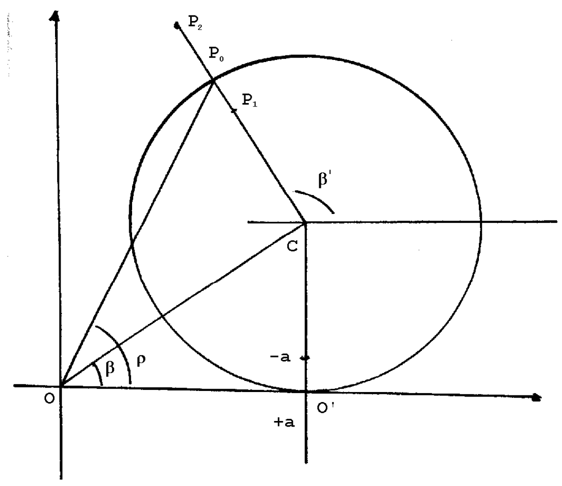
VIII. LE CICLOIDI

CICLOIDE



Si consideri un punto P_0 collegato ad un cerchio che rotola senza strisciare sopra una retta, per cui si abbia:

$$arc\overline{O'P_0} = \overline{OO'}$$
$$\overline{OP_0} = \overline{CP_0}\cos(\rho - \beta') + \overline{OC}\cos(\rho - \beta)$$

$$\begin{cases} \overline{OP_0}\cos\rho = \overline{CP_0}\cos\beta' + \overline{OC}\cos\beta \\ \overline{OP_0}\,\mathrm{sen}\,\rho = \overline{CP_0}\,\mathrm{sen}\,\beta' + \overline{OC}\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases}$$

Inoltre avendo posto R = raggio del cerchio e considerando: $\overline{OC} = \overline{OO'}\cos\beta + \overline{CO'}sen\beta$
nel caso si voglia il punto P_1 o P_2 avremo che CP_0 sarà
$\overline{CP_0} = (\overline{CO'} \pm a) = (R \pm a)$ $\quad \overline{OC} = \overline{OO'}\cos\beta + (R \pm a)sen\,\beta$

$$\begin{cases} \overline{OC}\cos\beta = \overline{OO'} = R\dfrac{\beta'\pi}{180} = Rt \\ \overline{OC}\,\mathrm{sen}\,\beta = (R \pm a) \end{cases}$$

Sostituendo si avrà:

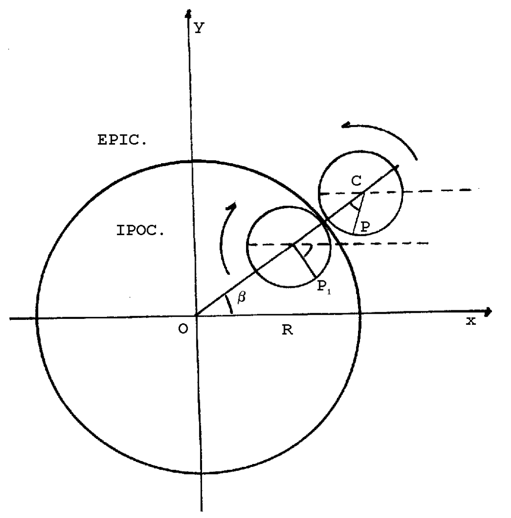
$$\begin{cases} \overline{OP_0}\cos\rho = (R \pm a)\cos\beta' + Rt = R(t + \cos\beta') \pm a\cos\beta' \\ \overline{OP_0}sen\rho = (R \pm a)sen\beta' + (R \pm a) = (R \pm a)(1 + sen\beta') \end{cases}$$ Cicloide rovesciata

per $\beta' = 90 - \beta'$

$$\begin{cases} \overline{OP_0}\cos\rho = R(t \mp sen\beta') \mp asen\beta' \\ \overline{OP_0}sen\rho = (R \pm a)(1 + \cos\beta') \end{cases}$$ Cicloide ritta

