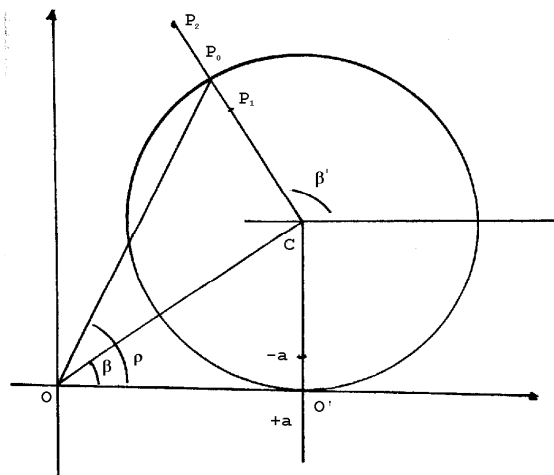


## VIII. LE CICLOIDI

CICLOIDE



Si consideri un punto  $P_0$  collegato ad un cerchio che rotola senza strisciare sopra una retta, per cui si abbia:

$$\overline{arcO'P_0} = \overline{OO'}$$

$$\overline{OP_0} = \overline{CP_0} \cos(\rho - \beta') + \overline{OC} \cos(\rho - \beta)$$

$$\begin{cases} \overline{OP_0} \cos \rho = \overline{CP_0} \cos \beta' + \overline{OC} \cos \beta \\ \overline{OP_0} \sin \rho = \overline{CP_0} \sin \beta' + \overline{OC} \sin \beta \end{cases}$$

Inoltre avendo posto  $R =$  raggio del cerchio e considerando:  $\overline{OC} = \overline{OO'} \cos \beta + \overline{CO'} \sin \beta$  nel caso si voglia il punto  $P_1$  o  $P_2$  avremo che  $\overline{CP_0}$  sarà

$$\overline{CP_0} = (\overline{CO'} \pm a) = (R \pm a) \quad \overline{OC} = \overline{OO'} \cos \beta + (R \pm a) \sin \beta$$

$$\begin{cases} \overline{OC} \cos \beta = \overline{OO'} = R \frac{\beta \pi}{180} = Rt \\ \overline{OC} \sin \beta = (R \pm a) \end{cases}$$

Sostituendo si avrà:

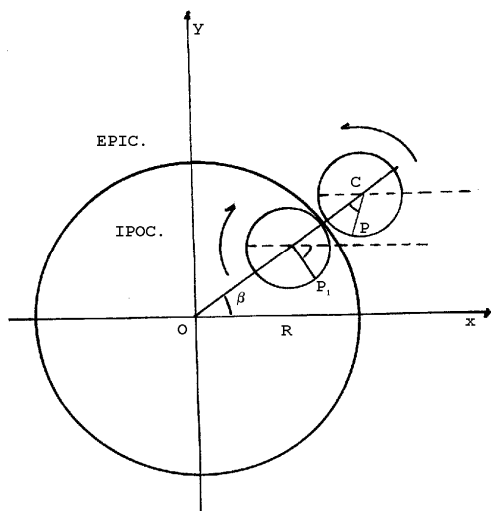
$$\begin{cases} \overline{OP_0} \cos \rho = (R \pm a) \cos \beta' + Rt = R(t + \cos \beta') \pm a \cos \beta' & \text{Cicloide rovesciata} \\ \overline{OP_0} \sin \rho = (R \pm a) \sin \beta' + (R \pm a) = (R \pm a)(1 + \sin \beta') \end{cases}$$

per  $\beta' = 90 - \beta$

$$\begin{cases} \overline{OP_0} \cos \rho = R(t \mp \sin \beta') \mp a \sin \beta' & \text{Cicloide ritta} \\ \overline{OP_0} \sin \rho = (R \pm a)(1 + \cos \beta') \end{cases}$$

- $a = 0$     *cicloide ordinaria*
- $a > 0$     "    *allungata*
- $a < 0$     "    *accorciata*

CICLOIDE CIRCOLARE INTERNA



Eq. di Vag di una curva data da una circonferenza di raggio r di angolo  $\beta_1$  che rotola all'esterno (Epicicloide) e all'interno (Ipicicloide) di una circonferenza di raggio R.

In entrambi i casi sarà  $R\beta = r\beta_1$  cioè le circonferenze percorrono archi eguali.

**Epicicloide:** considerando che il raggio r gira in senso antiorario e che il punto P (vedi fig.) forma l'angolo

$$[180 + (\beta_1 + \beta)] \quad (P\hat{O}x = \rho; P_1\hat{O}x = \rho')$$

avrò come somma di due segmenti orientati:

$$OP = (R+r)\cos(\rho - \beta) + r\cos[\rho - (180 + \beta_1 + \beta)]$$

e tenendo presente  $R\beta = r\beta_1; R\beta + r\beta = r\beta_1 + r\beta; (R+r)\beta = r(\beta_1 + \beta)$  avrò:

$$1] \begin{cases} OP \cos \rho = (R+r)\cos \beta - r\cos(\beta_1 + \beta) = (R+r)\cos \beta + r\cos \frac{R+r}{r} \beta = x_E \\ OP \sin \rho = (R+r)\sin \beta - r\sin(\beta_1 + \beta) = (R+r)\sin \beta + r\sin \frac{R+r}{r} \beta = y_E \end{cases}$$

( il + nel terzo membro della uguaglianza 1] ribalta soltanto la immagine)

\* EPICICLOIDE  $OP = (R+r)\cos(\rho - \beta) - r\cos\left[\rho - \left(\frac{R+r}{r}\beta\right)\right]$

**2) Ipicicloide:** analogamente  $R\beta = r\beta_1; R\beta - r\beta = r\beta_1 - r\beta; (R-r)\beta = r(\beta_1 - \beta)$ .

