

VII.BIS AREA E PERIMETRO IPERBOLE E PARABOLA

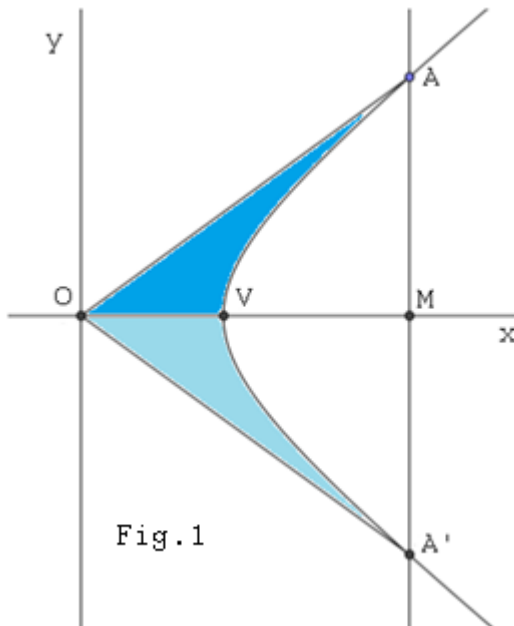
AREA DELL'IPERBOLE

Calcoliamo l'integrale delle uguaglianze Parametriche

dell'Iperbole $x = \frac{q}{\cos \alpha}$; $y = m \tan \alpha$ $y' = \frac{m}{\cos^2 \alpha}$, come abbiamo fatto per

l'Ellisse:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{\cos \alpha} \frac{m}{\cos^2 \alpha} d\alpha = qm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^3 \alpha} d\alpha = qm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha = \\
 &= qm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = qm \left[\sin \alpha \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \right] = \\
 &= qm \left[\frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} + \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \right) \right] = qm \left[\frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \right] = \\
 &= qm \left[\frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{2} \ln(\tan \alpha + \sec \alpha) \right] + C = \frac{qm}{2} \left[\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \ln \frac{(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} \right] + C = \text{AREA OVA}
 \end{aligned}$$



AREA IPERBOLE OAA'

$$= qm \left[\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \ln \frac{(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} \right] + C \quad (\text{doppia di OVA})$$

ESEMPIO: Sia l'Iperbole di semi-assi $q=4, m=3$ e il valore di $X=5 > q$. Applichiamo le formule delle funzioni parametriche (goniometriche) dell'Iperbole.

$$\cos \alpha = \frac{q}{x} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \alpha = 36,86989765 \quad \sin 36,86989765 = 0,6$$

applichiamo i dati alla formula per l'Area =OAA':

$$12 \left[\frac{0,6}{0,64} - \ln \frac{1,6}{0,8} \right] = 12 [0,9375 - \ln 2] = 2,932233833$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \ln \left[\frac{1}{\cos \alpha} + \tan \alpha \right] = \ln \left[\frac{1}{\cos \alpha} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} \right] = \ln [x + \sqrt{x^2 - 1}] + C \quad \text{per } x = 1/\cos \alpha$$

PERIMETRO DELL'IPERBOLE (RETTIFICAZIONE)

Siano le derivate delle uguaglianze Parametriche:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \left(\frac{q}{\cos \alpha} \right)' = \frac{q \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad dx = \frac{q \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = (m \tan \alpha)' = \frac{m}{\cos^2 \alpha} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{q \sin \alpha}$$

e la formula di rettificazione dell'arco s , rispetto ad α :

$$ds = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{m}{q \sin \alpha} \right)^2} \right] dx = \sqrt{1 + \left(\frac{m}{q \sin \alpha} \right)^2} \frac{q \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2}}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad [1]$$

Trattandosi di una curva aperta sar\`a sempre: $0 \leq \alpha < \pi/2$.

La risoluzione geometrica dell'integrale [1] \`e:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{q^2 \sin^2 \alpha + m^2}}{\cos^2 \alpha} + m \right] \alpha \frac{\pi}{180}$$

PERIMETRO DELLA PARABOLA (RETTIFICAZIONE)

Dal capitolo "TANGENTI DELLA PARABOLA" (Parametri Cap. V) abbiamo i valori delle derivate, riferite alle parabole del tipo $(p \pm x)$ e dove $p=2R$:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad dx = \frac{R \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}} \right] \quad \tan \rho = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

La rettificazione dell'arco s è:
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{y}\right)^2} \quad [1]$$

e la rettificazione dell'arco s , rispetto ad α :

$$ds = \left[\sqrt{1 + \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \frac{R \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right] d\alpha = \left[\frac{R}{\cos^2 \alpha} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}} \right] d\alpha = \left[\frac{R}{\cos^2 \alpha} \sqrt{1 + \cos \alpha} \right] d\alpha$$

$$s = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad [2]$$

Trattandosi di una curva aperta sar\`a sempre: $0 \leq \alpha < \pi/2$ mentre il valore del parametro della parabola \`e $p=2R$.

La rettificazione dell'arco s , rispetto a β , si ottiene derivando x rispetto a β :

$$x = \frac{p \cos \beta}{1 - \cos \beta} \quad \frac{dx}{d\beta} = \frac{p \sin \beta}{(1 - \cos \beta)^2}$$

e sostituendo dx con $d\beta$ nella formula [1]:

$$\frac{ds}{d\beta} = \sqrt{1 + \frac{(1 - \cos \beta)^2}{\sin^2 \beta}} \cdot \frac{p \sin \beta}{(1 - \cos \beta)^2} = p \frac{\sqrt{2(1 - \cos \beta)}}{(1 - \cos \beta)^2}$$

Tale formula \`e la stessa [3] che abbiamo visto nel Cap.IIIBis "PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELLA PARABOLA" quando consideravamo

$$\frac{ds}{d\beta} = \frac{\overline{SA}}{(1 - \cos \beta)} \quad \text{dove} \quad \overline{SA} = p \frac{\sqrt{2(1 - \cos \beta)}}{(1 - \cos \beta)}$$

e da "Parametri Cap.V -PARABOLA" si ha il legame tra α e β

$$\begin{cases} \cos \beta = (1 - 2 \cos \alpha) \\ \sin \beta = \pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} \end{cases} \quad \tan \beta = \frac{\pm 2 \sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}}{+ (1 - 2 \cos \alpha)}$$

La risoluzione geometrica dell'integrale di s \`e possibile solo nella [2] vista sopra, la cui formula sar\`a:

$$R \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha} + \sqrt{2} \right) \alpha \frac{\pi}{180} \quad (\text{verificare})$$