

## **VII. AREA E PERIMETRO ELLISSE**

AREA DEL SETTORE DELL'ELLISSE

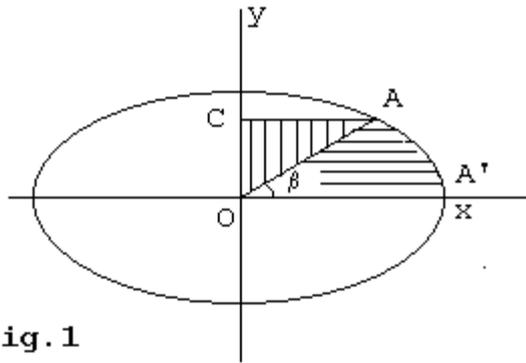


Fig. 1

I°) Sia  $S(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx$  l'area OCAA'.

La funzione  $S(x)$  deve essere tale e poiché è  $S(x) = \frac{1}{2} xy + \text{area settore OAA'}$  e l'arco A' è tale che il suo coseno vale

$$\frac{x}{q} \text{ avremo } \frac{\text{Area settore OAA'}}{S} = \frac{\arccos \frac{x}{q}}{\frac{\pi}{2}}$$

e quindi  $S(x) = \frac{1}{2} x \frac{m}{q} \sqrt{q^2 - x^2} + \frac{2S}{\pi} \arccos \frac{x}{q}$  espressione che derivata e semplificata darà la Funzione primitiva:

$$S(x) = \frac{m}{q} \left( \frac{x\sqrt{q^2 - x^2}}{2} + \frac{q^2}{2} \arccos \frac{x}{q} \right) = \text{OCAA'}$$

che per  $x = q \cos \alpha$ ;  $y = m \sin \alpha$  diventa:

$$S(x) = \text{OCA} + \text{OAA}' = \frac{qm}{2} (\cos \alpha \sin \alpha + \arccos \cos \alpha)$$

da cui:  $S(x)_{(\text{OAA}')} = \frac{qm}{2} \arccos \cos \alpha = \frac{qm}{2} \frac{\alpha^\circ \pi}{180} = \frac{qm}{2} \alpha^R$  ( $\alpha$  in rad)

II°) **INTEGRALE DI VAG.** In modo più rigoroso possiamo calcolare l'integrale (per parti) delle uguaglianze parametriche  $x = q \cos \alpha$ ;  $y = m \sin \alpha$ ;  $y' = m \cos \alpha$

$$S(x)_{(\text{OCAA}')} = \int q \cos \alpha m (\cos \alpha) d\alpha = qm \int \cos^2 \alpha d\alpha = qm \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha =$$

$$= qm \left[ \int \frac{d\alpha}{2} + \int \frac{\cos 2\alpha d\alpha}{2} \right] = qm \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) = \frac{qm}{2} \alpha + \frac{q \cos \alpha m \sin \alpha}{2}$$

$$\left( \begin{array}{l} \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha); \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha); \\ 2\alpha = t \quad d\alpha = \frac{1}{2} dt; \quad \int \frac{\cos t}{2} dt = \frac{1}{2} \sin t = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \end{array} \right)$$

l'ultimo membro dell'espressione  $\underline{S}$  è l'area OCA per cui avremo in

radianti l'area  $S(x)_{\text{OAA}'} = \frac{mq}{2} \alpha$  (Esempi numerici più avanti)

Come si vede l'area dell'Ellisse dipende dall'angolo  $\alpha$  legato

all'Ellisse dalla relazione:  $\tan \beta = \frac{m}{q} \tan \alpha$

AREA ELLISSE E CORONA CIRCOLARE

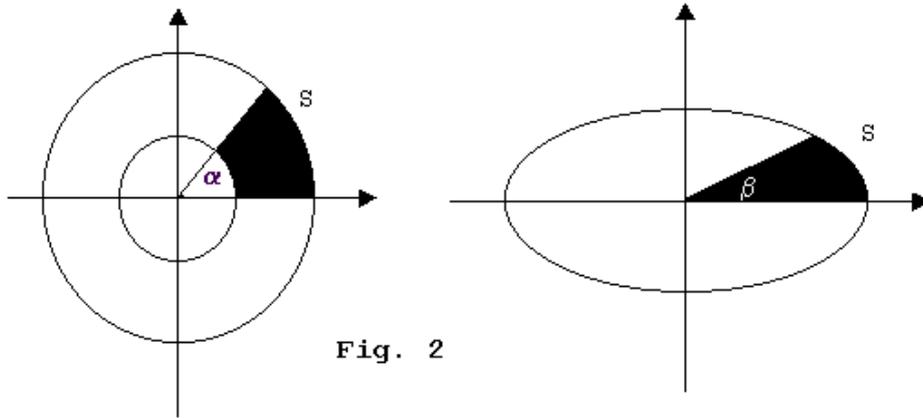
Essendo  $\alpha$  in radianti, da ciò che abbiamo visto l'area di un settore dell'Ellisse e':

$$S = \frac{qm}{2} \arccos(\cos \alpha) = \frac{qm}{2} \alpha$$

dove per  $\alpha = \frac{\pi}{2}$   $S = \frac{qm}{2} \frac{\pi}{2}$  area quadrante Ellisse

Se sostituiamo  $q = R + r$  e  $m = R - r$  (sistema algebrico in cui dati due valori  $R$  e  $r$  ha soluzione per  $2R=q+m$  e  $2r=q-m$ ), l'area del settore dell'Ellisse sarà:

$$S = \frac{qm}{2} \alpha = \frac{R^2 - r^2}{2} \alpha$$



E poichè  $\alpha$  e' l'angolo delle circonferenze  $R$  ed  $r$  (Cap. V° ELLISSE), quest'ultima formula oltre che a rappresentare l'area di un settore dell'Ellisse rappresenta anche l'area di un settore della corona circolare di ampiezza  $(R-r)$  di uguale valore:

L'area di un settore di Ellisse di angolo  $\beta$  e' uguale all'area di un settore di corona circolare di angolo  $\alpha$  corrispondente a  $\beta$  mediante la formula  $\alpha = \arctan\left(\frac{q}{m} \tan \beta\right)$ .

Possiamo anche aggiungere che l'area di un settore di Ellisse è proporzionale all'angolo che forma l'area del settore della corona circolare  $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{qm}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2} = \text{costante}$ . Si tenga presente che l'angolo dell'area del settore dell'Ellisse va preso iniziando da zero, cioè dall'asse delle ascisse con movimento antiorario.

