

VII. AREA E PERIMETRO ELLISSE

AREA DEL SETTORE DELL'ELLISSE

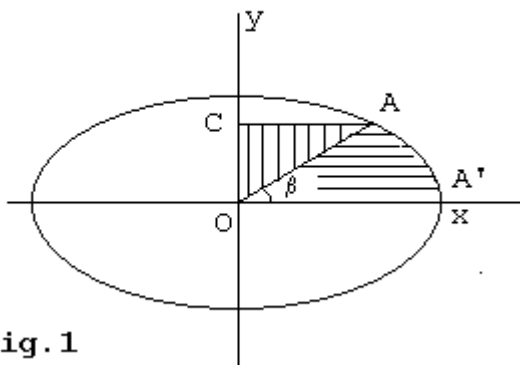


Fig. 1

I°) Sia $S(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx$ l'area OCAA'.

La funzione $S(x)$ deve essere tale che $\frac{dS(x)}{dx} = y = \frac{m}{q} \sqrt{q^2 - x^2}$ e poiché

è $S(x) = \frac{1}{2} xy + \text{area settore OAA'}$ e l'arco AA' è tale che il suo coseno vale

$$\frac{x}{q} \text{ avremo } \frac{\text{Area settore OAA'}}{S} = \frac{\arccos \frac{x}{q}}{\frac{\pi}{2}}$$

e quindi $S(x) = \frac{1}{2} x \frac{m}{q} \sqrt{q^2 - x^2} + \frac{2S}{\pi} \arccos \frac{x}{q}$ espressione che derivata e semplificata darà la Funzione primitiva:

$$S(x) = \frac{m}{q} \left(\frac{x\sqrt{q^2 - x^2}}{2} + \frac{q^2}{2} \arccos \frac{x}{q} \right) = OCAA'$$

che per $x = q \cos \alpha$; $y = m \sin \alpha$ diventa:

$$S(x) = OCA + OAA' = \frac{qm}{2} (\cos \alpha \sin \alpha + \arccos \cos \alpha)$$

$$\text{da cui: } S(x)_{(OAA')} = \frac{qm}{2} \arccos \cos \alpha = \frac{qm}{2} \frac{\alpha^\circ \pi}{180} = \frac{qm}{2} \alpha^R \quad (\alpha \text{ in rad})$$

II°) **INTEGRALE DI VAG.** In modo più rigoroso possiamo calcolare l'integrale delle uguaglianze parametriche $x = q \cos \alpha$; $y = m \sin \alpha$; $y' = m \cos \alpha$

$$\begin{aligned} S(x)_{(OCAA')} &= \int q \cos \alpha m (\cos \alpha) d\alpha = qm \int \cos^2 \alpha d\alpha = qm \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = \\ &= qm \left[\int \frac{d\alpha}{2} + \int \frac{\cos 2\alpha d\alpha}{2} \right] = qm \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) = \frac{qm}{2} \alpha + \frac{q \cos \alpha m \sin \alpha}{2} \\ &\left(\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha); \quad 2\alpha = t \quad d\alpha = \frac{1}{2} dt; \quad \int \frac{\cos t}{2} dt = \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \end{aligned}$$

l'ultimo membro dell'espressione S è l'area OCA per cui avremo in

$$\text{radianti l'area } S(x)_{OAA'} = \frac{mq}{2} \alpha \quad (\text{Esempi numerici più avanti})$$

Come si vede l'area dell'Ellisse dipende dall'angolo α legato

all'Ellisse dalla relazione: $\tan \beta = \frac{m}{q} \tan \alpha$

AREA ELLISSE E CORONA CIRCOLARE

Essendo α in radianti, da ciò che abbiamo visto l'area di un settore dell'Ellisse e':

$$S = \frac{qm}{2} \arccos(\cos \alpha) = \frac{qm}{2} \alpha$$

dove per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $S = \frac{qm}{2} \frac{\pi}{2}$ area quadrante Ellisse

