\beta_1+\varphi)+OO'sen\beta \end{bmatrix}sen\gamma$$

ma anche l'Uguaglianza:

$$OA = O''A\cos[\gamma-(\beta_2+\varphi'+\varphi)]+ \\ +O'O''\cos[\gamma-(\beta_1+\varphi)]+OO'\cos(\gamma-\beta)$$

(uguaglianza che non e' che il Teorema delle Proiezioni.)

Posto $(\beta_2+\varphi'+\varphi)=\rho'$ $(\beta_1+\varphi)=\rho$ si potrà scrivere:

$$OA = O''A\cos(\gamma-\rho')+O'O''\cos(\gamma-\beta)+OO'\cos(\gamma-\rho)$$

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

(somma di due segmenti orientati)

Se nell' ultima eq. vista poniamo O'O"=zero avremo che O"A diventa O'A, da cui l'equazione:

$$OA = X\,cos\gamma + Ysen\gamma = \left[\overline{O'A}cos\rho + \overline{O'O}\,cos\beta\right]cos\gamma + \left[\overline{O'A}sen\rho + \overline{O'O}sen\beta\right]sen\gamma =$$
$$= \overline{O'A}cos(\gamma - \rho) + \overline{O'O}\,cos(\gamma - \beta)$$

Quest'ultima espressione non e' che la rappresentazione della <u>regola del parallelogramma</u> dove OA e' dato

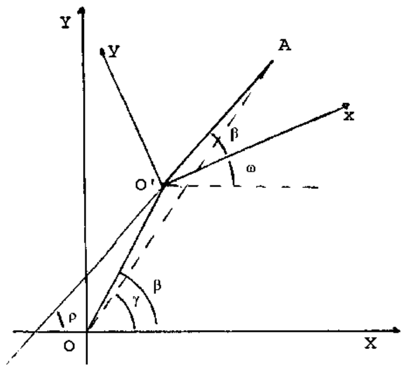


Fig.1

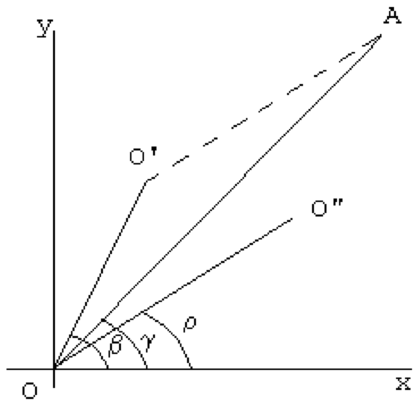


Fig.2

dalla somma dei due segmenti OO' e O'A orientati, come in Fig.1.

Se in un riferimento yox (Fig.2) poniamo O'A=OO" con i relativi angoli visti sopra possiamo ancora scrivere l'Uguaglianza:

$$OA = OO''\,cos(\gamma - \rho) + OO'\,cos(\gamma - \beta)$$

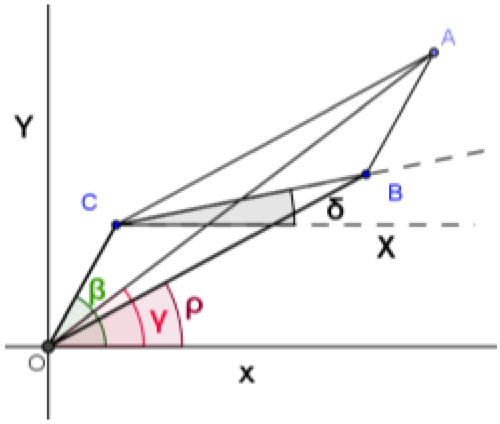
Da cui l'Eq. di Vag:

$$OA = x\,cos\gamma + ysen\gamma = \left[OO''\,cos\rho + OO'\,cos\beta\right]cos\gamma + \left[OO''\,sen\rho + OO'\,sen\beta\right]sen\gamma$$

che ha lo stesso significato di quanto visto sopra ed applicabile ad un numero qualunque di segmenti orientati.
Importante è che nella somma di due o più segmenti orientati, il loro risultato è IDENTICO sia che i segmenti siano uno attaccato all'altro (Fig.1), sia che partano da uno stesso punto (Fig.2).
(Uno o tutti gli angoli β,γ,ρ possono avere anche verso opposto: ad esempio l'angolo γ dà $\vec{OA}$, mentre dando allo stesso angolo il valore(180+γ) avremo $\vec{AO}$. Se ad esempio ricaviamo γ da β e ρ dobbiamo dargli il giusto valore considerando i segni del numeratore e denominatore del rapporto $\tan\gamma = \frac{\pm Y}{\pm X}$)

DISTANZA DI DUE PUNTI
(come differenza di due seg. orient.)

Abbiamo visto che applicando la regola del parallelogramma (vedi figura a lato) risulta l'uguaglianza:



$\overline{OA} = \overline{OC}\cos(\gamma-\beta) + \overline{OB}\cos(\gamma-\rho)$

e dalla considerazione che:

$C(x_c;y_c;\beta) \quad B(x_b;y_b;\rho)$

$$\begin{cases}\overline{OC}\cos\beta = x_c \\ \overline{OC}\sin\beta = y_c\end{cases} \qquad \begin{cases}\overline{OB}\cos\rho = x_b \\ \overline{OB}\sin\rho = y_b\end{cases}$$

abbiamo

$$(x_c - x_b)\cos\delta + (y_c - y_b)\,sen\,\delta = \left|\overline{CB}\right|$$

cioè una Eq. di Vag quando si prenda l'angolo BCX=δ

$$(x_c\cos\delta + y_c\,\mathrm{sen}\,\delta) - (x_b\cos\delta + y_b\,\mathrm{sen}\,\delta) =$$
$$= OC(\cos\beta\cos\delta + \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\delta) - OB(\cos\rho\cos\delta + \mathrm{sen}\,\rho\,\mathrm{sen}\,\delta) =$$
$$= \overline{OC}\cos(\delta-\beta) - \overline{OB}\cos(\delta-\rho) = \overline{CB}$$

