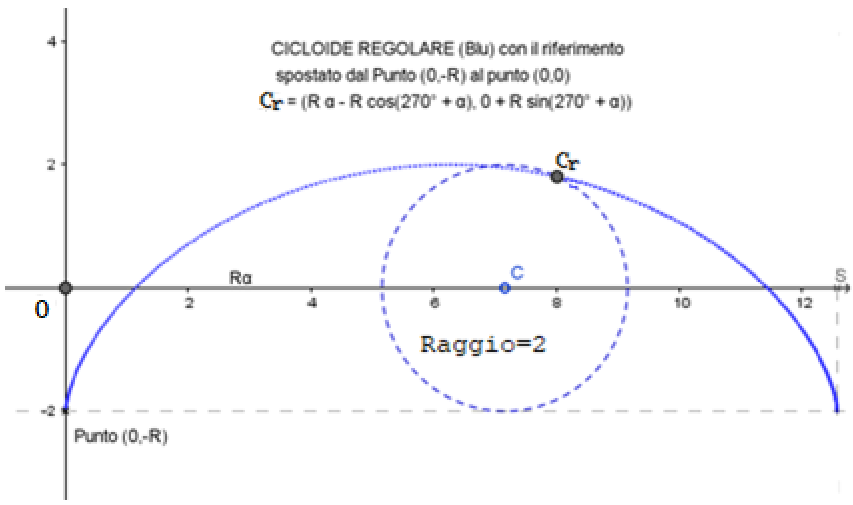
VIII BIS. CICLOIDI DI VAG

ELLISSE,PARABOLA,IPERBOLE

PREMESSA

Analizzando la figura qui sotto di una CICLOIDE REGOLARE (a=0) (vedi CAP. VIII.LE CICLOIDE) vediamo che il centro della circonferenza di raggio=R, si sposta su un segmento OS con lunghezza pari al perimetro Rα della circonferenza stessa.



Possiamo, allora, spostare il punto di riferimento della equazione come abbiamo visto nel precedente capitolo dal Punto(0,-R) al punto O(0,0) come si vede nella figura a lato e scrivere la nuova equazione Parametrica:

$$\begin{cases} \overline{OCr}\cos\rho = R\alpha - R\cos(270° + \alpha) \\ \overline{OCr}sen\rho = R\,\sin(270° + \alpha) \end{cases}$$

che descrive la stessa cicloide regolare classica nel nuovo riferimento.

Per $\alpha \in (0, 2\pi)$ della equazione il valore massimo di Rα è pari a (2Rπ) sull'asse delle ascisse, che possiamo parametrizzare in punti 2Rπsin(α) e sostituirlo a Rα ottenendo una nuova equazione parametrica, semplificata:

$$\begin{cases} \overline{\text{EllA}}\cos\rho = x = R(2\pi + 1)\sin\alpha \\ \overline{\text{EllA}}\sin\rho = y = R\cos\alpha \end{cases}$$

la quale fornisce una ellisse rappresentata nella Fig.1 assieme alla CICLOIDE REGOLARE vista sopra, da cui abbiamo ricavato l'equazione.

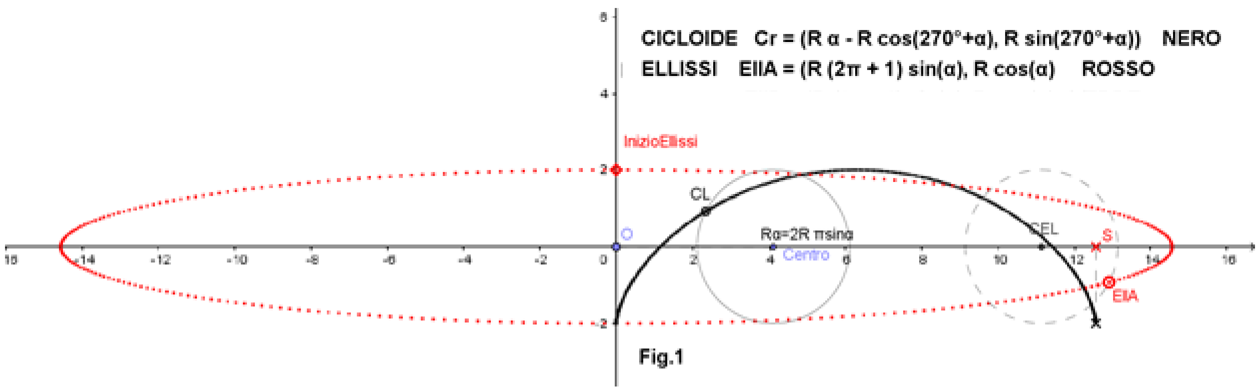
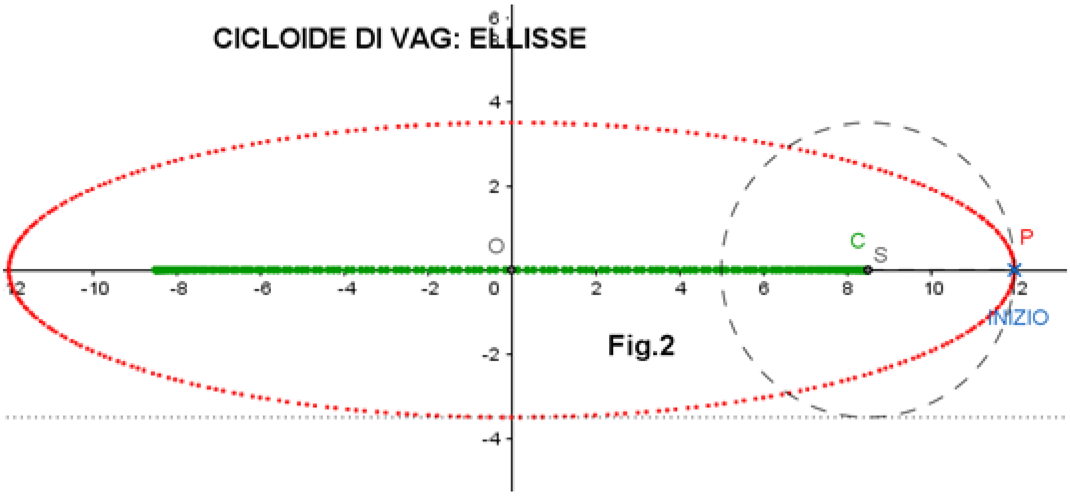