Se sostituiamo $q = R + r$ e $m = R - r$ (sistema algebrico in cui dati due valori R e r ha soluzione per $2R=q+m$ e $2r=q-m$), l'area del settore dell'Ellisse sarà:

$$S = \frac{qm}{2} \alpha = \frac{R^2 - r^2}{2} \alpha$$

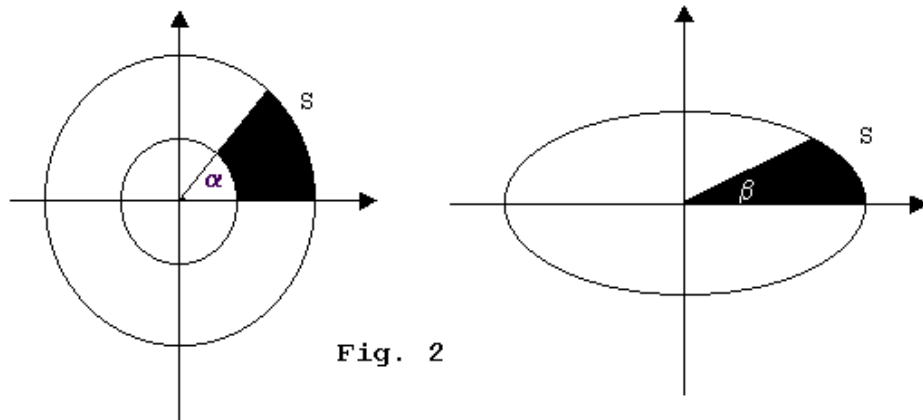


Fig. 2

E poichè α e' l'angolo delle circonferenze R ed r (Cap. V° ELLISSE), quest'ultima formula oltre che a rappresentare l'area di un settore dell'Ellisse rappresenta anche l'area di un settore della corona circolare di ampiezza $(R-r)$ di uguale valore:

L'area di un settore di Ellisse di angolo β e' uguale all'area di un settore di corona circolare di angolo α corrispondente a β mediante la formula $\alpha = \arctan\left(\frac{q}{m} \tan \beta\right)$.

Possiamo anche aggiungere che l'area di un settore di Ellisse è proporzionale all'angolo che forma l'area del settore della corona circolare $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{qm}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2} = \text{costante}$. Si tenga presente che

l'angolo dell'area del settore dell'Ellisse va preso iniziando da zero, cioè dall'asse delle ascisse con movimento antiorario.

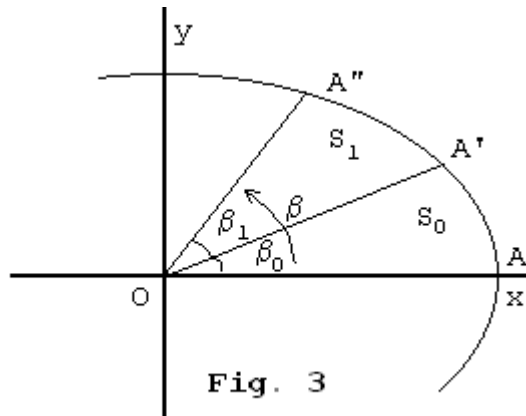


Fig. 3

Nell'Ellisse in figura si ha che $\beta = \beta_1 + \beta_0$ e $S = S_1 + S_0$ dove S è l'area del settore relativo a β . In realtà i due angoli calcolabili sono β e β_0 perché partono dall'ascissa ed essi danno luogo ai due angoli del settore corona-circolare α e α_0 , tramite $\tan \alpha = \frac{q}{m} \tan \beta$ e $\tan \alpha_0 = \frac{q}{m} \tan \beta_0$;

mentre β_1 non può

dare il valore di α_1 non partendo

dal valore zero dell'ascissa. Questo perché gli angoli dell'ellisse non sono proporzionali alle aree, mentre le aree della corona-circolare (uguali alle aree dell'Ellisse) sono

proporzionali ai propri angoli, quindi $\frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{S}{\alpha}$ ma dove si deve

tener presente che nel rapporto $\frac{S_1}{\alpha_1}$, α_1 non ha un corrispettivo

β_1 nella Ellisse, perché l'area S_1 assume un valore posizionale in quanto l'integrale che la determina vale a partire dall'ascissa.

Noti β e β_0 si calcolerà S e S_0 e poi $S_1 = S - S_0$ e mediante la

proporzione sopra indicata si troverà $\alpha_1 = \frac{S_1 \alpha_0}{S_0}$ *].