In generale:

$$Ug.\begin{cases}OA = OC\,cos(\gamma-\beta) + OB\,cos(\gamma-\rho) \text{ (somma di due segmenti orient.)} \\ CB = OC\,cos(\delta-\beta) - OB\,cos(\delta-\rho) \text{ (distanza di due seg. orient.)}\end{cases}$$

$$\text{Eq. di Vag}\begin{cases}\mathrm{OA} = (\mathrm{OC}\cos\beta + \mathrm{OB}\cos\rho)\cos\gamma + (\mathrm{OCsen}\beta + \mathrm{OBsen}\rho)\mathrm{sen}\gamma \text{ (somma)} \quad *) \\ \mathrm{CB} = (\mathrm{OC}\cos\beta - \mathrm{OB}\cos\rho)\cos\delta + (\mathrm{OCsen}\beta - \mathrm{OBsen}\rho)\mathrm{sen}\delta \text{ (distanza)} \quad *)\end{cases}$$

$$**)\text{ somma }\begin{cases}\mathrm{OA}\cos\gamma = \mathrm{OC}\cos\beta + \mathrm{OB}\cos\rho \\ \mathrm{OAsen}\gamma = \mathrm{OCsen}\beta + \mathrm{OBsen}\rho\end{cases}; \qquad \begin{cases}**)\text{ distanza} \\ \text{come differenza}\end{cases} \begin{cases}\mathrm{CB}\cos\delta = \mathrm{OC}\cos\beta - \mathrm{OB}\cos\rho \\ \mathrm{CBsen}\delta = \mathrm{OCsen}\beta - \mathrm{OBsen}\rho\end{cases}$$

Nella **distanza come differenza** il valore di CB (come modulo) è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati di ****)**; mentre la differenza dei segmenti orientati è data da (OC-OB) per $\vec{CB}$ e (OB-OC) per $\vec{BC}$; ed il valore di δ si ha analizzando i segni del numeratore e denominatore del rapporto $\tan\delta = \frac{\pm Y}{\pm X}$:

$\frac{+Y}{+X}$ I°Quadrante δ=δ; $\qquad \frac{+Y}{-X}$ II°Q. δ vale (180-δ);

$\frac{-Y}{-X}$ III°Q. δ vale (180+δ); $\qquad \frac{-Y}{+X}$ IV°Q. δ vale (360-δ)

$$\tan\gamma = \frac{OC\sin\beta + OB\sin\rho}{OC\cos\beta + OB\cos\rho};\ \tan\delta = \frac{OC\sin\beta - OB\sin\rho}{OC\cos\beta - OB\cos\rho}$$

Quadriamo e sommiamo le ****)**

*****)** $\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{OC}\,\overline{OB}\cos(\beta - \rho)$ Somma di due segmenti

*****)** $\overline{CB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OC}\,\overline{OB}\cos(\beta - \rho)$ distanza di due punti

La seconda espressione non è che il Teorema di Carnot, mentre la prima è lo stesso teorema con segno cambiato. Posto $(\beta - \rho)=\alpha$ (angolo dei due seg. Orientati) e sviluppate le *****)** in forma parametrica abbiamo:

$$\overline{OA}^2 = \left[\left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\cos\alpha/2\right]^2 + \left[\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right)\sin\alpha/2\right]^2$$

$$\overline{CB}^2 = \left[\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right)\cos\alpha/2\right]^2 + \left[\left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\sin\alpha/2\right]^2$$

(uguale alle *****)** ricordando che $\cos^2\alpha/2 = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ e $\sin^2\alpha/2 = \frac{1-\cos\alpha}{2}$)

Espressioni che ci riportano alle Eq. Parametrica di Vag di due ellissi con angoli rispettivamente $\beta_{ellisse}$ e $\beta'_{ellisse}$:

$$\begin{cases}\overline{OA}\cos\beta_{ellisse} = \left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\cos\alpha/2 \\ \overline{OA}\sin\beta_{ellisse} = \left(\overline{OC} - \overline{OB}\right)\sin\alpha/2\end{cases}$$

$$\overline{OA} = \left[\left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\cos\alpha/2\right]\cos\beta_{ellisse} + \left[\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right)\sin\alpha/2\right]\sin\beta_{ellisse}$$

$$\begin{cases}\overline{BC}\cos\beta'_{ellisse} = \left(\overline{OC} - \overline{OB}\right)\cos\alpha/2 \\ \overline{BC}\sin\beta'_{ellisse} = \left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\sin\alpha/2\end{cases}$$

$$\overline{CB} = \left[\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right)\cos\alpha/2\right]\cos\beta'_{ellisse} + \left[\left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\sin\alpha/2\right]\sin\beta'_{ellisse}$$

$$\tan\beta_{ellisse} = \frac{OC - OB}{OC + OB}\tan\alpha/2 \qquad \tan\beta'_{ellisse} = \frac{OC + OB}{OC - OB}\tan\alpha/2$$

$$\frac{\tan\beta_{ellisse}}{\tan\beta'_{ellisse}} = \frac{(OC - OB)^2}{(OC + OB)^2} \qquad \tan\beta_{ellisse}\tan\beta'_{ellisse} = \tan^2\alpha/2$$

VALORE DEGLI ANGOLI IN UNA ROTO-TRASLAZIONE

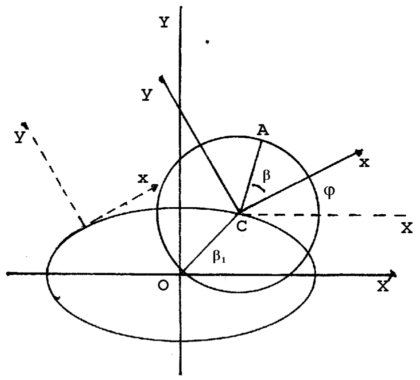


Fig. 1

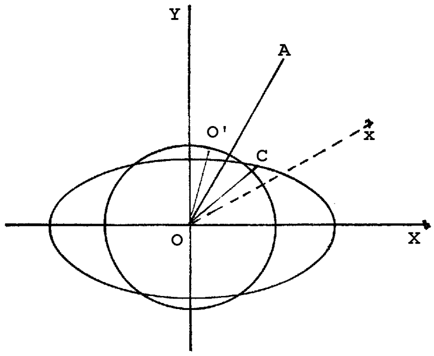


Fig. 2

Si consideri dunque una roto-traslazione di un sistema XOY in quello xOy, come in fig.1 dove il punto C ruota secondo una Ellisse; esso per quanto detto precedentemente nella “Somma di due segmenti orientati” può essere anche rappresentato da fig.2 ove si ponga CA=OO' e $\beta+\varphi=\gamma$, $\beta_2 = A\hat{O}X$

Si può scrivere per entrambi i casi di fig.1 e fig.2 l’uguaglianza somma di due segmenti:

$$OA = OC\cos(\beta_2 - \beta_1) + CA\cos(\beta_2 - \gamma) = OC\cos(\beta_2 - \beta_1) + OO'\cos(\beta_2 - \gamma)$$