a	=	0	*cicloide ordinaria*	
a	>	0	"	*allungata*
a	<	0	"	*accorciata*

CICLOIDE CIRCOLARE INTERNA



Eq. di Vag di una curva data da una circonferenza di raggio r di angolo β_1 che rotola all'esterno (Epicicloide) e all'interno (Ipocicloide) di una circonf. di raggio R.
In entrambi i casi sarà $R\beta = r\beta_1$ cioè le circonferenze percorrono archi eguali.
Epicicloide: considerando che il raggio r gira in senso antiorario e che il punto P (vedi fig.) forma l'angolo $[180+(\beta_1+\beta)]$ $\quad (P\hat{O}x = \rho\ ;\ P_1\hat{O}x = \rho')$
avrò come somma di due segmenti orientati:

$$OP = (R+r)\cos(\rho-\beta) + r\cos[\rho-(180+\beta_1+\beta)]$$

e tenendo presente $R\beta = r\beta_1; R\beta + r\beta = r\beta_1 + r\beta; (R+r)\beta = r(\beta_1+\beta)$ avrò:

$$1]\quad \begin{cases} OP\cos\rho = (R+r)\cos\beta - r\cos(\beta_1+\beta) = (R+r)\cos\beta + r\cos\dfrac{R+r}{r}\beta = x_E \\ OPsen\rho = (R+r)sen\beta - rsen(\beta_1+\beta) = (R+r)sen\beta + rsen\dfrac{R+r}{r}\beta = y_E \end{cases}$$

(il + nel terzo membro della uguaglianza 1] ribalta soltanto la immagine)

* EPICICLOIDE $\quad OP = (R+r)\cos(\rho-\beta) - r\cos\left[\rho - \left(\dfrac{R+r}{r}\beta\right)\right]$

2)Ipocicloide: analogamente $R\beta = r\beta_1; R\beta - r\beta = r\beta_1 - r\beta; (R-r)\beta = r(\beta_1-\beta)$.
Poichè il raggio r gira in senso orario dovrò indicarlo come

$$[360-(\beta_1-\beta)] \text{ e quindi } \begin{cases} +\cos(\beta_1-\beta) \\ -\text{sen}(\beta_1-\beta) \end{cases} \quad \text{per cui}$$

$$\begin{cases} OP_1\cos\rho' = (R-r)\cos\beta + r\cos(\beta_1-\beta) = (R-r)\cos\beta + r\cos\dfrac{R-r}{r}\beta = x_I \\ OP_1sen\rho' = (R-r)sen\beta - rsen(\beta_1-\beta) = (R-r)sen\beta - rsen\dfrac{R-r}{r}\beta = y_I \end{cases}$$

* IPOCICLOIDE $\quad OP_1 = (R-r)\cos(\rho-\beta) + r\cos\left[\rho + \left(\dfrac{R-r}{r}\beta\right)\right]$

Si osservi che aver posto $R\beta = r\beta_1$ vuol dire che il rapporto β_1/β e' uguale ad una costante (= R/r)

CICLOIDE CIRCOLARE INTERNA (CONTINUA)

Dagli esempi visti possiamo dunque scrivere la formula generale delle cicloidi interne posto nr = R dove n $\in$ R° con la condizione $R\beta=r\beta_1$ cioè $n\beta=\beta_1$

$$\begin{cases} \text{Epicicl } OP=(n+1)\ r\ \cos(\rho-\beta)+r\cos[\rho-(n+1)\beta] \\ \text{Ipocicl } OP_1=(n-1)\ r\ \cos(\rho-\beta)+r\cos[\rho+(n-1)\beta] \end{cases}$$

Per r=1 avremo che R = n: in tal caso vuol dire che **n** governa sia il raggio di partenza (R) sia il numero delle "gobbe" sia dell'Epicicloide sia dell'Ipocicloide.