[**ESEMPIO 1:** dell'Ellisse in Fig. 3 siano i semi-assi $q=3$, $m=2$ ed i punti $A'(2,320424812; 1,267653772)$ $A''(0,589580871; 1,960996844)$ e i rispettivi angoli al centro:

$$\beta_0 = \arctan \frac{1,267653772}{2,320424812} = 28,64788823 \quad \text{e} \quad \beta = \arctan \frac{1,960996844}{0,589580871} = 73,266403^\circ$$

mentre avremo gli angoli parametrici:

$$\alpha_0 = \arctan \frac{q}{m} \tan \beta_0 = 39,333031^\circ = 0,686490895 \text{ Rad}$$

$$\alpha = \arctan \frac{3}{2} \tan 73,266403 = 78,66606232^\circ = 1,372981797 \text{ Rad}$$

(entrambe anche con la formula parametrica $x = q \cos \alpha$ o $y = m \sin \alpha$) e le rispettive aree ellittiche:

$$S = \frac{mq}{2} \alpha = 3 \cdot 1,372981797 \text{ Rad} = 4,118945391 \quad S_0 = 3 \cdot 0,686490895 \text{ Rad} = 2,059472685$$

$$S_1 = S - S_0 = 4,118945391 - 2,059472685 = 2,059472705$$

Come vediamo l'Area S è doppia dell'Area S_0 , quindi se $S_0 = S_1$,

poiché sappiamo che $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{mq}{2}$ dovrà essere $\alpha_0 = \alpha_1$, ma α_1 non è

determinabile dalle formule di calcolo viste in quanto l'area S_1

non è adiacente all'ascissa quindi da α_1 non possiamo calcolare l'angolo al centro β_1 che va calcolato per differenza:

$$\beta_1 = \beta - \beta_0 = 73,266403^\circ - 28,6478664^\circ = 44,6185366^\circ$$

Tale angolo se fosse adiacente all'ascissa avrebbe come ipotetico

angolo parametrico $\alpha'_1 = \arctan \frac{q}{m} \tan 44,6185366^\circ = 55,95690767^\circ$ anziché

$$\alpha_1 = \alpha_0 = 39,333031^\circ .]$$

AREA PARZIALE DELL'ELLISSE

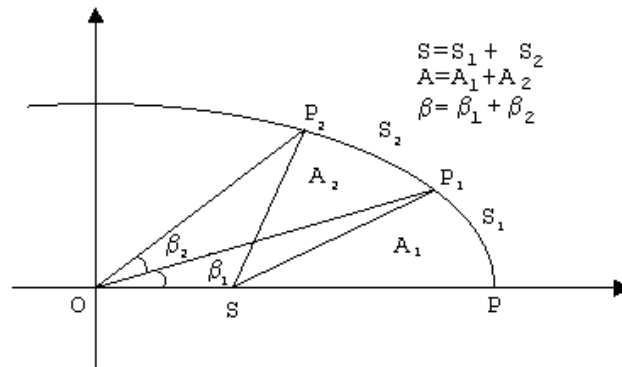


Fig. 4

Sia (vedi Fig.4) S_1 l'area ed E_1 il relativo angolo parametrico in radianti di una Ellisse (di semiassi $q > m$); inoltre sia l'area $POP_2 = S = (S_1 + S_2)$ ed E l'angolo parametrico relativo in radianti,

abbiamo visto che $\frac{S}{E} = \frac{S_1}{E_1} = \frac{qm}{2}$. Ed osservando la Fig.4 vediamo:

$$A = S - \text{area}SOP_2 = S - \frac{\overline{OS}m \sin E}{2}$$

e sostituendo S:
$$A = \frac{mq}{2}E - \frac{OSm}{2} \sin E = \frac{mq}{2} \left(E - \frac{OS}{q} \sin E \right).$$

Si consideri che essendo il punto S tra O e P è sempre $\frac{OS}{q} < 1$,

dove OS è una qualunque distanza dal centro Ellisse.

Volendo il valore dell'area A_2 con $A_2 = A - A_1$, sempre a partire dall'ascissa come per le aree S_1 e S , si avrà:

$$A_1 = \frac{mq}{2} \left(E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)$$

pertanto
$$A_2 = A - A_1 = \frac{mq}{2} \left[\left(E - \frac{OS}{q} \sin E \right) - \left(E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right) \right] = \frac{mq}{2} M_2.$$

Cioè
$$\frac{A}{E - \frac{OS}{q} \sin E} = \frac{A_1}{E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1} = \frac{A_2 = A - A_1}{\left(E - \frac{OS}{q} \sin E \right) - \left(E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)} = \frac{mq}{2}$$

Posto $M = \left(E - \frac{OS}{q} \sin E \right)$ e $M_1 = \left(E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)$ (M e M_1 sono valori in Rad)

avremo $\frac{A}{M} = \frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M - M_1}$ posto $M_2 = M - M_1$ avremo $\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2}$

e se $A_1 = A_2$ dovrà essere $M_2 = M_1$: analogamente a quanto visto precedentemente per l'area S_1 e α_1 , l'angolo M_2 (proporzionale a A_2)

non ha un corrispettivo β nella ellisse, ma dovrà essere ricavato per differenza.