Nelle figure abbiamo disegnato il segmento OC come la distanza di un punto di ellisse cioè

$$OC = \left|\sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2\,sen^2\,\alpha}\right|$$

preso in valore assoluto, essendo la distanza di una Eq. di Vag; mentre CA = OO' = R

L'angolo φ e' una costante perchè la posizione dell' asse x, pur spostandosi, e' parallela a se stessa. dunque:

$$\begin{cases} OA\cos\beta_2 = X = \sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2 sen^2\alpha}\cos\beta_1 + R\cos(\varphi+\beta) \\ OAsen\beta_2 = Y = \sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2 sen^2\alpha}\,sen\beta_1 + Rsen(\varphi+\beta) \end{cases}$$

Se tra gli angoli β_1 e β esiste una relazione del tipo: $\beta_1 \pm \beta = \mu$ oppure $\frac{\beta}{\beta_1} = c$ *oppure* $\beta_1\beta = D$ ecc. dove c e D e l'angolo μ sono costanti avrò

$$\beta = \mu \pm \beta_1;\ \beta = c\beta_1;\ \beta = \frac{D}{\beta_1};\text{per cui } (\varphi+\beta) = \begin{cases} \varphi + \mu \pm \beta_1 \\ \varphi + c\beta_1 \\ \varphi + \dfrac{D}{\beta_1} \end{cases}$$

e potrò ridurre la mia equazione alla sola β o alla sola β_1:

$$OA = \left[OC\cos\beta_1 + R\cos\begin{pmatrix} \varphi + \mu \pm \beta_1 \\ \varphi + c\beta_1 \\ \varphi + \dfrac{D}{\beta_1} \end{pmatrix} \right]\cos\beta_2 + \left[OCsen\beta_1 + Rsen\begin{pmatrix} \varphi + \mu \pm \beta_1 \\ \varphi + c\beta_1 \\ \varphi + \dfrac{D}{\beta_1} \end{pmatrix} \right]sen\beta_2$$

oppure all'eguaglianza:

$$OA = OC\cos(\beta_2 - \beta_1) - R\cos\begin{cases} [\beta_2 - (\varphi + \mu \pm \beta_1)] \\ [\beta_2 - (\varphi + c\beta_1)] \\ \left[\beta_2 - (\varphi + \dfrac{D}{\beta_1})\right] \end{cases}$$

ESEMPIO 1° (come circonferenza traslata)

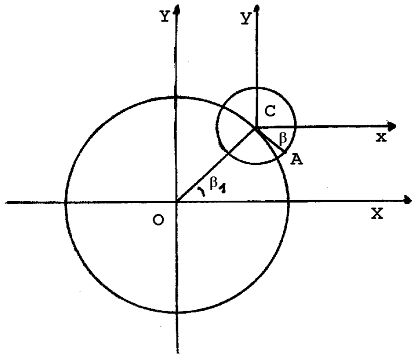


Fig.1

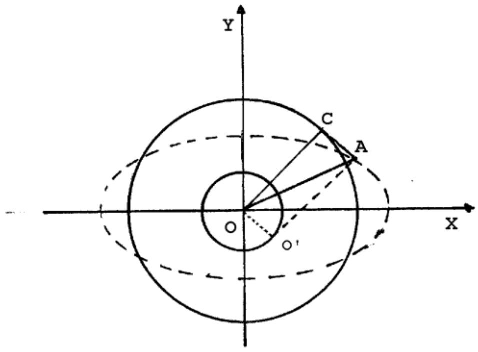


Fig.2

Le due figure hanno lo stesso significato, scriviamone l'Uguag. generale sapendo che i rispettivi raggi sono OC=R, CA=r, (OA somma di segmenti, CO' distanza di due punti) e angolo AOX=β_2 (Fig.2):

$$OA = R\cos(\beta_2 - \beta_1) + r\cos(\beta_2 - \beta) \qquad \begin{cases} OA\cos\beta_2 = R\cos\beta_1 + r\cos\beta \\ OAsen\beta_2 = Rsen\beta_1 + rsen\beta \end{cases}$$

se $\frac{\beta}{\beta_1} = -1;$ *dato da* $\beta = 360 - \beta_1$ (le fig. si riferiscono a questa ipotesi)

$$\begin{cases} OA\cos\beta_2 = R\cos\beta_1 + r\cos\beta \\ OAsen\beta_2 = Rsen\beta_1 - rsen\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} OA\cos\beta_2 = (R+r)\cos\beta_1 \\ OAsen\beta_2 = (R-r)sen\beta_1 \end{cases}$$

$$\overline{OA}^2 = (R+r)^2\cos^2\beta_1 + (R-r)^2 sen^2\beta_1 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos 2\beta_1$$

Poichè R ed r sono costanti poniamo (R+r)=q, (R-r)=m per cui $\overline{OA}^2 = q^2\cos^2\beta_1 + m^2 sen^2\beta_1$ che rappresenta effettivamente una ellisse perchè:

$$\tan\beta_2 = \frac{(R-r)sen\beta_1}{(R+r)\cos\beta_1} = \frac{m}{q}\tan\beta_1$$

Abbiamo visto come il punto A, dato dai segmenti orientati OC e CA (oppure OO' e OC) descriva effettivamente una ellisse.

Si osservi che i valori q ed m, diventati gli assi dell'ellisse, possono sempre essere intesi come somma (q=R+r) e differenza (m=R-r) di due circonferenze, le quali ovviamente ricaveranno il loro valore da

$$\begin{cases} \dfrac{q+m}{2} = R \\ \dfrac{q-m}{2} = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = R + r \\ m = R - r \end{cases}$$

Sapendo che la *distanza del fuoco* dall'origine e':

$$c = \sqrt{q^2 - m^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{4Rr} \qquad c^2 = \sqrt{Dd}$$

dove D e d sono i diametri delle circonferenze.