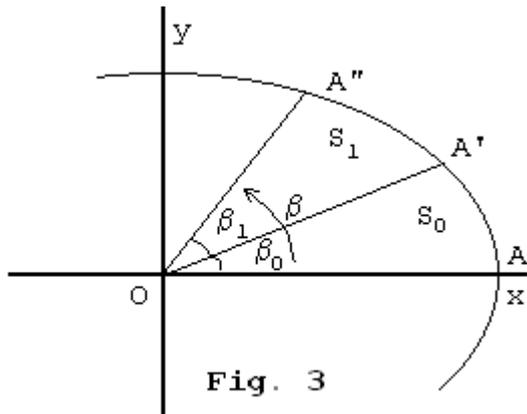


Fig. 3

Nell'Ellisse in figura si ha che  $\beta = \beta_1 + \beta_0$  e  $S = S_1 + S_0$  dove  $S$  è l'area del settore relativo a  $\beta$ . In realtà i due angoli calcolabili sono  $\beta$  e  $\beta_0$  perché partono dall'ascissa ed essi danno luogo ai due angoli del settore corona-circolare  $\alpha$  e  $\alpha_0$ ,

$$\text{tramite } \tan \alpha = \frac{q}{m} \tan \beta \text{ e } \tan \alpha_0 = \frac{q}{m} \tan \beta_0 ;$$

mentre  $\beta_1$  non può

dare il valore di  $\alpha_1$  non partendo

dal valore zero dell'ascissa. Questo perché gli angoli dell'ellisse non sono proporzionali alle aree, mentre le aree della corona-circolare (uguali alle aree dell'Ellisse) sono

proporzionali ai propri angoli, quindi  $\frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{S}{\alpha}$  ma dove si deve

tener presente che nel rapporto  $\frac{S_1}{\alpha_1}$ ,  $\alpha_1$  non ha un corrispettivo

$\beta_1$  nella Ellisse, perché l'area  $S_1$  assume un valore posizionale in quanto l'integrale che la determina vale a partire dall'ascissa.

Noti  $\beta$  e  $\beta_0$  si calcolerà  $S$  e  $S_0$  e poi  $S_1 = S - S_0$  e mediante la

proporzione sopra indicata si troverà  $\alpha_1 = \frac{S_1 \alpha_0}{S_0} * 1$ .

[ **ESEMPIO 1**: dell'Ellisse in Fig. 3 siano i semi-assi  $q=3$ ,  $m=2$  ed i punti  $A'(2, 320424812; 1, 267653772)$   $A''(0, 589580871; 1, 960996844)$  e i rispettivi angoli al centro:

$$\beta_0 = \arctan \frac{1,267653772}{2,320424812} = 28,64788823 \quad \text{e} \quad \beta = \arctan \frac{1,960996844}{0,589580871} = 73,266403^\circ$$

mentre avremo gli angoli parametrici:

$$\alpha_0 = \arctan \frac{q}{m} \tan \beta_0 = 39,333031^\circ = 0,686490895 \text{ Rad}$$

$$\alpha = \arctan \frac{3}{2} \tan 73,266403 = 78,66606232^\circ = 1,372981797 \text{ Rad}$$

(entrambe anche con la formula parametrica  $x = q \cos \alpha$  o  $y = m \sin \alpha$ ) e le rispettive aree ellittiche:

$$S = \frac{mq}{2} \alpha = 3 \cdot 1,372981797 \text{ Rad} = 4,118945391$$

$$S_0 = 3 \cdot 0,686490895 \text{ Rad} = 2,059472685$$

$$S_1 = S - S_0 = 4,118945391 - 2,059472685 = 2,059472705$$

Come vediamo l'Area  $S$  è doppia dell'Area  $S_0$ , quindi se  $S_0 = S_1$ ,

poiché sappiamo che  $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{mq}{2}$  dovrà essere  $\alpha_0 = \alpha_1$ , ma  $\alpha_1$  non è

determinabile dalle formule di calcolo viste in quanto l'area  $S_1$

non è adiacente all'ascissa quindi da  $\alpha_1$  non possiamo calcolare l'angolo al centro  $\beta_1$  che va calcolato per differenza:

$$\beta_1 = \beta - \beta_0 = 73,266403^\circ - 28,6478664^\circ = 44,6185366^\circ$$

Tale angolo se fosse adiacente all'ascissa avrebbe come ipotetico

angolo parametrico  $\alpha'_1 = \arctan \frac{q}{m} \tan 44,6185366^\circ = 55,95690767^\circ$  anziché

$$\alpha_1 = \alpha_0 = 39,333031^\circ . ]$$

AREA PARZIALE DELL'ELLISSE

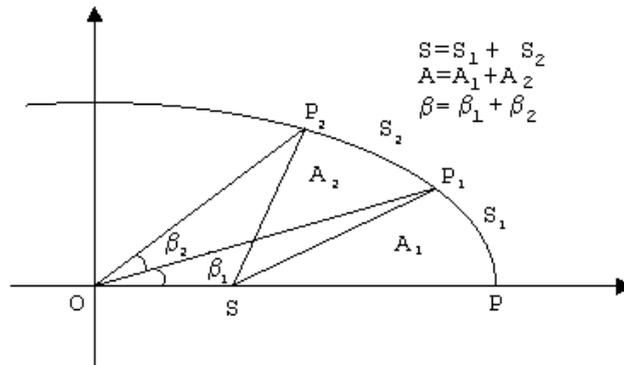


Fig. 4

Sia (vedi Fig.4)  $S_1$  l'area ed  $E_1$  il relativo angolo parametrico in radianti di una Ellisse (di semiassi  $q > m$ ); inoltre sia l'area  $POP_2 = S = (S_1 + S_2)$  ed  $E$  l'angolo parametrico relativo in radianti, abbiamo visto che  $\frac{S}{E} = \frac{S_1}{E_1} = \frac{mq}{2}$ . Ed osservando la Fig.4 vediamo:

$$A = S - \text{area}SOP_2 = S - \frac{OSm \sin E}{2}$$

e sostituendo S: 
$$A = \frac{mq}{2}E - \frac{OSm}{2} \sin E = \frac{mq}{2} \left( E - \frac{OS}{q} \sin E \right).$$

Si consideri che essendo il punto S tra O e P è sempre  $\frac{OS}{q} < 1$ ,

dove OS è una qualunque distanza dal centro Ellisse.