Possiamo allora scrivere la relazione geometrica che lega le aree

dell'ellisse agli angoli di riferimento: $\frac{S_1}{E_1} = \frac{S_0}{E_0} = \frac{qm}{2}$ e

$\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2} = \frac{qm}{2}$ per cui $\frac{S_1}{E_1} = \frac{S_0}{E_0} = \frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2} = \frac{qm}{2}$ con i relativi significati visti per S, A, E, M.

ESEMPIO 2: Sia una ellisse di semiassi $q=3$ e $m=2$ (vedi **Fig.4**) e sia l'angolo di riferimento in radianti

$\alpha_1 = 39,333031^\circ \frac{\pi}{180} = 0,686490895^{Rad}$ la distanza $OS=1,5$ (per cui $\frac{\overline{OS}}{q} = 0,5$).

Sappiamo essere $\beta_1 = \arctan \frac{2}{3} \tan 39,333031^\circ = 28,647888^\circ$

$$M_1 = (0,686490895^R - 0,5 \sin 39,333031^\circ) = 0,369577452^R$$

M_1 è necessariamente in Rad perché proviene da α^R

e quindi l'area $A_1 = \frac{3 \cdot 2}{2} M_1 = 1,108732356$

Posto $A=A_1+A_2$ e $A_1=A_2$ si ha $\frac{A_1}{M_1} = \frac{1,108732356}{0,369577452} = \frac{qm}{2} = 3$ e $\frac{A}{M} = \frac{2A_1}{2M_1} = \frac{2,217464712}{0,739154904} = \frac{qm}{2} = 3$

dovrà allora essere $M = \alpha - 0,5 \sin \alpha = 0,739154904$ dove α è l'angolo di riferimento del settore A. Risolvendo α rispetto a M abbiamo $\alpha = 1,206308053^R = 69,11636023^\circ$ infatti:

$M = 1,206308053 - 0,5 \sin 69,11636023^\circ = 0,739154903$ sufficientemente vicino al valore M di partenza.

Il valore $\frac{A_2}{M_2}$ è dato da $M_2=M_1$ ma in realtà M_2 non ha corrispondenza

con l'area A_2 segnata in **Fig.4** in quanto l'area non è adiacente all'ascissa; esso è un valore proporzionale.

PROPRIETA' DELLE AREE DELL'ELLISSE

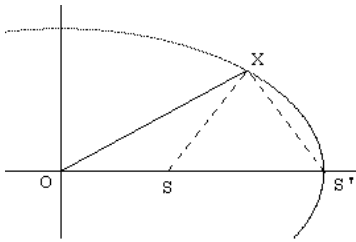


Fig. 5

L'espressione $M = (E - \frac{OS}{q} \sin E)$ determina l'area di un qualunque settore di ellisse; infatti ogni punto dell'ellisse è determinato dall'angolo parametrico E mentre la posizione del punto S lungo l'ascissa ne determina l'area (vedi Fig.5).

per $OS = 0$ avremo $S_x = \frac{mq}{2} E$ area $OS' \widehat{X}O$

per $OS < q$ avremo $S_x = \frac{mq}{2} (E - \frac{OS'}{q} \sin E)$ area $SS' \widehat{X}S$

per $OS = q$ avremo $S_x = \frac{mq}{2} (E - \sin E)$ area $S' \widehat{X}S'$

Dato il rapporto $\frac{OS}{q} = \varepsilon$ potremo scrivere per qualsivoglia area

$$S_x = \frac{mq}{2} (E - \varepsilon \sin E) = \frac{mq}{2} M .$$

Possiamo anche considerare il valore $\sqrt{qm} = R$ come raggio di una

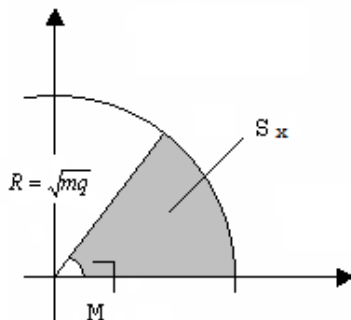


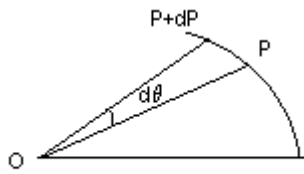
Fig. 5 bis

circonferenza, che darà sempre $S_x = \frac{qm}{2} M = \frac{R^2}{2} M$ per cui l'area della circonferenza vale la relativa area dell' ellisse e se il suo tempo di percorrenza o Rivoluzione è P , esso varrà sia per l'ellisse sia per la circonferenza. Ora se P è un valore medio possiamo ipotizzare che l'arco della circonferenza verrà spazzata a velocità costante e quindi ad ogni tempuscolo t corrisponda un angolo al centro ed a questi la relativa area della circonferenza che

a sua volta rappresenta un'area dell'ellisse. Inoltre per valori di t uguali si avranno nella circonferenza angoli al centro ed aree uguali, corrispondenti ad aree S_x dell'Ellisse uguali e percorse nello stesso tempo.