Mentre *l'eccentricità*: $e = \dfrac{c}{q} = \dfrac{2\sqrt{Rr}}{R+r}$

ESEMPIO 2° (Ellisse dei due Moti)

(Distanza degli estremi dei raggi in una Circonferenza Traslata)

Prendendo in cosiderazione anziche' la somma dei due segmenti orientati, la distanza di tali due segmenti (gli estremi dei raggi delle due circonferenze) cioe' la distanza CO' (fig. 2 Cap. VI Pag. 16), per quanto detto a Cap. VI Pag. 12 (DISTANZA DI DUE PUNTI) essa e' data (vedi figura sotto):

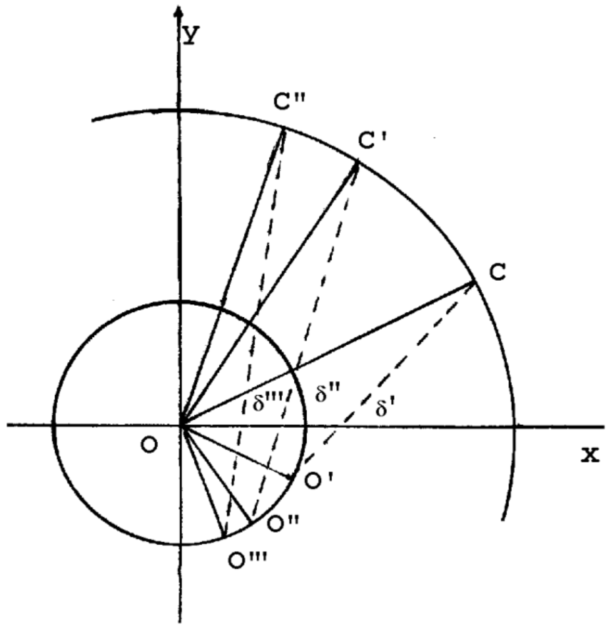
$$\overline{CO'} = R\cos(\delta' - \beta_1) - r\cos(\delta' - \beta) \text{ e posto } \beta = -\beta_1 \text{ avremo}$$

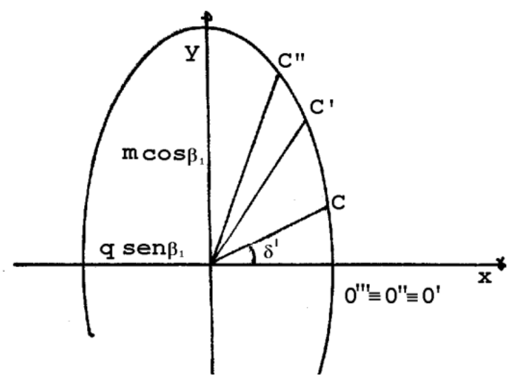
$$\begin{cases} \overline{CO'}\cos\delta' = R\cos\beta_1 - r\cos\beta_1 = (R-r)\cos\beta_1 = m\cos\beta_1 \\ \overline{CO'}\mathrm{sen}\delta' = R\mathrm{sen}\beta_1 + r\mathrm{sen}\beta_1 = (R+r)\mathrm{sen}\beta_1 = q\mathrm{sen}\beta_1 \end{cases}$$

$$\overline{CO'}^2 = (R-r)^2\cos^2\beta_1 + (R+r)^2\mathrm{sen}^2\beta_1 = m^2\cos^2\beta_1 + q^2\mathrm{sen}^2\beta_1$$

$$\tan\delta' = \frac{q}{m}\tan\beta_1$$

dove si vede che la distanza CO' dei due raggi e' la distanza di una ellisse di centro O' e angolo δ', e assi $q = (R+r), m = (R-r)$. Pertanto tutte le distanze: CO'; C'O''; C''O'''; ecc. date da β_1=COX e β=O'OX sono le distanze dei punti di una <u>ELLISSE</u> il cui centro e' di volta in volta O'; O''; O''';. ed angoli δ'; δ''; δ''';ecc.





ESEMPIO 3°(COME CIRCONFER. ROTO-TRASLATA)

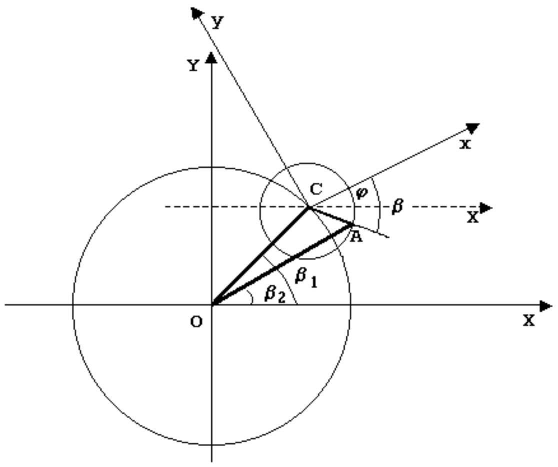


Fig. a

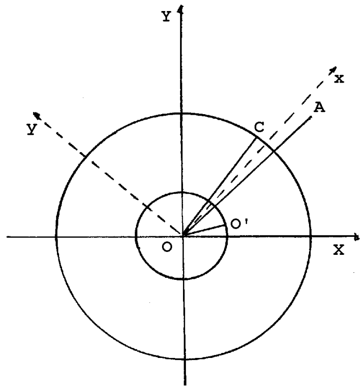


Fig. b

Il sistema xCy (con raggio r) e' ruotato di un angolo φ (con verso antiorario), i raggi sono R ed r,con (Fig.a) $\beta=-\beta_1$, $AOX=\beta_2$; e con (Fig.b) OO'=CA=r, OC=R.
L'Uguaglianza, in generale, che lega i segmenti orientati è:

1*] $$OA = R\cos(\beta_2-\beta_1)+r\cos[\beta_2-(\beta-\varphi)] \qquad \begin{cases} OA\cos\beta_2 = R\cos\beta_1 + r\cos(\beta-\varphi) \\ OA\,sen\beta_2 = R\,sen\beta_1 + r\,sen(\beta-\varphi) \end{cases}$$

$$\overline{OA}^2 = R^2+r^2+2Rr\cos[\beta_1-(\beta-\varphi)] = R^2+r^2+2Rr\cos(\varphi+2\beta_1)$$

$$\overline{OA}^2 = R^2+r^2+2Rr\cos(\varphi+2\beta_1) = R^2+r^2+2Rr\cos 2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})$$

dove sviluppando il coseno e moltiplicando R ed r per

$$\left[\cos^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})+sen^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})\right]$$ si avrà:

$$\overline{OA}^2 = R^2+r^2+2Rr\cos^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})-2Rr\,sen^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2}) =$$

$$=\left[R^2\cos^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})+r^2\cos^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})+2Rr\cos^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})\right]+$$

$$+\left[R^2 sen^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})+r^2 sen^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})-2Rr\,sen^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})\right]$$

$$\overline{OA}^2 = (R+r)^2\cos^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})+(R-r)^2 sen^2(\beta_1+\frac{\varphi}{2})$$

ESEMPIO 3° (CONTINUA)