Per r<1 sarà r = 1/m quindi n/m = n' = R
Per R =n è (r=1) avremo che (R ± 1) = (n ± 1) comunque

$$\begin{cases} \text{Epicic } OP=(n+1)\cos(\rho-\beta)+\cos[\rho-(n+1)\beta] \\ \text{Ipocic } OP_1=(n-1)\cos(\rho-\beta)+\cos[\rho+(n-1)\beta] \end{cases}$$

Per R = r sarà n=1 e si avranno solo l’Epicicloidi poichè l'Ipocicloide sarà $OP_1=\cos\rho$
Avremo infine i valori delle coordinate:

$$\begin{cases} \text{Epicic} & \begin{cases} OP\cos\rho=(n+1)r\cos\beta+r\cos(n+1)\beta=x \\ OPsen\rho=(n+1)r\sin\beta+r\sin(n+1)\beta=y \end{cases} \\ \text{Ipocic} & \begin{cases} OP\cos\rho=(n-1)r\cos\beta+r\cos(n-1)\beta=x \\ OPsen\rho=(n-1)r\sin\beta-r\sin(n-1)\beta=y \end{cases} \end{cases}$$

CICLOIDE CIRCOLARE ESTERNA

Chiameremo Cicloidi Esterne le cicloidi date dal rotolamento di due circonferenze come visto per le Cicloidi Interne, ma il cui punto di partenza e' l'estremo opposto a quello di contatto.
In realtà le curve sia delle Cicloidi Interne che di quelle esterne sono identiche ma si presentano ruotate rispetto agli assi cartesiani:

$$\overline{OP} = R; \quad \overline{P_0C} = \overline{P_0'C_1} = r; \quad (R\beta = r\beta_1)$$

Epicicloide Est:

$$OP' = (R + r)\cos(\rho - \beta) + r\cos[\rho - (\beta_1 + \beta)]$$

$$\begin{cases} OP'\cos\rho = (R+r)\cos\beta + r\cos(\beta_1 + \beta) = x \\ OP'\operatorname{sen}\rho = (R+r)\operatorname{sen}\beta + r\operatorname{sen}(\beta_1 + \beta) = y \end{cases}$$

Ipocicloide Est:

$$OP_1' = (R - r)\cos(\rho' - \beta) + r\cos[\rho' - (180 + \beta - \beta_1)] =$$

$$= (R - r)\cos(\rho' - \beta) - r\cos[\rho' + (\beta_1 - \beta)]$$

$$\begin{cases} OP_1'\cos\rho' = (R-r)\cos\beta - r\cos(\beta_1 - \beta) = x \\ OP_1'\operatorname{sen}\rho' = (R-r)\operatorname{sen}\beta + r\operatorname{sen}(\beta_1 - \beta) = y \end{cases}$$

Fatte le dovute trasformazioni come per la cicloide interna (nr = R) avremo:

$$\text{Epicicloide est} \begin{cases} OP'\cos\rho = (n+1)r\cos\beta + r\cos(n+1)\beta = x \\ OP'\operatorname{sen}\rho = (n+1)r\operatorname{sen}\beta + r\operatorname{sen}(n+1)\beta = y \end{cases}$$

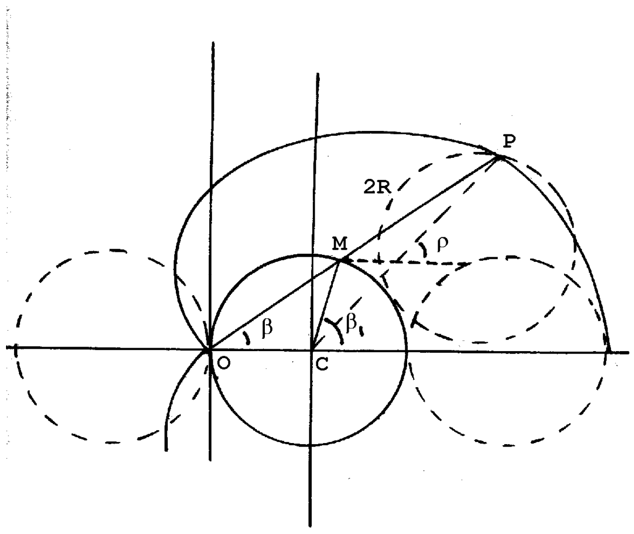
$$\text{Ipocicloide est} \begin{cases} OP_1'\cos\rho' = (n-1)r\cos\beta - r\cos(n-1)\beta = x \\ OP_1'\operatorname{sen}\rho' = (n-1)r\operatorname{sen}\beta + r\operatorname{sen}(n-1)\beta = y \end{cases}$$

Nelle epicicloidi per (n = 1) si ha la curva detta CARDIOIDE.