Da tutte queste considerazioni possiamo dire che nella circonferenza di riferimento di una ellisse, per la legge temporale, le aree S_x , sono lineari in un intervallo di tempo ed i punti del perimetro che le determinano possono essere animati da un moto di velocità angolare costante nella circonferenza ma diversa nella ellisse: questo ci permette di definire la proprietà dell' Ellisse, relativa ad una qualunque area S_x :

AREE UGUALI SONO PERCORSE IN TEMPI UGUALI



Si consideri che la Fig.5 bis ci richiama, dal punto di vista geometrico, il concetto di velocità areale: «intenderemo per velocità areolare $\frac{dS}{dt}$ il rapporto fra l'area dS descritta nell'intervallo infinitesimo (t,t+dt) dal raggio vettore e lo stesso dt. L'area dS descritta da P-O nel tempo dt vale a meno di infinitesimi di ordine superiore, un settore circolare di raggio uguale a rho (valore del raggio vettore all'istante t) e di angolo al centro dtheta, incremento di theta nell'intervallo (t,t+dt). Si ha allora $dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$. Quindi la velocità areale è $s' = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{dt}$ "Dario Graffi-MECCANICA RAZIONALE- C.Editrice Prof.R.Pàtron".

L'ultima espressione è la stessa vista per $\rho^2 = (\sqrt{mq})^2$, quando si sia preso per angolo al centro gli angoli del vettore dell'ellisse, la relazione che lega questi agli angoli M e le rispettive aree S_x .

In **ASTRONOMIA** il valore E è detto **Anomalia Eccentrica** e quando il valore OS è uguale alla semidistanza focale (c) per cui $\frac{OS}{q} = \frac{c}{q} = e$

(eccentricità) il valore $M = (E - e \sin E)$ è chiamato **Anomalia Media** (Mean Anomaly), inoltre la proprietà di uguaglianza tra le aree, per uno stesso tempo è chiamata *Seconda Legge Sperimentale di Keplero*.

SUL TEOREMA DEI PIANETI E L'AREA DELL'ELLISSE

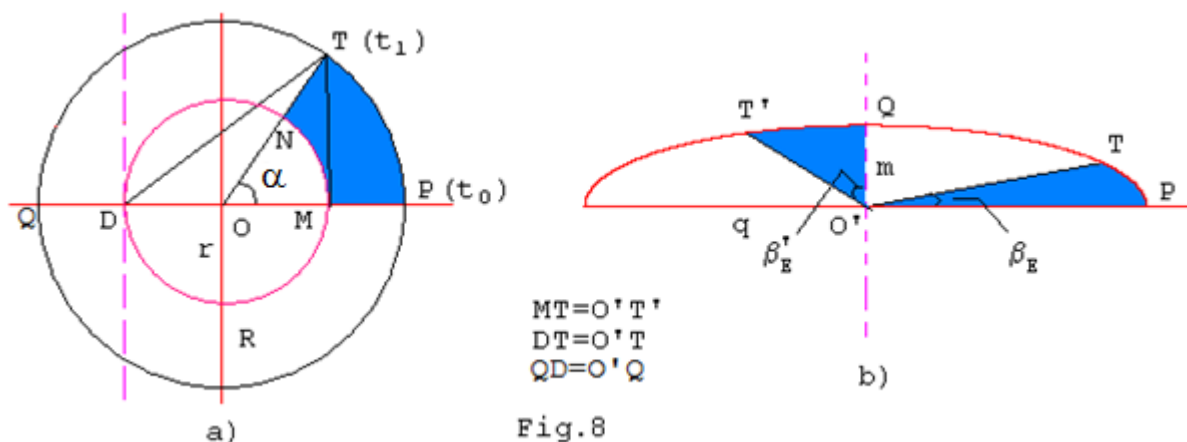


Fig.8

Per effetto del Teorema dei Pianeti (fig.8) la circonferenza a) di raggio R dà luogo all'ellisse b) (vedi Cap.VI Pag.25-26) di semi assi $q=R+r$ e $m=R-r$.