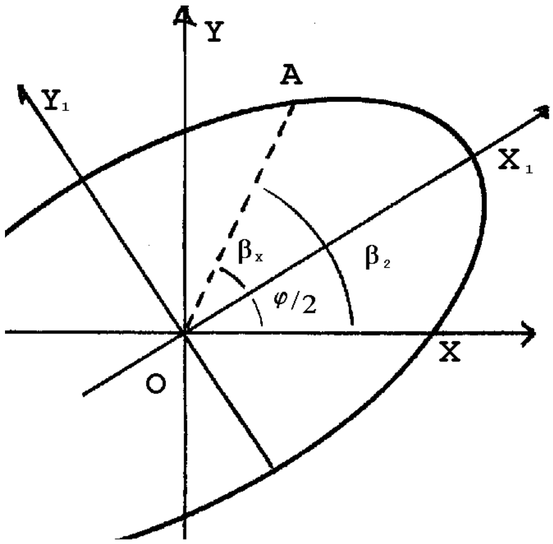
Essendo l'ultima espressione vista il quadrato di uno spazio del tipo
$OA^2 = x^2 + y^2$ potremo prendere un opportuno angolo β_x tale che

$$2^*] \qquad \overline{OA} = \left[(R+r)\cos(\beta_1+\frac{\varphi}{2})\right]\cos\beta_x + \left[(R-r)\,sen(\beta_1+\frac{\varphi}{2})\right]sen\beta_x$$

e facendo (R+r) = q, (R-r) = m, e posto $(\beta_1+\frac{\varphi}{2}) = \alpha$:

$$\begin{cases} X_1 = (R+r)\cos(\beta_1+\frac{\varphi}{2}) = q\cos\alpha \\ Y_1 = (R-r)\,sen(\beta_1+\frac{\varphi}{2}) = m\,sen\alpha \end{cases} \qquad \frac{Y_1}{X_1} = \tan\beta_x = \tan(\beta_1+\frac{\varphi}{2}) = \frac{m}{q}\tan\alpha$$

OA viene a rappresentare la distanza di un punto di Ellisse dal suo centro, al variare di β_1 da $0 \le \beta_1 \le 360$. Ciò implica che il campo di variabilità di $(\beta_1+\frac{\varphi}{2})$ (per φ costante) sia egualmente $0 \le (\beta_1+\frac{\varphi}{2}) \le 360$.



Se in un sistema X_1OY_1 (fig. a lato) applichiamo la 2*] abbiamo una ellisse e se poniamo il valore di $\beta_x = \beta_2 - \frac{\varphi}{2}$ il variare di β_1 nell'Eq. di partenza in 2*]farà variare β_x e quindi β_2 dando tutti i punti (X_1, Y_1) della ellisse con Eq. di Vag che nel sistema XOY della pagina precedente 1*], abbiamo visto essere:

$$OA = R\cos(\beta_2-\beta_1) + r\cos[\beta_2-(\beta-\varphi)]$$

dove β_2 è proprio l'angolo (Fig.a) di OA rispetto all'asse X.
Nel sistema X_1OY_1 possiamo scrivere l'equazione di una Ellissi con l'Eq. di Vag:

$$\overline{OA} = X_1\cos\beta_x + Y_1\,sen\beta_x = X_1\cos(\beta_2-\frac{\varphi}{2}) + Y_1\,sen(\beta_2-\frac{\varphi}{2})$$

Questa ellisse, rispetto agli assi coord.X,Y e' ruotata di $\frac{\varphi}{2}$, mentre la rotazione da cui eravamo partiti era di φ,per la sola circonferenza di raggio r, come se, essendo due le circonferenze, ciascuna fosse stata ruotata di $\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}=\varphi$, e tutto il sistema fosse ruotato di $\frac{\varphi}{2}$.

ESEMPIO 4°

(Distanza degli estremi dei raggi in una circonferenza roto-traslata)

In questo caso l' eq. rappresentativa e' la stessa di quella dell'ESEMPIO 3° (Cap. VI Pag. 19) cambiata di segno e dalla Fig.a e Fig.b dell'esempio stesso si ha:

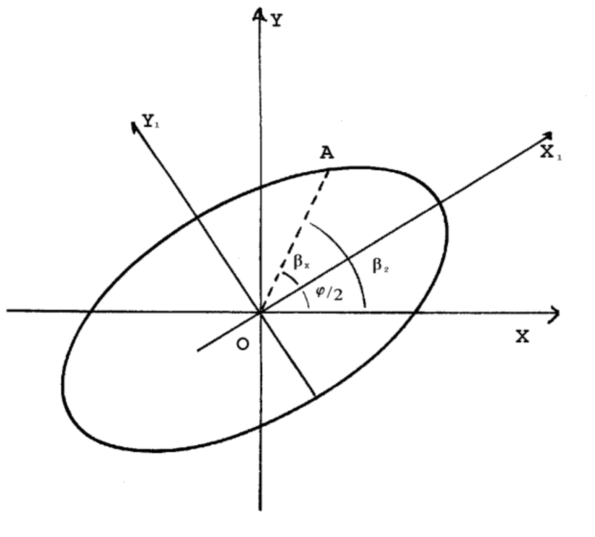
$$\overline{CO'}^2 = R\,cos(\beta_2 - \beta_1) - r\,cos[\beta_2 - (\beta - \varphi)]$$

Facendo gli stessi passaggi dell'ESEMPIO 3° si ha:

$$\overline{CO'}^2 = (R-r)^2 cos^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) + (R+r)^2 sen^2(\beta_1 + \frac{\varphi}{2})$$

che e' un quadrato del tipo $\overline{CO'}^2 = X_1^2 + Y_1^2$ per cui stabilito un angolo $\delta_x = \delta - \frac{\varphi}{2}$ si ha, in analogia a quanto visto:

$$\begin{cases} \overline{CO'}\,cos\,\delta_x = (R-r)\,cos(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) = X_1 = m\,cos\,\alpha \\ \overline{CO'}sen\delta_x = (R+r)sen(\beta_1 + \frac{\varphi}{2}) = Y_1 = q\,sen\alpha \end{cases} \qquad tan\,\delta_x = \frac{q}{m}tan\,\alpha \quad 3*]$$



Come vediamo dall'equazione sopra risultano scambiati soltanto la posizione degli assi q ed m.

Tenendo presente come visto al Cap. VI Pag. 18 che al variare di α in 3*] CO',C'O'',C''O''', ecc. sono le distanze di una Ellisse dal proprio centro e che fatto O≡O'≡O''≡O''' ecc. avro' una Ellisse proprio come da fig. a lato.
Anche qui come nell'ESEMPIO 3° avendo ruotato il riferimento XOY di φ, risulta invece come se la rotazione fosse solo di $\varphi/2$ e riguardasse tutto il sistema nel suo insieme.