LA EPICICLOIDE DETTA CARDIOIDE

La Cardioide è rappresentata, per MP = 2R, dal segmento

1*) $\overline{OP} = 2R(1+\cos\beta)$



Vogliamo far vedere che la cardioide non è che il rotolamento di una circonferenza su un'altra di eguale raggio. Consideriamo C centro dell'origine, sarà:

2*) $\overline{CP} = \overline{CM}\cos(\rho-\beta_1) + \overline{MP}\cos(\rho-\beta) =$
$= 2R\cos(\rho-\beta) + R\cos(\rho-\beta_1)$

$$\begin{cases} CP\cos\rho = 2R\cos\beta + R\cos\beta_1 \\ CP\,\mathrm{sen}\,\rho = 2R\,\mathrm{sen}\,\beta + R\,\mathrm{sen}\,\beta_1 \end{cases}$$

Rispetto all'origine O avrò l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} OP\cos\beta = CP\cos\rho + R = 2R\cos\beta + R\cos\beta_1 + R \\ OP\,\mathrm{sen}\,\beta = CP\,\mathrm{sen}\,\rho = 2R\,\mathrm{sen}\,\beta + R\,\mathrm{sen}\,\beta_1 \end{cases}$$

che può anche essere scritta come $\begin{cases} (OP-2R)\cos\beta = R(1+\cos\beta_1) \\ (OP-2R)sen\beta = Rsen\beta_1 \end{cases}$

$\dfrac{sen\beta}{\cos\beta} = \dfrac{sen\beta_1}{1+\cos\beta_1}$; $\quad sen\beta + sen\beta\cos\beta_1 = sen\beta_1\cos\beta$

$sen\beta = sen\beta_1\cos\beta - \cos\beta_1 sen\beta = sen(\beta_1-\beta);$ risolubile per $2\beta = \beta_1$

$$\begin{cases} OP\cos\beta = 2R\cos\beta + R\cos 2\beta + R = 2R\cos\beta + 2R\cos^2\beta \\ OPsen\beta = 2Rsen\beta + Rsen2\beta = 2Rsen\beta + 2Rsen\beta\cos\beta \end{cases} \qquad OP = 2R(1+\cos\beta)$$

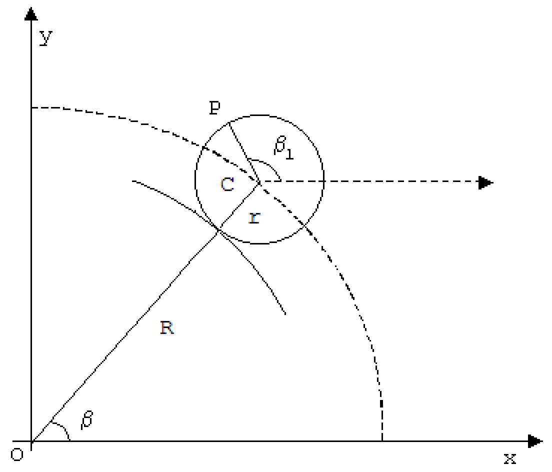
che e' l'espressione di partenza 1*).
Se anzichè OP consideriamo P dall'origine C e in 2*) facciamo $2\beta = \beta_1$ avremo:

3*) $\begin{cases} \mathrm{CP}\cos\rho = 2\mathrm{R}\cos\beta + \mathrm{R}\cos 2\beta \\ \mathrm{CPsen}\rho = 2\mathrm{Rsen}\beta + \mathrm{Rsen}2\beta \end{cases}$ la quale non e' che l'Epicicl. Est. della pagina precedente fatto n = 1.