Sulla Circonferenza abbiamo

$$\overline{DT} = R^2 + r^2 - 2Rr \cos^2(180^\circ - \alpha) \quad \overline{MT} = R^2 + r^2 - 2Rr \cos^2(\alpha)$$

E le coordinate sull'Ellisse:

$$T \left(q \cos \frac{\alpha}{2}; m \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{e} \quad T' \left(q \sin \frac{\alpha}{2}; m \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{e le distanze}$$

$$\overline{O'T} = q^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (R+r)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + (R-r)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = R^2 + r^2 + 2Rr \cos^2 \alpha$$

$$\overline{O'T'} = q^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + m^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (R+r)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (R-r)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = R^2 + r^2 - 2Rr \cos^2 \alpha$$

Ora volendo calcolare l'area della ellisse così tracciata, (per quanto visto nel paragrafo precedente) tale area risulta essere

$$\overline{PO'TP} = \frac{mq}{2} \frac{\alpha}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\alpha}{2} \quad \text{per cui l'area } \overline{PMNT} = \frac{R^2 - r^2}{2} \alpha \text{ della}$$

circonferenza è il doppio dell' area $PO'TP$, come indicato anche dalla velocità areale.

Ora se il tracciamento dell'Area della circonferenza avviene nel tempo $t=(t_1-t_0)$ vuol dire che l'arco PT della circonferenza e PT (o QT') dell' ellisse sono percorsi nello stesso tempo e ad ogni punto T della circonferenza corrisponde un punto T (o T') nell'ellisse poichè i vettori $DT=O'T$ (o $MT=O'T'$).

Ovviamente per $\alpha = \pi = 180^\circ$ nella circonferenza corrisponderà un punto nella ellisse il cui parametro è $\alpha/2 = \pi/2 = 90^\circ$.

Con $\frac{\alpha}{2}$ abbiamo tutte le considerazioni viste nel calcolo dell'area dell' ellisse, per cui è possibile calcolare direttamente l'angolo

$$M = \left(\frac{\alpha^{Rad}}{2} - \varepsilon \sin \frac{\alpha}{2} \right) \text{ partendo da un tempo medio } t \text{ della circonferenza.}$$

ESEMPIO 3 Sia l'ellisse di semiassi $q=3$ e $m=2$ e la circonferenza $R=2,5$ e $r=0,5$ e nel tempo t ($43,59111827$ gg) si abbia $\alpha = \frac{360^\circ}{P}t = 42,96572823$ ($P=365,24$ gg periodo di rivoluzione)

$$\frac{\alpha}{2} = 21,48286412, \text{ come da Fig.8 a)}$$

Dalla circonferenza il teorema di Carnot:

$$\overline{MT}^2 = (2,5)^2 + (0,5)^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \cdot \cos 42,96572823 = 4,670596221$$

$$\overline{MT} = 2,161156223$$

$$\overline{DT}^2 = (2,5)^2 + (0,5)^2 + 2 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \cdot \cos 42,96572823 = 8,329403779$$

$$\overline{DT} = 2,886070647$$

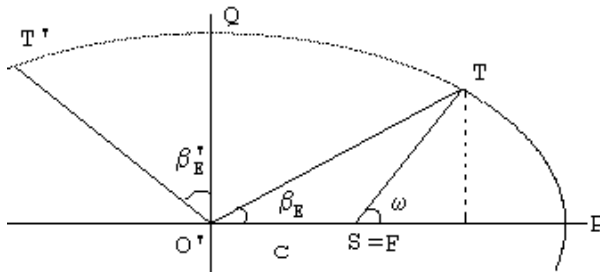


Fig. 9

Tenendo conto del Teorema dei Pianeti applichiamo alla relativa ellisse Fig.9 i dati calcolati nella circonferenza MT , DT e $\alpha/2$. Appliciamo i valori parametrici per le coordinate del punto T' :

$$\begin{cases} x = m \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos 21,48286412 = 1,861054277 \\ y = q \sin \frac{\alpha}{2} = 3 \sin 21,48286412 = 1,09866883 \end{cases}$$

quadrando e sommando $\overline{O'T'} = \sqrt{4,67059622} = 2,161156223 = \mathbf{MT}$

Calcoliamo l'angolo al centro:

$$\beta_E' = \arctan \frac{q}{m} \tan \frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{3}{2} \tan 21,48286412 = \arctan 0,590347548 = 30,5553738$$