ESEMPIO 5°(ROTAZIONE DI UN SISTEMA TRASLATO)

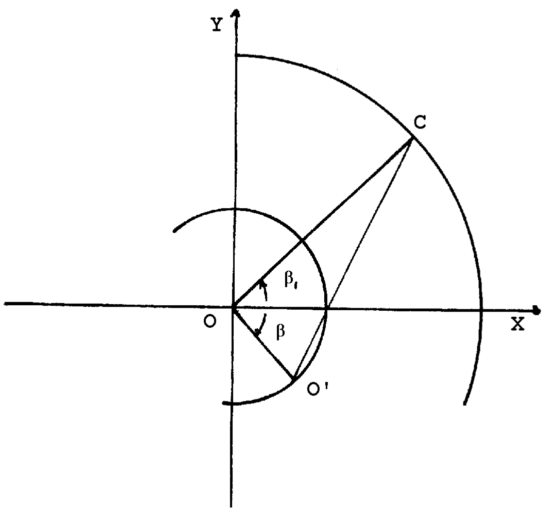


Fig.1

Nell'Esempio 2° di Cap. VI Pag.18 abbiamo considerato la distanza degli estremi dei raggi in una circonferenza traslata dove O'C e' la distanza di un punto di Ellisse dal suo centro, come nella fig. 1 con $\beta = -\beta_1$.

Come fatto nell'ESEMPIO 3°(Fig.a) ruotando un sistema di φ (ma questa volta in senso orario) l'intero sistema ruota di φ/2. Nel sistema X_1OY_1 come da fig. 2, O'C e' sempre la distanza di un punto di Ellisse dal suo centro, ed è dato come distanza dei due segmenti orientati R e r (DISTANZA DI DUE PUNTI Cap.VI Pag.12). La sua Eq.di Vag ,con $-\frac{\varphi}{2}$ (perché φ è in senso orario), è:

$$\begin{cases} \overline{O'C}\cos(\delta-\frac{\varphi}{2}) = R\cos(\beta_1-\frac{\varphi}{2}) - r\cos(\beta-\frac{\varphi}{2}) \\ \overline{O'C}sen(\delta-\frac{\varphi}{2}) = Rsen(\beta_1-\frac{\varphi}{2}) + rsen(\beta-\frac{\varphi}{2}) \end{cases}$$

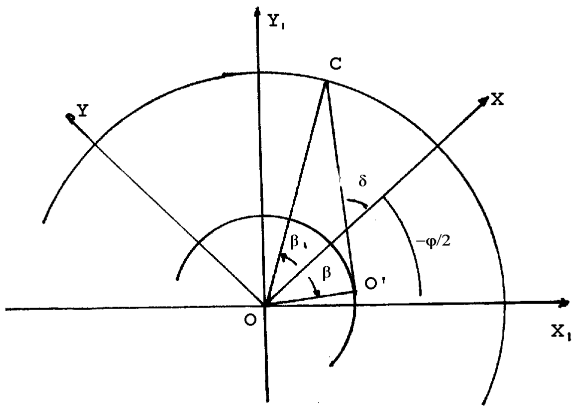


Fig.2

Se a questo punto supponiamo che $\frac{\varphi}{2}$ anzichè fisso sia variabile e che vari in valore come $\frac{\varphi}{2} = -\beta_1 = \beta$ l'equazione diventerà:

$$\begin{cases} \overline{O'C}\,cos(\delta+\beta_1) = R\cos 2\beta_1 - r\,cos(\beta-\beta) = R\cos 2\beta_1 - r \\ \overline{O'C}sen(\delta+\beta_1) = Rsen2\beta_1 + rsen(\beta-\beta) = Rsen2\beta_1 \end{cases} \quad \textbf{*)}$$

$$tan(\delta+\beta_1) = \frac{Rsen2\beta_1}{R\cos 2\beta_1 - r}$$

e si presenterà come in Fig.3 ponendo: $\delta_x = \delta + \beta_1; \; \beta_0 = 2\beta_1$

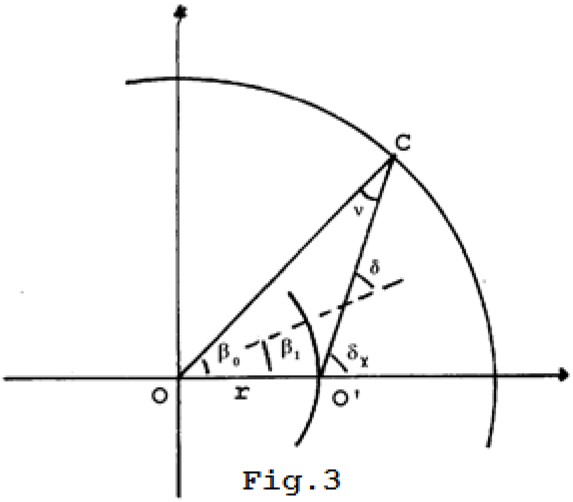


Fig.3

cioè l'equazione *) della pagina precedente diventa:

$$\begin{cases} \overline{O'C}\cos\delta_x = R\cos\beta_0 - r \\ \overline{O'C}\sin\delta_x = Rsen\beta_0 \end{cases}$$

$$\overline{O'C} = (R\cos\beta_0 - r)\cos\delta_x + (Rsen\beta_0)\sin\delta_x \qquad Eq.di\ Vag$$

$$\overline{O'C}^2 = (R\cos\beta_0 - r)^2 + (R\sin\beta_0)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta_0$$

Dalla Fig.3 si deduce:

$$\tan\delta_x = \frac{\mathrm{sen}\delta_x}{\cos\delta_x} = \frac{\mathrm{Rsen}\beta_0}{\mathrm{R}\cos\beta_0 - \mathrm{r}};$$

che risolta e sviluppata, darà: $sen(\delta_x - \beta_0) = \frac{r}{R} sen\delta_x$