Quadrando e sommando si avrà $CP = \left|R\sqrt{5+4\cos\beta}\right|$ e sviluppando la 3*), l'Equazione della Cardioide rispetto al sistema con centro in C, diventa:

$$\overline{CP} = R\sqrt{5+4\cos\frac{\beta_1}{2}} = 2R\cos\left(\rho-\frac{\beta_1}{2}\right) + R\cos(\rho-\beta_1)$$

CICLOIDE CIRCOLARE A CENTRO



Se prendiamo una Epicicloide Circolare Esterna facciamo $R + r = R_C$ essa sarà tracciata come in figura in quanto riferita alla circonferenza di raggio OC per cui prenderà il nome di Cicloide Circolare a Centro:

$$\begin{cases} \overline{OP}\cos\rho = R_c\cos\beta + r\cos(\beta_1 + \beta) \\ \overline{OP}sen\rho = R_c sen\beta + rsen(\beta_1 + \beta) \end{cases}$$

si osservi che β_1 è il valore dell'angolo quando sia:

$R\beta = r\beta_1$ (archi uguali)

$$(R + r)\beta = r(\beta_1 + \beta) \qquad R_c\beta = r(\beta_1 + \beta) \qquad \textbf{a]}$$

Poiché $\beta_1 = \dfrac{2\pi}{P_1}$ e $\beta = \dfrac{2\pi}{P}$ dove P_1 e P sono i rispettivi periodi di rivoluzione, dividendoli tra loro: $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{\beta_1}{\beta} = P_R \qquad \beta_1 = \beta P_R$

dove P_R =Periodo di Rivoluzione Relativo

*] $\begin{cases} \overline{OP}\cos\rho = R_c\cos\beta + r\cos\beta(P_R + 1) \\ \overline{OP}\,\text{sen}\,\rho = R_c\,\text{sen}\,\beta + r\,\text{sen}\,\beta(P_R + 1) \end{cases} \qquad \overline{OP} = R_c\cos(\rho - \beta) + r\cos(\rho - [\beta(P_R + 1)])$

Qualora si volesse il valore β_0 che assume β per $\beta_1 = 2\pi$ si avrà:

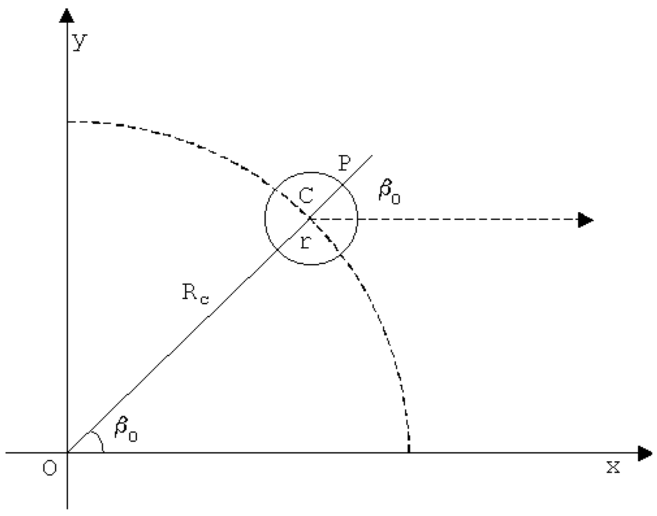
$$\beta_0 = \frac{2\pi}{P_R} \qquad \textbf{b]}$$

Il valore P_R rappresenta di quante volte dobbiamo moltiplicare β_0, moto medio angolare, per avere 2π, (nel caso delle Cicloidi non a centro il periodo vale $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2\pi}{\beta}$)

Nella formula *] per tutto il perimetro della circonferenza di raggio r si avrà l'intero arco $R_c\beta_0$; mentre se vogliamo $R_C 2\pi$ cioè i punti di tutto il suo perimetro e per r i punti di conseguenza dobbiamo considerare:

$$0 \le \beta P_R \le 2\pi$$

CICLOIDE CIRCOLARE A CENTRO (CONTINUA)



Se $R_c\beta_0$ e $r\beta_1$ sono archi proporzionali di due circonferenze non uguali, in una Cicloide Circolare a Centro avrò:

1] $R_c\beta_0 = r\beta_1 n_v$
dove n_v è il rapporto degli archi o della velocità media delle due circonferenze.
$(R_c - r)\beta_0 = r\beta_1 n_v - r\beta_0 = r(\beta_1 n_v - \beta_0)$
E per
$R\beta_0 = r(\beta_1 n_v - \beta_0)$

questa ultima espressione è ancora una Cicloide Circolare poiché $(\beta_1 n_v - \beta_0)$ rappresenta pur sempre un angolo; possiamo dunque fare
$\alpha = (\beta_1 n_v - \beta_0)$ $R\beta_0 = r\alpha$ dunque $R_c\beta_0 = r(\alpha + \beta_0)$
Posto il rapporto tra α e β_0: $\alpha = P_\alpha\beta_0$ dove P_α (come P_R già visto), rappresenta di quante volte dobbiamo moltiplicare β_0 per avere α, avremo $R_c\beta_0 = r\alpha + r\beta_0 = r\beta_0(P_\alpha + 1)$
Per $\alpha = 2\pi$ come in **b]** della pagina precedente: $2\pi = (\beta_1 n_v - \beta_0) = \beta_0 P_\alpha$; abbiamo $\beta_1 n_v = 2\pi + \beta_0$ (vedi figura) e anche $\beta_1 n_v = \beta_0(P_\alpha + 1)$
si avrà infine l'Eq.di Vag

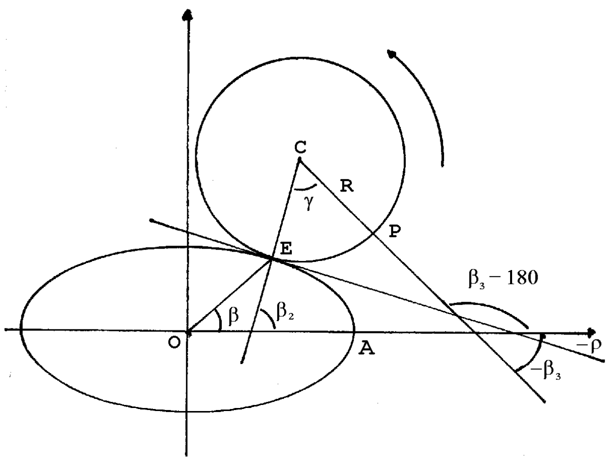
$$\begin{cases} \overline{OP}\cos\rho = R_c\cos\beta_0 + r\cos\beta_0(P_\alpha + 1) \\ \overline{OP}\mathrm{sen}\rho = R_c\mathrm{sen}\beta_0 + r\mathrm{sen}\beta_0(P_\alpha + 1) \end{cases} \qquad \overline{OP} = R_c\cos(\rho - \beta_0) + r\cos(\rho - \beta_0(P_\alpha + 1))$$

cioè ritroviamo la stessa eq. di vag con *] della pagina precedente, la differenza è che prima per archi uguali avevamo

$$\frac{R_c}{r} = \frac{\beta_1 + \beta_0}{\beta_0} = \frac{\beta_1}{\beta_0} + 1 = (P_R + 1)$$

ora invece per archi proporzionali è: $\frac{R_c}{r} = \frac{\beta_1}{\beta_0} n_v = (P_\alpha + 1)$.

CICLOIDE ELLITTICA - CIRCOLARE



Data una Ellisse (assi:q,m)e la circonferenza di raggio R che percorrano eguali archi si trovi la Cicloide.
La fig. accanto da' i termini del problema:
si cerchi la traiettoria del punto P estremo di OP, il quale ha angolo φ con l'asse x.

$$\overline{OP} = \overline{OE}\cos(\varphi-\beta) + R\cos(\varphi-\beta_2) + R\cos(\varphi-\beta_3)$$

che svolta in Eq. di Vag: $\begin{cases}\overline{OP}\cos\varphi = \overline{OE}\cos\beta + R\cos\beta_2 + R\cos\beta_3 \\ \overline{OP}sen\varphi = \overline{OE}sen\beta + Rsen\beta_2 + Rsen\beta_3\end{cases}$

e rappresentando OE una Ellisse e'

$$\begin{cases}\overline{OE}\cos\beta = q\cos\alpha \\ \overline{OE}sen\beta = msen\alpha\end{cases} \qquad \text{(q e m assi)}$$

$$\begin{cases}\overline{OP}\cos\varphi = q\cos\alpha + R(\cos\beta_2 + \cos\beta_3) = x_0 \\ \overline{OP}sen\varphi = msen\alpha + R(sen\beta_2 + sen\beta_3) = y_0\end{cases}$$