Volendo il valore dell'area  $A_2$  con  $A_2 = A - A_1$ , sempre a partire dall'ascissa come per le aree  $S_1$  e  $S$ , si avrà:

$$A_1 = \frac{mq}{2} \left( E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)$$

pertanto 
$$A_2 = A - A_1 = \frac{mq}{2} \left[ \left( E - \frac{OS}{q} \sin E \right) - \left( E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right) \right] = \frac{mq}{2} M_2.$$

$$\frac{A}{E - \frac{OS}{q} \sin E} = \frac{A_1}{E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1} = \frac{A_2 = A - A_1}{\left( E - \frac{OS}{q} \sin E \right) - \left( E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)} = \frac{mq}{2}$$

Cioè

Posto  $M = \left( E - \frac{OS}{q} \sin E \right)$  e  $M_1 = \left( E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)$  (M e  $M_1$  sono valori in Rad)

avremo  $\frac{A}{M} = \frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M - M_1}$  posto  $M_2 = M - M_1$  avremo  $\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2}$

e se  $A_1 = A_2$  dovrà essere  $M_2 = M_1$ : analogamente a quanto visto precedentemente per l'area  $S_1$  e  $\alpha_1$ , l'angolo  $M_2$  (proporzionale a  $A_2$ )

non ha un corrispettivo  $\beta$  nella ellisse, ma dovrà essere ricavato per differenza.

Possiamo allora scrivere la relazione geometrica che lega le aree

dell'ellisse agli angoli di riferimento:  $\frac{S_1}{E_1} = \frac{S_0}{E_0} = \frac{qm}{2}$  e

$\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2} = \frac{qm}{2}$  per cui  $\frac{S_1}{E_1} = \frac{S_0}{E_0} = \frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2} = \frac{qm}{2}$  con i relativi significati visti per S, A, E, M.

**ESEMPIO 2:** Sia una ellisse di semiassi  $q=3$  e  $m=2$  (vedi **Fig.4**) e sia l'angolo di riferimento in radianti

$\alpha_1 = 39,333031^\circ \frac{\pi}{180} = 0,686490895^{Rad}$  la distanza  $OS=1,5$  (per cui  $\frac{OS}{q}=0,5$ ).

Sappiamo essere  $\beta_1 = \arctan \frac{2}{3} \tan 39,333031^\circ = 28,647888^\circ$

$M_1 = (0,686490895^R - 0,5 \sin 39,333031^\circ) = 0,369577452^R$

$M_1$  è necessariamente in Rad perché proviene da  $\alpha^R$

e quindi l'area  $A_1 = \frac{3 \cdot 2}{2} M_1 = 1,108732356$

Posto  $A=A_1+A_2$  e  $A_1=A_2$  si ha  $\frac{A_1}{M_1} = \frac{1,108732356}{0,369577452} = \frac{qm}{2} = 3$  e  $\frac{A}{M} = \frac{2A_1}{2M_1} = \frac{2,217464712}{0,739154904} = \frac{qm}{2} = 3$

dovrà allora essere  $M = \alpha - 0,5 \sin \alpha = 0,739154904$  dove  $\alpha$  è l'angolo di riferimento del settore A. Risolvendo  $\alpha$  rispetto a M abbiamo  $\alpha = 1,206308053^R = 69,11636023^\circ$  infatti:

$M = 1,206308053 - 0,5 \sin 69,11636023^\circ = 0,739154903$  sufficientemente vicino al valore M di partenza.

Il valore  $\frac{A_2}{M_2}$  è dato da  $M_2=M_1$  ma in realtà  $M_2$  non ha corrispondenza

con l'area  $A_2$  segnata in **Fig.4** in quanto l'area non è adiacente all'ascissa; esso è un valore proporzionale.

PROPRIETA' DELLE AREE DELL'ELLISSE

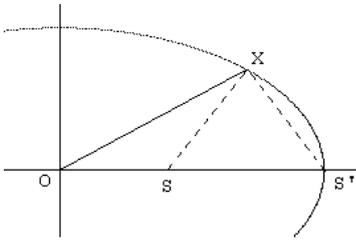


Fig. 5

L'espressione  $M = (E - \frac{OS}{q} \sin E)$  determina l'area di un qualunque settore di ellisse; infatti ogni punto dell'ellisse è determinato dall'angolo parametrico E mentre la posizione del punto S lungo l'ascissa ne determina l'area (vedi Fig.5).

per  $OS = 0$  avremo  $S_x = \frac{mq}{2} E$  area  $OS' \widehat{X}O$

per  $OS < q$  avremo  $S_x = \frac{mq}{2} (E - \frac{OS'}{q} \sin E)$  area  $SS' \widehat{X}S$

per  $OS = q$  avremo  $S_x = \frac{mq}{2} (E - \sin E)$  area  $S' \widehat{X}S'$

Dato il rapporto  $\frac{OS}{q} = \varepsilon$  potremo scrivere per qualsivoglia area

$$S_x = \frac{mq}{2} (E - \varepsilon \sin E) = \frac{mq}{2} M .$$

Possiamo anche considerare il valore  $\sqrt{qm} = R$  come raggio di una

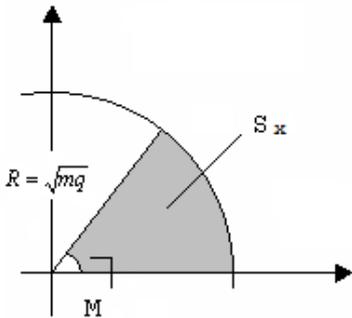


Fig. 5 bis

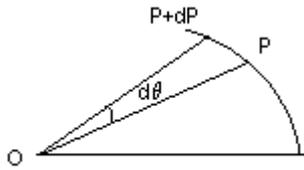
circonferenza, che darà sempre  $S_x = \frac{qm}{2} M = \frac{R^2}{2} M$

per cui l'area della circonferenza vale la relativa area dell' ellisse e se il suo tempo di percorrenza è P, esso varrà sia per l'ellisse sia per la circonferenza. Ora se P è un valore medio possiamo ipotizzare che l'arco della circonferenza verrà spazzata a velocità costante e quindi ad ogni tempuscolo t corrisponda un angolo al centro ed a questi la relativa area della circonferenza che

a sua volta rappresenta un'area dell'ellisse. Inoltre per valori di t uguali si avranno nella circonferenza angoli al centro ed aree uguali, corrispondenti ad aree  $S_x$  dell'Ellisse uguali e percorse nello stesso tempo.