TEOREMA DEI PIANETI

Da ciò che abbiamo visto in Fig.3 data una circonferenza di raggio R, stabilita una distanza OO'=r, minore di R, ogni distanza O'C, può svilupparsi:

$$\overline{O'C}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos 2\frac{\beta_0}{2} = R^2 + r^2 - 2rRr(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - sen^2\frac{\beta_0}{2}) =$$

$$= R^2(\cos^2\frac{\beta_0}{2} + sen^2\frac{\beta_0}{2}) + r^2(\cos^2\frac{\beta_0}{2} + sen^2\frac{\beta_0}{2}) - 2rRr(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - sen^2\frac{\beta_0}{2}) = \quad \textbf{**)}$$

$$= (R-r)^2\cos^2\frac{\beta_0}{2} + (R+r)^2 sen^2\frac{\beta_0}{2}$$

Essendo quest' ultima espressione un quadrato del tipo $\overline{O'C}^2 = x^2 + y^2$ potrò avere un angolo β_E tale che:

$$\text{b)}\quad \begin{cases} \overline{O'C}\cos\beta_E = (R-r)\cos\frac{\beta_0}{2} = m\cos\frac{\beta_0}{2} \\ \overline{O'C}\, sen\beta_E = (R+r)\, sen\frac{\beta_0}{2} = q\, sen\frac{\beta_0}{2} \end{cases} \qquad \tan\beta_E = \frac{R+r}{R-r}\tan\frac{\beta_0}{2} = \frac{q}{m}\tan\frac{\beta_0}{2}$$

Abbiamo che b) è l'Eq. di Vag di una ELLISSE di angolo β_E e semi-assi q>m, contata da m.

Se prendiamo il punto O' (come da Fig.4) avremo i valori dell'ellisse:

$$\overline{O'C}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos 2\frac{\beta_0}{2} = R^2 + r^2 + 2rRr(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - sen^2\frac{\beta_0}{2})$$

che sviluppata come abbiamo visto darà:

$$\overline{O'C}^2 = (R+r)^2\cos^2\frac{\beta_0}{2} + (R-r)^2 sen^2\frac{\beta_0}{2}$$ e quindi

$$\begin{cases} \overline{O'C}\cos\beta_E = (R+r)\cos\frac{\beta_0}{2} = q\cos\frac{\beta_0}{2} \\ \overline{O'C}\, sen\beta_E = (R-r)\, sen\frac{\beta_0}{2} = m\, sen\frac{\beta_0}{2} \end{cases}$$

$$\tan\beta_E = \frac{R-r}{R+r}\tan\frac{\beta_0}{2} = \frac{m}{q}\tan\frac{\beta_0}{2}$$

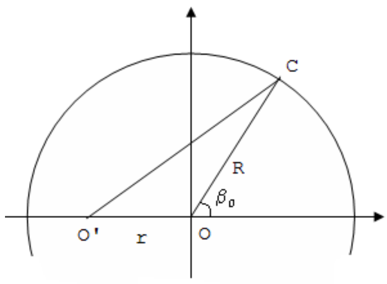


Fig.4

di semi-assi q>m, contata da q.

Ponendo $\frac{\beta_0}{2} = \alpha$ si avrà la stessa equazione dell' Ellisse illustrata nel Cap. III° (Le Curve "ELLISSE").

I valori che abbiamo determinato per la distanza O'C non formano una Ellisse intera, bensì meta' Ellisse, per il fatto che $\frac{\beta_0}{2} = \alpha$ cioè che, per un valore di β_0 compreso tra $0 \le \beta_0 \le 180$ sarà $0 \le \alpha \le 90$ e quindi darà per il valore di una semi circonferenza il valore di un settore di ellisse come possiamo vedere in Fig.5, nella quale e' mostrato (a computer) che per tutte le distanze OC dei punti della circonferenza si hanno le distanze O'C' dei punti della semi-ellisse.
In figura si vede anche che il

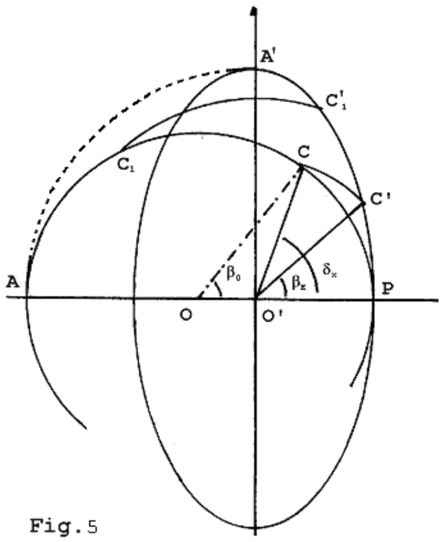


Fig.5

punto P percorre l’arco PA della semi-circonferenza e l’arco PA’ del settore dell’ Ellisse nello stesso tempo;come dire che il semiperimetro della Ellisse è percorso nello stesso tempo in cui è percorso l’intero perimetro della Circonferenza; ed inoltre nel Cap.VII vedremo che la velocità di percorrenza dell’area della circonferenza è doppia della velocità di percorrenza dell’ area dell’ellisse.

Nella Fig.5 data una circonferenza come nella Fig.3, fatti:
$\overline{OC} = R; \quad \overline{OO'} = r; \quad R + r = q; \quad R - r = m$

avremo: $\tan\delta_x = \dfrac{R\sin\beta_0}{R\cos\beta_0 - r}$ e $\overline{O'C}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\beta_0$ [1]

sviluppata secondo ****)**: $\overline{O'C}^2 = (R-r)^2\cos^2\dfrac{\beta_0}{2} + (R+r)^2\sin^2\dfrac{\beta_0}{2}$

e per quanto visto in b) della pagina precedente, abbiamo O'C=vettore di Ellisse, di angolo β_E e centro in O'.
Abbiamo cosi stabilito una corrispondenza biunivoca tra

circonferenza ed ellisse legati dalle formule $\begin{cases} q = R + r \\ m = R - r \end{cases}$ $\begin{cases} R = \dfrac{q+m}{2} \\ r = \dfrac{R-r}{2} \end{cases}$

dove i valori dei semi-assi q>m della ellisse vengono ad essere q=O'A e m=O'P, pari alla distanza massima e minima di un punto della circonferenza dal proprio centro.

Tale corrispondenza ci permette di dare la:

DEFINIZIONE del"**Teorema dei Pianeti**":

data una circonferenza, ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza sono vettori di ellisse, la traiettoria un Ellisse e il punto-fisso il suo centro.