Da ciò si vede che il problema consiste nel cercare i valori degli angoli $\beta_2 e \beta_3$ fornendo il valore di α e quindi di β.
Consideriamo i valori di α da 0° a 90°.
Si osservi che la tangente in E all'Ellisse e' anche tangente alla circonferenza e quindi forma con il raggio un angolo retto.
La tang. in E all'Ellisse e' $\tan\rho = -\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha}; \rho = arc\tan\left(-\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha}\right)$

Avremo dunque che $\beta_2 = (90-\rho)$ essendo ora ρ noto.
Cerchiamo β_3: Conoscendo il valore geometrico dell'arco

$AE = \left[\frac{\sqrt{q^2\,\mathrm{sen}^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}}{2} + \frac{m}{2}\right]\frac{\alpha\pi}{180}$ sappiamo essere per definizione gli

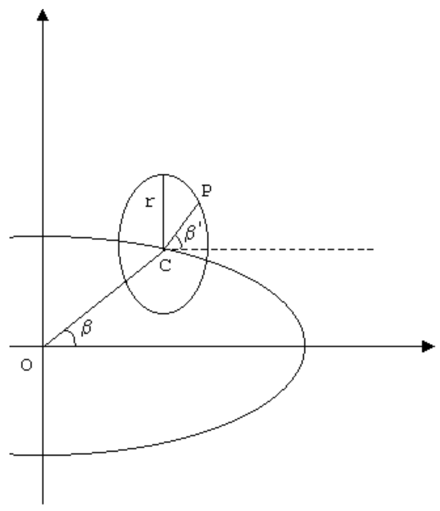
archi AE = EP quindi

$$AE = EP = R\frac{\gamma\pi}{180};\gamma = \frac{AE}{R}\frac{180}{\pi};\beta_3 = (180 + \gamma + \beta_2)$$

Con che sono definite le coordinate: $\begin{cases} OP\cos\varphi = x_0 \\ OP\operatorname{sen}\varphi = y_0 \end{cases}$

Per i valori di α da 91° a 180, 181° a 270, 271° a 360 il ragionamento e' lo stesso ma si deve tenere presente i relativi incrementi degli angoli e il valore dell'arco dell'Ellisse.

CICLOIDE ELLITTICA A CENTRO



Date due ellissi, una con centro nella origine e l’altra sul perimetro di questa, e il Periodo Relativo P_R è riferito agli angoli e non agli archi:

[1] se il Periodo è tra gli angoli delle Ellissi di semiassi q,m,β e q’,m’,β’ e il periodo $P_R\beta=\beta'$

$$\alpha' = arc\tan\frac{q'}{m'}\tan P_R\beta \qquad \alpha = arc\tan\frac{q}{m}\tan\beta$$

e $\begin{cases}\overline{OC}\cos\beta = q\cos\alpha \\ \overline{OC}sen\beta = msen\alpha\end{cases}$ $\begin{cases}\overline{CP}\cos P_R\beta = q'\cos\alpha' \\ \overline{CP}senP_r\beta = m'\,sen\alpha'\end{cases}$

e l’Eq. di Vag $\begin{cases}\overline{\mathrm{OP}}\cos\varphi = \mathrm{q}\cos\alpha + \mathrm{q'}\cos\alpha' \\ \overline{\mathrm{OP}}\,\mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{q}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{q'}\mathrm{sen}\alpha'\end{cases}$

[2] se il Periodo è tra gli angoli delle circonferenze relative alle Ellissi e il periodo $P_R\alpha=\alpha'$