Da tutte queste considerazioni possiamo dire che nella circonferenza di riferimento di una ellisse, per la legge temporale, le aree  $S_x$ , sono lineari in un intervallo di tempo ed i punti del perimetro che le determinano possono essere animati da un moto di velocità angolare costante nella circonferenza ma diversa nella ellisse: questo ci permette di definire la proprietà dell' Ellisse, relativa ad una qualunque area  $S_x$ :

AREE UGUALI SONO PERCORSE IN TEMPI UGUALI



Si consideri che la Fig.5 bis ci richiama, dal punto di vista geometrico, il concetto di velocità areale: «intenderemo per velocità areolare  $\frac{dS}{dt}$  il rapporto fra l'area  $dS$  descritta

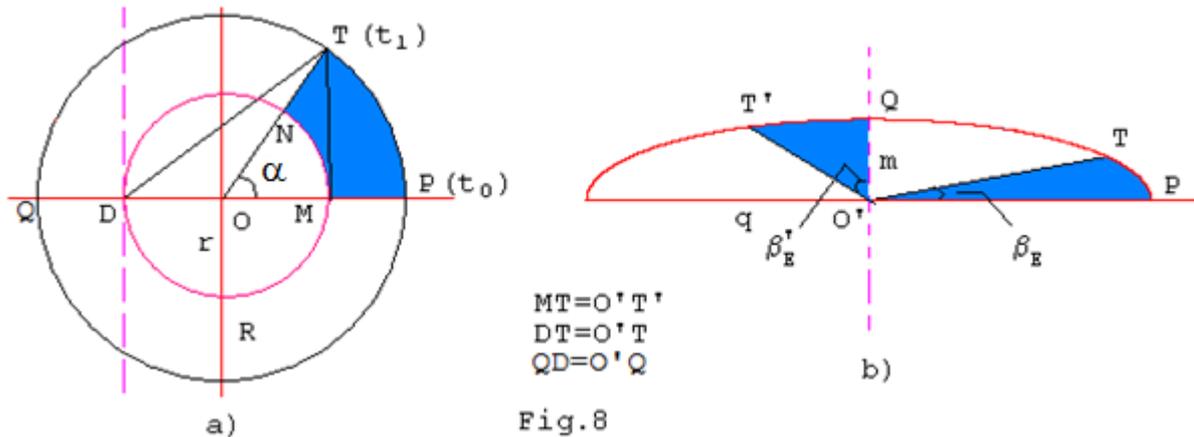
nell'intervallo infinitesimo  $(t, t+dt)$  dal raggio vettore e lo stesso  $dt$ . L'area  $dS$  descritta da  $P-O$  nel tempo  $dt$  vale a meno di infinitesimi di ordine superiore, un settore circolare di raggio uguale a  $\rho$  (valore del raggio vettore all'istante  $t$ ) e di angolo al centro  $d\theta$ , incremento di  $\theta$  nell'intervallo  $(t, t+dt)$ . Si ha allora  $dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$ . Quindi la velocità areale è  $s = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\theta}{dt}$  "Dario Graffi-MECCANICA RAZIONALE- C.Editrice Prof.R.Pàtron".

L'ultima espressione è la stessa vista per  $\rho^2 = (\sqrt{mq})^2$ , quando si sia preso per angolo al centro gli angoli del vettore dell'ellisse, la relazione che lega questi agli angoli  $M$  e le rispettive aree  $S_x$ .

In **ASTRONOMIA** il valore  $E$  è detto **Anomalia Eccentrica** e quando il valore  $OS$  è uguale alla semidistanza focale ( $c$ ) per cui  $\frac{OS}{q} = \frac{c}{q} = e$

(eccentricità) il valore  $M = (E - e \sin E)$  è chiamato **Anomalia Media** (Mean Anomaly), inoltre la proprietà di uguaglianza tra le aree, per uno stesso tempo è chiamata *Seconda Legge Sperimentale di Keplero*.

SUL TEOREMA DEI PIANETI E L'AREA DELL'ELLISSE



Per effetto del Teorema dei Pianeti (fig.8) la circonferenza a) di raggio R dà luogo all'ellisse b) (vedi Cap.VI Pag.25-26) di semi assi  $q=R+r$  e  $m=R-r$ .

Sulla Circonferenza abbiamo per Carnot:

$$\overline{DT}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(180^\circ - \alpha) \quad \overline{MT}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha)$$

E le coordinate sull'Ellisse:

$$T \left( q \cos \frac{\alpha}{2}; m \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{e} \quad T' \left( q \sin \frac{\alpha}{2}; m \cos \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{e le distanze}$$

$$\overline{OT}^2 = q^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + m^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (R+r)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + (R-r)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = R^2 + r^2 + 2Rr \cos^2 \alpha$$

$$\overline{OT'}^2 = q^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + m^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = (R+r)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (R-r)^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = R^2 + r^2 - 2Rr \cos^2 \alpha$$

Ora volendo calcolare l'area della ellisse così tracciata, (per quanto visto nel paragrafo precedente) tale area risulta essere

$$\overline{PO'TP} = \overline{QO'T'Q} = \frac{mq}{2} \frac{\alpha}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\alpha}{2} \quad \text{per cui l'area } \overline{PMNT} = \frac{R^2 - r^2}{2} \alpha \text{ della}$$

circonferenza è il doppio di ciascuna area dell'ellisse.

Ora se il tracciamento dell'Area della circonferenza avviene nel tempo  $t=(t_1-t_0)$  vuol dire che l'arco PT della circonferenza e PT (o QT') dell' ellisse sono percorsi nello stesso tempo e ad ogni punto T della circonferenza corrisponde un punto T (o T') nell'ellisse poichè i vettori  $DT=O'T$  (o  $MT= O'T'$ ).

Ovviamente per  $\alpha = \pi = 180^\circ$  nella circonferenza corrisponderà un punto nella ellisse il cui parametro è  $\alpha/2 = \pi/2 = 90^\circ$ .

Con  $\frac{\alpha}{2}$  abbiamo tutte le considerazioni viste nel calcolo

dell'area dell'ellisse, per cui è possibile calcolare direttamente

l'Anomalia Eccentrica per  $E=\alpha/2$   $M = \left( \frac{\alpha^R}{2} - \varepsilon \sin \frac{\alpha}{2} \right)$  partendo da un tempo

medio t della circonferenza.