(Vedere anche la dimostrazione del Teorema nello Spazio Cap.III Pag.14)

ESEMPIO 6° TEOREMA DEI PIANETI

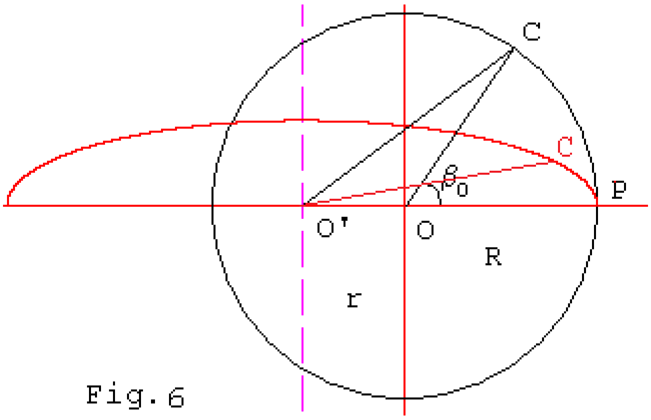


Fig.6

La Fig.6 è la stessa di Fig.5 con gli stessi valori
$\overline{OC}=R;\quad \overline{OO'}=r;\quad R+r=q;\quad R-r=m$, ma con O' centro dell' ellisse spostato. Possiamo quindi scrivere

$$\overline{O'C}^2=R^2+r^2-2Rr\cos(180-\beta_0)=R^2+r^2+2Rr\cos\beta_0$$

che sviluppata come al solito

$$\overline{O'C}^2=(R+r)^2\cos^2\frac{\beta_0}{2}+(R-r)^2\sin^2\frac{\beta_0}{2}=q^2\cos^2\frac{\beta_0}{2}+m^2\sin^2\frac{\beta_0}{2}$$

che è ancora l'Eq. Di Vag di una ellisse, ma questa volta con l'equazione della ellisse scritta nel modo usuale che conosciamo.
Pertanto con le solite relazioni:

$$\begin{cases}\overline{O'C}\cos\beta_E=(R+r)\cos\frac{\beta_0}{2}=q\cos\frac{\beta_0}{2}\\ \overline{O'C}\sin\beta_E=(R-r)\sin\frac{\beta_0}{2}=m\,\mathrm{sen}\frac{\beta_0}{2}\end{cases}\qquad \overline{O'C}=(q\cos\frac{\beta_0}{2})\cos\beta_E+(m\sin\frac{\beta_0}{2})\sin\beta_E$$

$$\tan\beta_E=\frac{R-r}{R+r}\tan\frac{\beta_0}{2}=\frac{m}{q}\tan\frac{\beta_0}{2}$$

Possiamo concludere, tenendo presente la Fig.6:

a) data una circonferenza di raggio $R=\frac{q+m}{2}$ e un punto O' distante $r=\frac{q-m}{2}$ dal suo centro, la distanza di ogni punto della circonferenza dal punto O' è la distanza di un corrispondente punto dell' ellisse dal suo centro, con angolo β_E dato da $\beta_0/2$ angolo della circonferenza.

b) e che il raggio vettore R spazza l'area della circonferenza nello stesso tempo in cui il raggio vettore dell'Ellisse spazza metà della propria area.

La Fig.6 è tracciata con valori di R=10, r=8.

ESEMPIO 7° TEOREMA DEI PIANETI

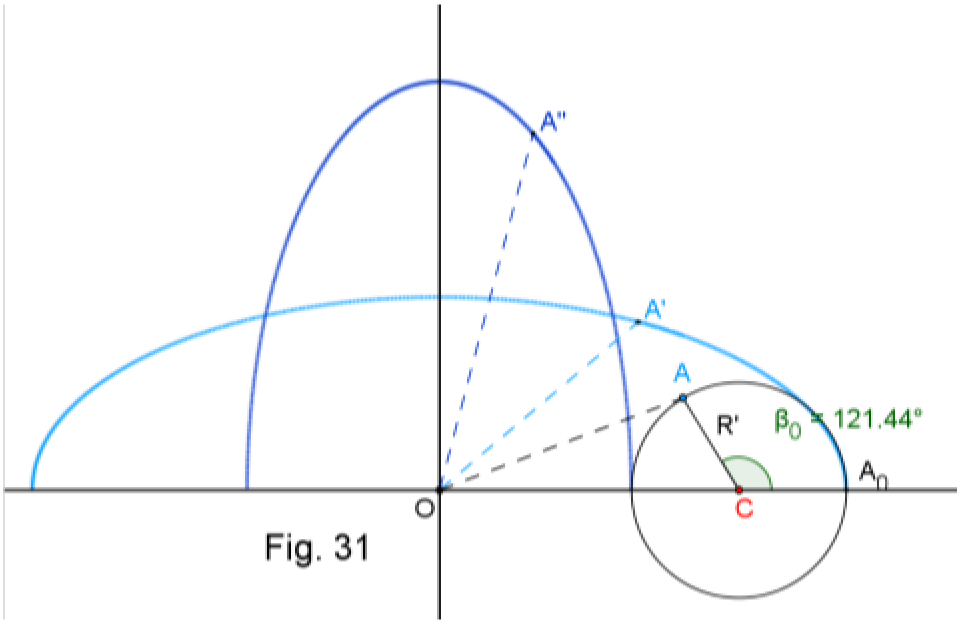


Fig. 31

Abbiamo anche che, data una circonferenza e un punto fuori di essa **O**, come in Fig.31, la distanza di tale punto da tutti i punti A della circonferenza e' la distanza di un Punto di Ellisse dal proprio centro. Posto CA=R’:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + R'^2 + 2\overline{OC}R'\cos\beta_0 = \overline{OC}^2 + R'^2 + 2\overline{OC}R'(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - sen^2\frac{\beta_0}{2}) = (\overline{OC}+R')^2\cos^2\frac{\beta_0}{2} + (\overline{OC}-R')^2 sen^2\frac{\beta_0}{2}$$

Esisterà un β_x per cui:
$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta_x = (OC+R')\cos\frac{\beta_0}{2} \\ \overline{OA}sen\beta_x = (OC-R')sen\frac{\beta_0}{2} \end{cases}$$

$$\overline{OA} = (\overline{OC}+R')\cos\frac{\beta_0}{2}\cos\beta_x + (\overline{OC}-R')sen\frac{\beta_0}{2}sen\beta_x)$$

Questa ultima espressione e' una Eq. di Vag che rappresenta una Ellisse con angolo al centro β_x e assi $q=(\overline{OC}+R')$ e $m=(\overline{OC}-R')$ con la relazione:

$$\tan\beta_x = \frac{\overline{OC}-R'}{\overline{OC}+R'}\tan\frac{\beta_0}{2} = \frac{m}{q}\tan\frac{\beta_0}{2}$$

Nella Fig.31 segnata con A’ ricavata al computer con le caratteristiche della ellisse di centro in O, sono le stesse di quelle viste, quando tale punto era interno alla circonferenza.

Invertendo q con m abbiamo la figura segnata con A” accanto che è la stessa di quella di sopra ma con la ellisse ruotata di 90°.