Fig.1

Applet GEOGEBRA Fig.1 (Clicca qui)

Tale Ellisse ha semiassi: $\begin{cases} x = a\sin\alpha \\ y = b\cos\alpha \end{cases}$ con $\begin{cases} a = R(2\pi + 1) \\ b = R \end{cases}$

CICLOIDE DI VAG: ELLISSE



E’ noto che una ellisse è data da due moti quello di una circonferenza e quello lungo un asse, proprio come una cicloide regolare.
Nel nostro caso, dati i semiassi a>b di una ellisse possiamo ipotizzare che se il valore (2Rπ=OS) visto sopra è sostituito da un valore (OS=a-R per R=b), e alla condizione che il centro della circonferenza cammini su OS, in verde nella Fig.2, avremo come risultato sempre una ellisse data appunto dal moto di un punto su una circonferenza il cui centro si sposta lungo l’asse dell’ascisse, per il valore OS.

Punto=P=(R (2π + 1) sin(α), R cos(α))
Applet GEOGEBRA Fig.2 (Clicca qui)

CICLOIDE DI VAG: PARABOLA

Analogamente a quanto fatto per l'ellisse anche la Parabola può essere ottenuta mediante due moti.

1. un moto circolare
2. un moto lungo il raggio della stessa

Utilizzeremo una parabola con il fuoco nell'origine, aperta a destra del tipo $y^2 = 2px + p^2$ utilizzando l'equazione parametrica di questa:

$$\begin{cases} \dfrac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = \dfrac{R}{\cos\alpha}(1 - 2\cos\alpha) \\ \dfrac{R}{\cos\alpha}\sin\beta = y = \dfrac{R}{\cos\alpha}\left(\pm 2\sqrt{\cos\alpha\,(1-\cos\alpha)}\right) \end{cases}$$

Se un punto ruota secondo una circonferenza mentre il raggio di questa aumenta la sua lunghezza si ottiene una PARABOLA di parametro p=2R e con il fuoco nell'origine.