**ESEMPIO 3** Sia l'ellisse di semiassi  $q=3$  e  $m=2$  e la circonferenza  $R=2,5$  e  $r=0,5$  e nel tempo  $t$  (43,59111827 gg) si abbia  $\alpha = \frac{360^\circ}{P}t = 42^\circ,96572823 = 1^R,49978684$  ( $P=365,24$  gg periodo di

rivoluzione) e  $\frac{\alpha}{2} = 21^\circ,48286412 = 0^R,749893423$ , come da Fig.8 a).

Dalla circonferenza con il teorema di Carnot:

$$\overline{MT}^2 = (2,5)^2 + (0,5)^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \cdot \cos 42,96572823 = 4,670596221 \quad \overline{MT} = 2,161156223$$

$$\overline{DT}^2 = (2,5)^2 + (0,5)^2 + 2 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \cdot \cos 42,96572823 = 8,329403779 \quad \overline{DT} = 2,886070647$$

\*\*\*\*\*

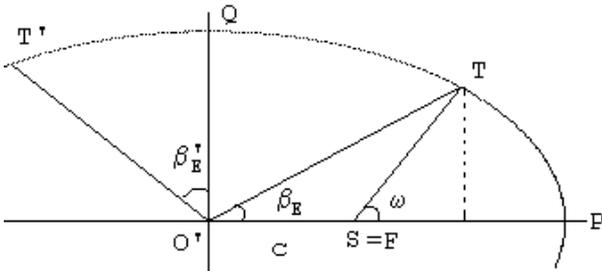


Fig. 9

Tenendo conto del Teorema dei Pianeti applichiamo alla relativa ellisse Fig.9 i dati calcolati sopra  $MT$ ,  $DT$  della circonferenza di Fig.8 e angolo  $\alpha/2$ .

Applichiamo i valori parametrici per le coordinate

del punto  $T'$ :

$$\begin{cases} x = m \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos 21,48286412 = 1,861054277 \\ y = q \sin \frac{\alpha}{2} = 3 \sin 21,48286412 = 1,09866883 \end{cases}$$

Quadrando e sommando  $\overline{O'T'} = \sqrt{4,67059622} = 2,161156223 = \mathbf{MT}$

Calcoliamo l'angolo al centro:

$$\beta_E' = \arctan \frac{q}{m} \tan \frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{3}{2} \tan 21,48286412 = \arctan 0,590347548 = 30^\circ,5553738$$

Per il punto  $T$ :

$$\begin{cases} x = q \cos \frac{\alpha}{2} = 3 \cos 21,48286412 = 2,791581416 \\ y = m \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin 21,48286412 = 0,732445886 \end{cases}$$

Quadrando e sommando  $\overline{O'T} = \sqrt{8,329403779} = 2,886070647 = \mathbf{DT}$

Calcoliamo l'angolo al centro:

$$\beta_E = \arctan \frac{m}{q} \tan \frac{\alpha}{2} = \arctan \frac{2}{3} \tan 21,48286412 = \arctan 0,262376648 = 14^\circ,70169181$$

Vediamo Aree  $\overline{PO'TP} = \overline{QO'T'Q} = \frac{q \times m \alpha}{2 \cdot 2} = \frac{3 \times 2}{2} 0^R,749893421 = 2,2496802$  **metà**

**dell'area indicata nella circonferenza:**

$$\overline{PMNT} = \frac{(2,5)^2 - (0,5)^2}{2} \times 1^R,49978684 = 4,49936052$$

### LUNGHEZZA DELL'ARCO DELL'ELLISSE RETTIFICAZIONE

Abbiamo visto (con **asse maggiore q sull'ascissa**) per un punto A sull'Ellisse:

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \beta = x = q \cos \alpha = (R+r) \cos \alpha \\ \overline{OA} \sin \beta = y = m \sin \alpha = (R-r) \sin \alpha \end{cases} \quad \tan \beta = \frac{y}{x} = \frac{m}{q} \tan \alpha;$$

Sostituiamo nella formula di rettificazione  $\frac{ds}{dx} = \left( \sqrt{1+(f'x)^2} \right)$  i valori

$$\frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx} = m \cos \alpha \cdot \frac{1}{-q \sin \alpha} = -\frac{m}{q} \frac{1}{\tan \alpha}; \quad \frac{dx}{d\alpha} = -q \sin \alpha \quad dx = d\alpha(-q \sin \alpha)$$

si ha 
$$ds = \left[ \sqrt{1 + \left( -\frac{m \cos \alpha}{q \sin \alpha} \right)^2} d\alpha(-q \sin \alpha) \right] = \left[ \sqrt{\frac{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha}{q^2 \sin^2 \alpha}} (-q \sin \alpha)^2 \right] d\alpha$$

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{(R+r)^2 \sin^2 \alpha + (R-r)^2 \cos^2 \alpha} \quad \mathbf{1]}$$

**Ponendo invece l'asse minore m sull'ascissa**, abbiamo:

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \beta = x = m \cos \alpha = (R-r) \cos \alpha \\ \overline{OA} \sin \beta = y = q \sin \alpha = (R+r) \sin \alpha \end{cases} \quad \tan \beta = \frac{y}{x} = \frac{q}{m} \tan \alpha;$$

e con 
$$\frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx} = q \cos \alpha \frac{1}{-m \sin \alpha} = -\frac{q}{m} \frac{1}{\tan \alpha}; \quad \frac{dx}{d\alpha} = -m \sin \alpha \quad dx = d\alpha(-m \sin \alpha)$$

nella stessa formula di rettificazione  $\frac{ds}{dx} = \left( \sqrt{1+(f'x)^2} \right)$  si ottiene:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{m^2 \sin^2 \alpha + q^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{(R-r)^2 \sin^2 \alpha + (R+r)^2 \cos^2 \alpha} \quad \mathbf{2]}$$

**La 1] e 2] rappresentano la "Formula di rettificazione dell'Integrale ellittico di 2ª specie"** sotto nuova veste. Infatti sviluppando la 1] in  $\cos(\alpha)$  e la 2] in  $\sin(\alpha)$  si ottiene rispettivamente:

$$s = q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \quad \mathbf{1]} \quad s = q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \quad \mathbf{2]}$$

che rappresentano la forma classica dell'integrale indicato.