Per il punto T:

$$\begin{cases} x = q \cos \frac{\alpha}{2} = 3 \cos 21,48286412 = 2,791581416 \\ y = m \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin 21,48286412 = 0,732445886 \end{cases}$$

quadrando e sommando $\overline{O'T} = \sqrt{8,329403779} = 2,886070647 = \mathbf{DT}$

Calcoliamo l'angolo al centro:

$$\beta_E = \arctan \frac{m}{q} \tan \frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{2}{3} \tan 21,48286412 = \arctan 0,262376648 = 14,70169181$$

LUNGHEZZA DELL'ARCO DELL'ELLISSE - RETTIFICAZIONE

Abbiamo visto:

$$x = q \cos \alpha = (R + r) \cos \alpha$$

$$y = m \sin \alpha = (R - r) \sin \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{y}{x} = \frac{m}{q} \tan \alpha; \quad \frac{dy}{dx} \frac{d\alpha}{dx} = m \cos \alpha \frac{1}{-q \sin \alpha} = -\frac{m}{q} \frac{1}{\tan \alpha}$$

Dalla formula di rettificazione $\frac{ds}{dx} = \left(\sqrt{1 + (f'x)^2} \right)$ sostituendo con

$$\frac{dx}{d\alpha} = -q \sin \alpha; \quad dx = d\alpha(-q \sin \alpha) \text{ si avrà}$$

$$ds = \left[\sqrt{1 + \left(-\frac{m \cos \alpha}{q \sin \alpha} \right)^2} d\alpha(-q \sin \alpha) \right] = \left[\sqrt{\frac{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha}{q^2 \sin^2 \alpha} (-q \sin \alpha)^2} \right] d\alpha$$

il che vuol dire:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha}$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(R+r)^2 \sin^2 \alpha + (R-r)^2 \cos^2 \alpha} d\alpha =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos 2\alpha} d\alpha;$$

1]

Formula di rettificazione rappresentante l'Integrale ellittico di 2^a specie sotto nuova veste; infatti tale integrale sviluppato in

cosa diventa $s = q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha} d\alpha$ con e =eccentricità equivalente alla

formula classica nota $s = q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$: quest'ultima espressione si sarebbe ottenuta ponendo $x = q \sin \alpha$ e $y = m \cos \alpha$ anziché $x = q \cos \alpha$ e $y = m \sin \alpha$, come è stato fatto.

La 1] non differisce dalla equazione mostrata nella pagina precedente "SUL TEOREMA DEI PIANETI....." in quanto i valori α e 2α in 1] equivalgono ad $\alpha/2$ e α visti in quella pagina.

IL VALORE GEOMETRICO DELL'INTEGRALE ELLITTICO
(QUADRATURA)

Dalla formula precedente si ha: $\left. \begin{array}{l} \text{per } \alpha=0 \text{ sar\`a } \sqrt{(R-r)^2} = \sqrt{m^2} = m \\ \text{per } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ sar\`a } \sqrt{(R+r)^2} = \sqrt{q^2} = q \end{array} \right\} 2R = (q+m)$

e il suo valore geometrico: $\left[\frac{\sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha}}{2} + \frac{m}{2} \right] \alpha^R$

che per $\alpha = \pi/2$, il perimetro del quadrante dell'Ellisse e della circonferenza è uguale $\left(\frac{q+m}{2}\right) \frac{\pi}{2} = R \frac{\pi}{2}$ e quindi il perimetro dell'Ellisse e' uguale al perimetro della circonferenza di raggio R.

(Nel Cap.IIIBis "PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELL'ELLISSE"

avevamo scritto $\overline{SA}^2 = \left(\frac{m^2}{q} \cos \alpha\right)^2 + (m \sin \alpha)^2$ ed anche $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m} \overline{SA}$ dove per $\alpha=0$

e $\alpha = \frac{\pi}{2}$ abbiamo $\frac{ds}{d\alpha} = m$ e $\frac{ds}{d\alpha} = q$ giusto quanto sopra)

Riassumiamo!