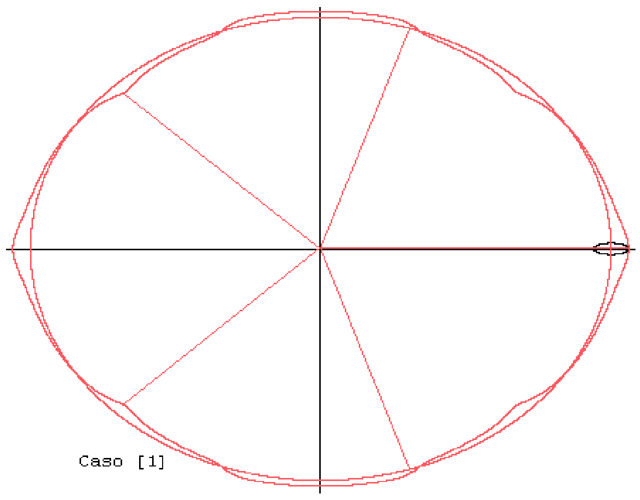
$\beta = arc\tan\frac{m}{q}\tan\alpha$ $\quad\beta' = arc\tan\frac{m'}{q'}\tan P_R\alpha$ $\quad\begin{cases}\overline{OC}\cos\beta = q\cos\alpha \\ \overline{OC}sen\beta = msen\alpha\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\overline{CP}\cos\beta' = q'\cos P_R\alpha \\ \overline{CP}sen\beta' = m'\,senP_R\alpha\end{cases}$

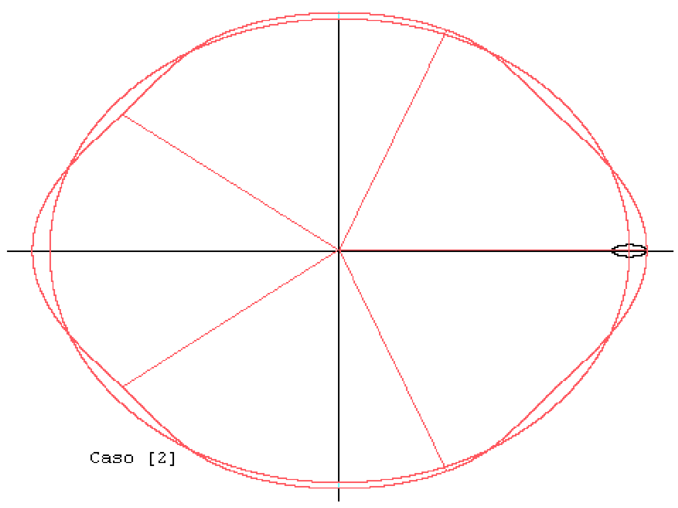
e l’Eq. di Vag $\begin{cases}\overline{\mathrm{OP}}\cos\varphi = \mathrm{q}\cos\alpha + \mathrm{q'}\cos(\mathrm{P_R}\alpha) \\ \overline{\mathrm{OP}}\,\mathrm{sen}\varphi = \mathrm{msen}\alpha + \mathrm{m'}\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{P_R}\alpha)\end{cases}$

Osservazione: nel caso **[1]** la curva risultante è irregolare perché ad angoli delle Ellissi proporzionali non corrispondono archi proporzionali; nel caso **[2]** la curva risultante è proporzionale perché ad angoli delle circonferenze proporzionali corrispondono archi di Ellissi proporzionali!
Per q=m o q’=m’ o per entrambi le Ellisse diventano circonferenze.

ESEMPIO DI CICLOIDE ELLITTICA A CENTRO

Applicando ciò che si è detto nel Capitolo precedente diamo un grafico di esempio per il Caso **[1]** e Caso **[2].**
I valori per gli Assi sono: Q1=50, M1=20 per l’ellisse al centro, Q2=3, M2=1 per l’ellisse che ruota. Il valore P_R=5 per cui nel Caso **[1]** $\frac{\beta'}{\beta}=5$ e nel Caso **[2]** $\frac{\alpha'}{\alpha}=5$. Nel primo caso la curva è irregolare nell’altro più omogenea e sinusoide.





Diamo anche il grafico di una applicazione importante: quello ottenuto dalla ellisse della Luna che ruota sul perimetro dell’ellisse della Terra.
I valori degli assi sono quelli noti mentre il valore di P_R è ottenuto dal rapporto dei rispettivi Periodi di Rivoluzione:

$$P_R = \frac{\text{P.Riv. Terra}}{\text{P.Riv. Luna (Draconitico)}} = \frac{365,24}{27.21222} = 13,421911$$