**Analizziamo:**

la 1] 
$$q^2(1 - e^2 \cos^2 \alpha) = (q^2 - c^2 \cos^2 \alpha) = (q - c \cos \alpha)(q + c \cos \alpha)$$
  
 ma anche  $(q - c \cos \alpha) + (q + c \cos \alpha) = 2q$

e la 2] 
$$q^2(1 - e^2 \sin^2 \alpha) = (q^2 - c^2 \sin^2 \alpha) = (q - c \sin \alpha)(q + c \sin \alpha)$$
  
 ma anche  $(q - c \sin \alpha) + (q + c \sin \alpha) = 2q$

Allora il valore dell'integrale ellittico è dato dalla distanza di un generico punto A dai FUOCHI F e F' :

$$AF = (q - c \cos \alpha) \quad AF' = (q + c \cos \alpha) \quad e \quad AF = (q - c \sin \alpha) \quad AF' = (q + c \sin \alpha)$$

giusto

$$\mathbf{AF + AF' = 2q}$$

$$\mathbf{AF \cdot AF' = q^2(1 - e^2 \cos^2 \alpha) = q^2(1 - e^2 \sin^2 \alpha)}$$

## IL VALORE GEOMETRICO DELL'INTEGRALE ELLITTICO (Quadratura)

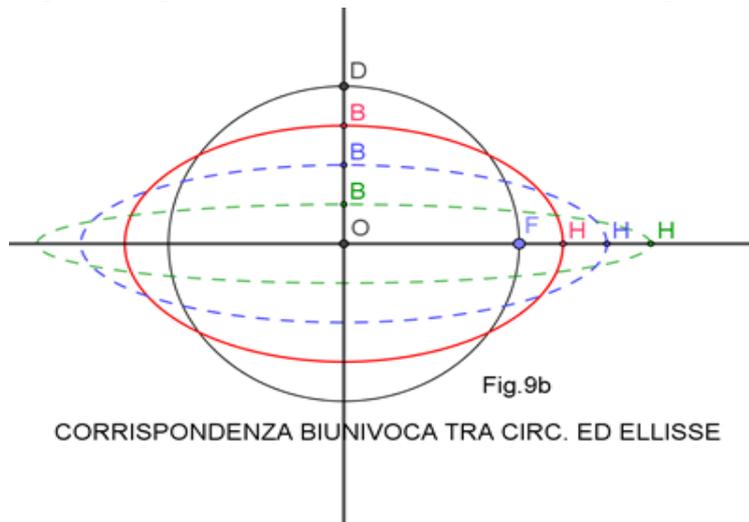
In attesa di trovare la soluzione all'integrale Ellittico di 2<sup>a</sup> specie, cerchiamo il perimetro dell'ellisse geometricamente, prendendo in considerazione l'esempio empirico:

*«Se schiacciamo un cerchio su due poli contrapposti, questi tenderà ad assumere la forma di una ellisse e più stringo, più l'ellisse si allarga. Notiamo che l'area della circonferenza tende a zero, mentre il suo perimetro rimane costante ed uguale a quello dell'anello iniziale; e quando i due poli si congiungeranno, l'area andrà a zero, ed il Perimetro sarà dato da un semi asse che vale due volte il raggio del cerchio»*

Dalla corrispondenza tra ellisse e relativa circonferenza data dal "Teorema dei Pianeti" (vedi su Google pdf o Geo) che oltre alla definizione, ci fornisce la dimostrazione algebrica di un sistema di primo grado a due incognite: noti due valori (q,m) ne esistono altri due, tali che:

$$\begin{cases} (R+r) = q \\ (R-r) = m \end{cases} \iff \begin{cases} 2R = (R+r) + (R-r) = (q+m) \\ 2r = (R+r) - (R-r) = (q-m) \end{cases} \quad 4Rr = (q^2 - m^2) = c^2 \quad \mathbf{1)}$$

dove c=distanza Focale, R e r raggi di circonferenza e q>m semi assi dell'ellissi corrispondenti ottenute dallo schiacciamento, secondo l'esempio empirico, come abbiamo in Fig.9b.



$$\begin{aligned} OD=OF=R &= (q+m) / 2; & OH &= (R+r) = q = \text{Asse Maggiore}; \\ BD=FH=r &= (q-m) / 2; & OB &= (R-r) = m = \text{Asse Minore}. \end{aligned} \quad \text{Per } m=0 \quad 2R=q.$$

Si osservi che il Perimetro rimane sempre quello del cerchio di partenza:

$$2R\pi = (q_x + m_x) \pi$$

si forma così una famiglia di ellissi di uguale perimetro.

Ciò significa che comprimendo la circonferenza ai poli, al cerchio di raggio  $R$  corrisponderà una serie di ellissi con la somma degli assi costante, secondo la formula:

$$2R = (q + m) = [(q + \mu) + (m - \mu)] \quad \text{per } \mu \in (0, m)$$

dove gli assi saranno:

$$(q + \mu) = \text{asse maggiore}$$

$$(m - \mu) = \text{asse minore}$$

per  $(m = \mu)$   $(q + m) = \text{asse maggiore}$

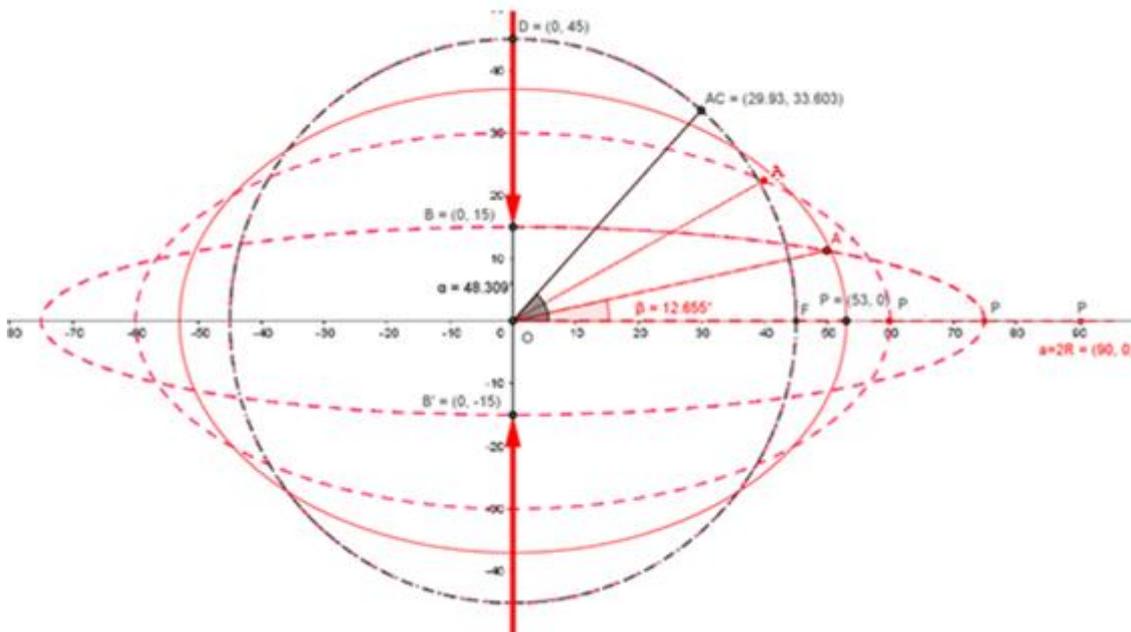
$$(0) = \text{asse minore}$$

quindi

$$2R = (q + m)$$

Dall’applet: [PERIMETRO ELLISSI E CERCHIO.](#)

Vediamo il grafico e analizziamolo.