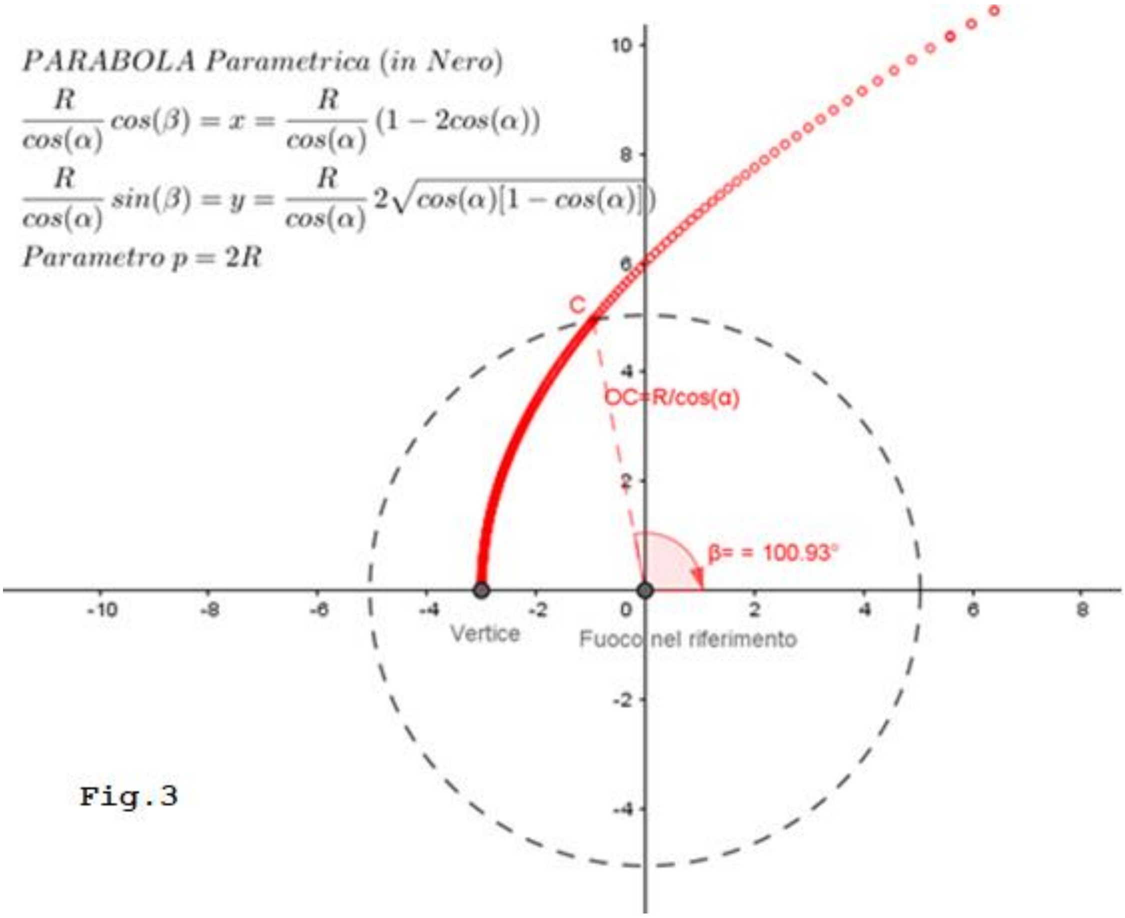


Fig.3

Applet GEOGEBRA Fig.3 [(Clicca qui)]

CICLOIDE DI VAG: IPERBOLE

Infine come per la parabola, alla stessa maniera possiamo ottenere l'Iperbole del tipo $x^2+y^2=q^2$.
Cioè l'estremo di un raggio di circonferenza che si allunga a mano a mano che ruota.

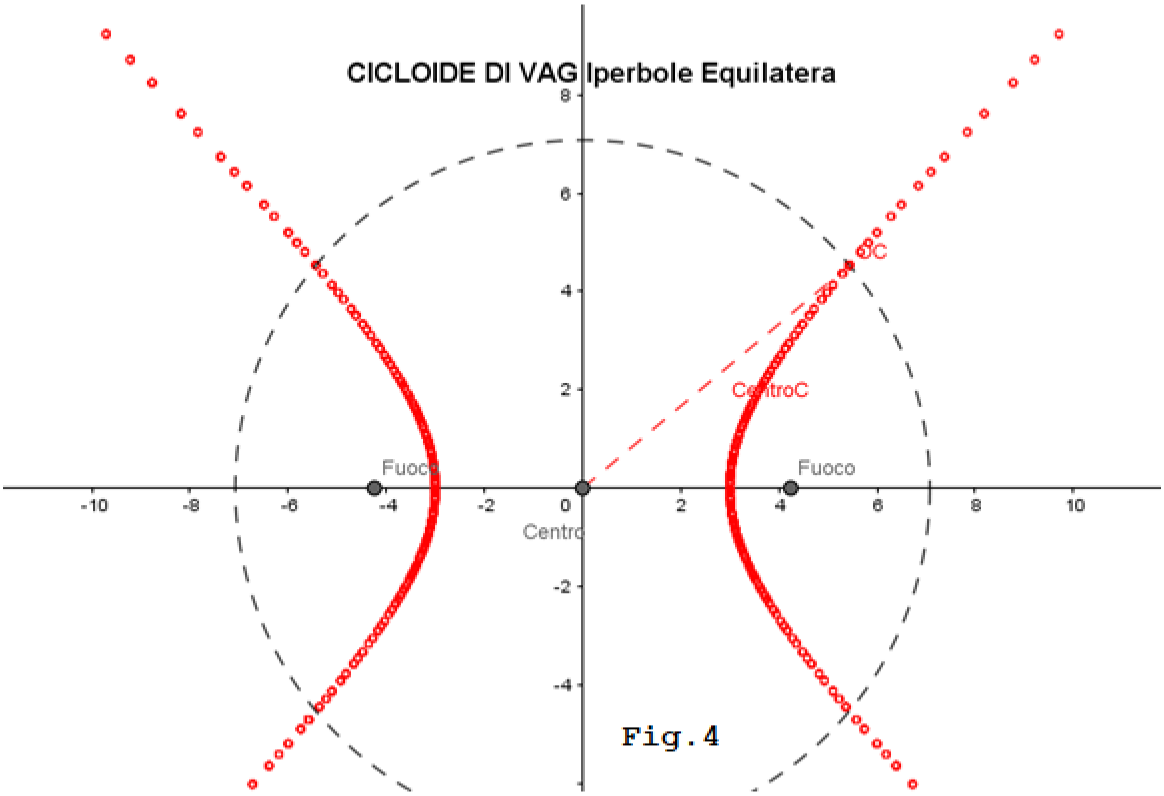


Fig.4

Applet GEOGEBRA Fig.4 [(Clicca qui)]