a) l'area dell'ellisse e' uguale all'area della corona circolare data dalle due circonferenze;

b) la relazione che lega l'angolo dell'ellisse e delle

circonferenze e' data da $\tan \beta = \frac{m}{q} \tan \alpha = \frac{R-r}{R+r} \tan \alpha$

c) mediante l'angolo α della circonferenza e' possibile calcolare il perimetro dell'ellisse e il relativo angolo β , sapendo che il perimetro del quadrante dell'ellisse e' uguale a quello della circonferenza maggiore

$$\left(R \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{q+m}{2} \frac{\pi}{2}\right)$$

d) gli archi dell'Ellisse e della Circonferenza sono uguali solo per $\alpha = \pi/2$, non per valori intermedi, come si può constatare calcolando la risoluzione geometrica di un qualunque arco di Ellisse AE per $0^\circ < \alpha < \pi/2$:

$$\overline{AE} = \left[\frac{\sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha}}{2} + \frac{m}{2} \right] \quad \widehat{AE} = \overline{AE} \alpha \neq R\alpha$$

dove gli archi e gli angoli sono tutti conteggiati dall'ascissa.

ESEMPIO4: ARCO D'ELLISSE

Sia una Ellisse ($q = 3,5$; $m = 1,7$) e ricordando $\tan \beta = \frac{m}{q} \tan \alpha$, si

vogliamo l'arco di ellisse:

per $\beta = \int_{25,906508}^{90}$ corrispondente a $\alpha = \int_{45}^{90}$; $\tan 25,906508 = \frac{1,7}{3,5} \tan 45^\circ$ dobbiamo allora

calcolare il valore dell'arco, per

$$\beta = \int_0^{25,906508} \text{ corrispondente a } \alpha = \int_0^{45} \text{ che darà:}$$

$$\text{Arc} = \left[\frac{\sqrt{3,5^2 \cdot 0,5 + 1,7^2 \cdot 0,5}}{2} + \frac{1,7}{2} \right] \frac{45\pi}{180} = 1,7480463$$

mentre per: $\beta = \int_0^{90}$ e $\alpha = \int_0^{90}$ avremo: $\text{Arc} = 4,0840704$

L'arco richiesto sarà: $\beta = \int_{25,906508}^{90} = \int_0^{90} - \int_0^{25,906508}$ per $\alpha = \int_{45}^{90}$;

$$\text{Arc} = 4,0840704 - 1,7480463 = 2,3360241$$

Raccogliamo:

Angolo circonferenza α	Angolo Ellisse β	Area Ell. e cor.Circolare	Arco Ellisse	Arco Circ. $R = (q+m)/2$
$0^\circ \text{ ----} \rightarrow 45^\circ$	$0^\circ \text{ ---} \rightarrow 25,906$	2,3365595	1,7480463	2,0420352
$45^\circ \text{ ----} \rightarrow 90^\circ$	$25,90 \text{ --} \rightarrow 90^\circ$	2,3365595	2,3360241	"
$0^\circ \text{ ----} \rightarrow 90^\circ$	$0^\circ \text{ ----} \rightarrow 90^\circ$	4,6731191	4,0840704	4,0840704

Come già visto nel "Teorema dei Pianeti" esiste una relazione biunivoca tra Ellisse e i raggi di due circonferenze concentriche

data da:

$$\begin{cases} q = R + r \\ m = R - r \end{cases} \iff \begin{cases} R = \frac{q+m}{2} \\ r = \frac{q-m}{2} \end{cases}$$

L'espressione sopra si collega perfettamente all'esempio empirico:
 «Se schiacciamo un cerchio in due poli contrapposti, questi tenderà ad assumere la forma di una ellisse e tanto stringo tanto si allarga. Notiamo che l'Area originaria della circonferenza tende a zero, mentre il suo perimetro rimane costante e uguale a quello dell'anello iniziale; e quando i due poli si

congiungeranno l'Area sarà a zero, ed il perimetro darà un semiasse che vale due volte il raggio del cerchio.»

Come visto nel capitolo precedente il perimetro dell'anello di raggio R e dell'ellisse è lo stesso, dato dal valore geometrico del Perimetro della Ellisse dell'integrale di 2° specie, cioè $R = \frac{q+m}{2}$ con $q > m$ semi assi dell'ellisse,; ma ci dice anche che archi di settori minori dei quarti di arco non sono uguali tra loro (specchietto sopra)

Volendo calcolare la Velocità degli archi, dai valori dello specchietto avremo:

$$\frac{4,0840704}{T_{periodo}} = V \quad \text{Velocità media sulla circonferenza e sull'ellisse}$$

$$\frac{1,7480463}{T_{periodo}/2} = V_1 \quad \text{Velocità media primo tratto ellisse}$$

$$\frac{2,3360241}{T_{periodo}/2} = V_2 \quad \text{Velocità media secondo tratto ellisse}$$

$$\frac{V_1 + V_2}{2} = V \quad \text{Velocità media}$$