Dalla l’ellisse (in ROSSO) di partenza, di assi ( $q=53$  e  $m=37$ ) si ottiene la circonferenza di raggio  $(q+m)=2R$  (in NERO) che stretta ai poli descrive le ellissi indicate (in rosso a tratti).

Ad un Punto  $A$  della ellisse in rosso, di angolo  $\beta$ , esiste nella circonferenza, il corrispettivo punto  $A_c$  di angolo  $\alpha$  (in nero); ma alle ellissi date dallo schiacciamento, ai vari punti  $A$ , corrisponde lo stesso punto  $A_c$  e il suo angolo ( $\alpha$ ) eguale per tutte le ellissi, giusto a mostrare la corrispondenza che esiste tra tutte le ellissi e la circonferenza, data dalla formula

$$\tan(\beta) = \frac{(m - \mu)}{(q + \mu)} \tan(\alpha)$$

Invece al muoversi del punto  $A$  sull’arco dell’ellisse, anche il punto  $A_c$  si muoverà, coincidendo con  $A$  solo per  $\beta=0$  o  $\beta=90^\circ$ .

Per  $\mu=m$  allo schiacciamento totale, si ha il risultato di

$$2R = (q + \mu) + (m - \mu) = (q + m) + (0) \quad \text{e nell’applet } 2R = (53 + 37) + (0) = 90 \quad R = 45.$$

(Nel Cap.IIIBis “PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELL’ELLISSE” avevamo scritto

$$\overline{SA}^2 = \left( \frac{m^2}{q} \cos \alpha \right)^2 + (m \sin \alpha)^2 \text{ da cui } \frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m} \overline{SA} \text{ dove per } \alpha=0 \text{ e } \alpha=\frac{\pi}{2} \text{ abbiamo } \frac{ds}{d\alpha} = m \text{ e}$$

$$\frac{ds}{d\alpha} = q \text{ )}.$$

Ora ispirandoci al “TEOREMA DEI PIANETI” dalla **1]** Pag.12) si ha:

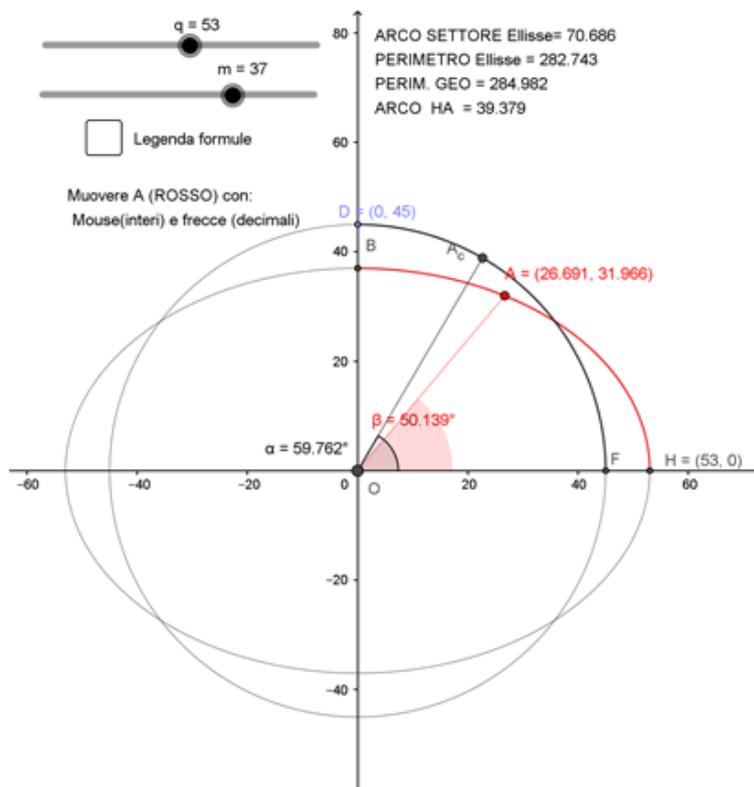
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{per } \alpha=0 \text{ sar\`a } \sqrt{(R-r)^2} = \sqrt{m^2} = m \\ \text{per } \alpha=\frac{\pi}{2} \text{ sar\`a } \sqrt{(R+r)^2} = \sqrt{q^2} = q \end{array} \right\} 2R=(q+m)$$

che stabilendo la corrispondenza tra ellisse e circonferenza danno uguali il perimetro dei rispettivi quadranti per:

$$R \frac{\pi}{2} = \frac{(q+m)}{2} \frac{\pi}{2}$$

Ma vediamo quali sono i valori degli archi corrispondenti dall’applet:

ARCO ELLISSE E CERCHIO



Nel quadrante, per l’esempio empirico mostrato, i vari archi determinati dal punto A dell’ellisse sono corrispondenti agli archi del punto Ac sulla circonferenza, ma diversi in valore ed uguali solo, come visto per  $\beta=0$  e  $\beta=90^\circ$ .

Il rapporto che lega l’angolo  $\beta$  dell’ellisse e l’angolo  $\alpha$  della circonferenza è dato sempre da  $\tan \beta = \frac{m}{q} \tan \alpha$ , mentre l’arco dell’ellisse corrispondente all’arco del cerchio, ma non eguale per valore è determinato da una relazione che (per una ellisse con asse-maggiore  $q$  posto sull’ascissa) è dato dalla formula di rettificazione dell’integrale ellittico:

$$HA = \left[ \frac{\text{Integrale ellittico}}{2} + \frac{X}{2} \right] \alpha^R$$

che possiamo indicare nelle sue varie forme:

$$HA = \left[ \frac{\sqrt{q^2 - c^2 \cos^2 \alpha}}{2} + \frac{\sqrt{m^2 \sin^2 \alpha}}{2} \right] \alpha^R \quad c^2 = q^2 - m^2$$

$$HA = \left[ \frac{\sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha}}{2} + \frac{\sqrt{m^2 \sin^2 \alpha}}{2} \right] \alpha^R$$

$$HA = \left[ \frac{\sqrt{(R+r)^2 \sin^2 \alpha + (R-r)^2 \cos^2 \alpha}}{2} + \frac{\sqrt{(R-r)^2 \sin^2 \alpha}}{2} \right] \alpha^R$$

$$HA = \left[ \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(2\alpha)}}{2} + \frac{\sqrt{(R-r)^2 \sin^2 \alpha}}{2} \right] \alpha^R$$

Riassumiamo!

a) l’area dell’ellisse e’ uguale all’area della corona circolare data dalle due circonferenze;

b) la relazione che lega l’angolo dell’ellissi e delle

circonferenze e’ data da  $\tan \beta = \frac{m}{q} \tan \alpha = \frac{R-r}{R+r} \tan \alpha$

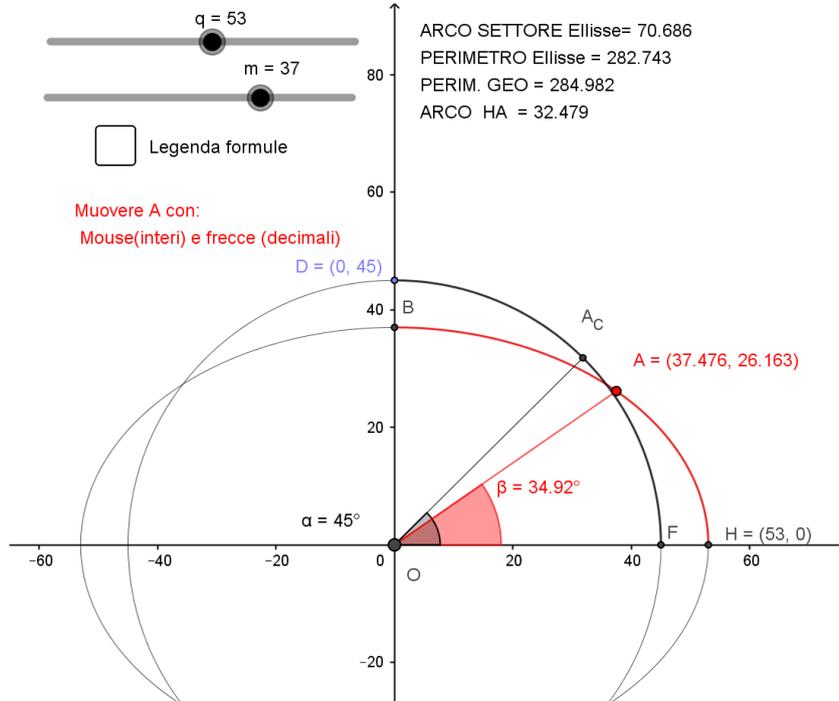
c) mediante l’angolo  $\alpha$  della circonferenza e’ possibile calcolare il perimetro dell’ellisse e il relativo angolo  $\beta$  (o viceversa), sapendo che il perimetro del quadrante dell’ellissi sono uguali a quello della circonferenza maggiore

$$\left( R \frac{\pi}{2} \right) = \left( \frac{q+m}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \left( \frac{(q+\mu)}{2} + \frac{(m+\mu)}{2} \right) \frac{\pi}{2}$$

d) gli archi dell’Ellisse e della Circonferenza sono uguali solo per  $\alpha=\pi/2$  (per settori), non per valori di archi intermedi.

ESEMPIO4: ARCO D'ELLISSE

Sia una Ellisse di assi ( $q = 53$ ;  $m = 37$ ) e la circonferenza



corrispondente di raggio  $R = \frac{(q+m)}{2} = 45$  e ricordando il loro

legame  $\tan \beta = \frac{m}{q} \tan \alpha$ , si voglia l'arco di ellisse di angolo:

$$\tan \beta = \frac{A_x}{A_y} = \frac{26,163}{37,476} = 0,698; \quad \beta = 34,92^\circ \quad \beta^R = 0,609^R \quad (\text{Angolo di HA}$$

della figura) che corrisponde ad  $\alpha$  dell'arco  $FA_C$  della circonferenza mediante:

$$\frac{53}{37} \tan \beta = \tan \alpha = 0,999837838 \quad \alpha = 44,998^\circ = 45^\circ \quad \alpha^R = 0,698^R$$

Allora l'Arco alla circonferenza vale  $FA_C = 47,426$  e l'arco corrispondente dell'ellisse è dato dalle formule viste:

$$HA = \left[ \frac{\sqrt{53^2 - c^2 \cos^2 45^\circ}}{2} + \frac{37}{2} \right] 0,698^R = 32,479$$

$$HA = \left[ \frac{\sqrt{(R+r)^2 0,5 + (R-r)^2 0,5}}{2} + \frac{(R-r)}{2} \right] 0,698^R = 32,479$$

con  $c^2 = 53^2 - 37^2$  e  $(R+r)=q$ ,  $(R-r)=m$

Qualora si volesse il valore dell'arco sotteso a:

$$\beta \in (34,92^\circ; 90^\circ) \quad \text{ed il corrispettivo } \alpha \in (45^\circ; 90^\circ)$$

basta sottrarre i valori degli archi trovati al proprio settore:

Per  $\beta=90^\circ$  e  $\alpha=90^\circ$  avremo per entrambi: **ARCO SETTORE=70,686.**

L'arco richiesto sarà:

Arco =  $70,686-32,479=38,207$  (Arco AB della figura) Ellisse;

Arco =  $70,686-47,426=23,260$  (Arco AcD della figura) Circonferenza.

Raccogliamo:

Angolo circonferenza $\alpha$	Angolo Ellisse $\beta$	Area Ell. e cor.Circolare	Arco Ellisse	Arco Circ. R= (q+m)/2
$0^\circ \text{ ----> } 45^\circ$	$0^\circ \text{ ---> } 34,92$	1540,166	32,479	35,343
$45^\circ \text{ ----> } 90^\circ$	$34,92 \text{ --> } 90^\circ$	1540,166	38,207	"
$0^\circ \text{ ----> } 90^\circ$	$0^\circ \text{ ----> } 90^\circ$	3080.332	70,686	70,686

E' possibile calcolare l'arco di ellisse utilizzando il programma da cui la figura:

[ARCO ELLISSE E CERCHIO](#)