Poichè il raggio r gira in senso orario dovrò indicarlo come

$$[360 - (\beta_1 - \beta)] \text{ e quindi } \begin{cases} +\cos(\beta_1 - \beta) \\ -\sin(\beta_1 - \beta) \end{cases} \text{ per cui}$$

$$\begin{cases} OP_1 \cos \rho' = (R-r)\cos \beta + r\cos(\beta_1 - \beta) = (R-r)\cos \beta + r\cos \frac{R-r}{r} \beta = x_I \\ OP_1 \sin \rho' = (R-r)\sin \beta - r\sin(\beta_1 - \beta) = (R-r)\sin \beta - r\sin \frac{R-r}{r} \beta = y_I \end{cases}$$

\* IPOICICLOIDE  $OP_1 = (R-r)\cos(\rho - \beta) + r\cos\left[\rho + \left(\frac{R-r}{r}\beta\right)\right]$

Si osservi che aver posto  $R\beta = r\beta_1$  vuol dire che il rapporto  $\beta_1/\beta$  e' uguale ad una costante ( = R/r)

CICLOIDE CIRCOLARE INTERNA (CONTINUA)

Dagli esempi visti possiamo dunque scrivere la formula generale delle cicloidi interne posto  $nr = R$  dove  $n \in \mathbb{R}^{\circ}$  con la condizione  $R\beta = r\beta_1$  cioè  $n\beta = \beta_1$

$$\begin{cases} \text{Epicicl} & OP = (n+1)r \cos(\rho - \beta) + r \cos[\rho - (n+1)\beta] \\ \text{Ipocicl} & OP_1 = (n-1)r \cos(\rho - \beta) + r \cos[\rho + (n-1)\beta] \end{cases}$$

Per  $r=1$  avremo che  $R = n$ : in tal caso vuol dire che  $n$  governa sia il raggio di partenza ( $R$ ) sia il numero delle "gobbe" sia dell'Epicycloide sia dell'Ipocicloide.

Per  $r < 1$  sarà  $r = 1/m$  quindi  $n/m = n' = R$

Per  $R = n$  è ( $r=1$ ) avremo che  $(R \pm 1) = (n \pm 1)$  comunque

$$\begin{cases} \text{Epicic} & OP = (n+1)\cos(\rho - \beta) + \cos[\rho - (n+1)\beta] \\ \text{Ipocic} & OP_1 = (n-1)\cos(\rho - \beta) + \cos[\rho + (n-1)\beta] \end{cases}$$

Per  $R = r$  sarà  $n=1$  e si avranno solo l'Epicycloidi poichè l'Ipocicloide sarà  $OP_1 = \cos \rho$

Avremo infine i valori delle coordinate:

$$\begin{cases} \text{Epicic} & \begin{cases} OP \cos \rho = (n+1)r \cos \beta + r \cos(n+1)\beta = x \\ OP \sin \rho = (n+1)r \sin \beta + r \sin(n+1)\beta = y \end{cases} \\ \text{Ipocic} & \begin{cases} OP \cos \rho = (n-1)r \cos \beta + r \cos(n-1)\beta = x \\ OP \sin \rho = (n-1)r \sin \beta - r \sin(n-1)\beta = y \end{cases} \end{cases}$$

CICLOIDE CIRCOLARE ESTERNA

Chiameremo Cicloidi Esterne le cicloidi date dal rotolamento di due circonferenze come visto per le Cicloidi Interne, ma il cui punto di partenza e' l'estremo opposto a quello di contatto. In realtà le curve sia delle Cicloidi Interne che di quelle esterne sono identiche ma si presentano ruotate rispetto agli assi cartesiani:

$$\overline{OP} = R; \quad \overline{P_0C} = \overline{P_0'C_1} = r; \quad (R\beta = r\beta_1)$$

Epicycloide Est:

$$OP' = (R + r) \cos(\rho - \beta) + r \cos[\rho - (\beta_1 + \beta)]$$

$$\begin{cases} OP' \cos \rho = (R + r) \cos \beta + r \cos(\beta_1 + \beta) = x \\ OP' \sin \rho = (R + r) \sin \beta + r \sin(\beta_1 + \beta) = y \end{cases}$$

Ipocicloide Est:

$$OP_1' = (R - r) \cos(\rho' - \beta) + r \cos[\rho' - (180 + \beta - \beta_1)] =$$

$$= (R - r) \cos(\rho' - \beta) - r \cos[\rho' + (\beta_1 - \beta)]$$

$$\begin{cases} OP_1' \cos \rho' = (R - r) \cos \beta - r \cos(\beta_1 - \beta) = x \\ OP_1' \sin \rho' = (R - r) \sin \beta + r \sin(\beta_1 - \beta) = y \end{cases}$$

Fatte le dovute trasformazioni come per la cicloide interna ( $nr = R$ ) avremo:

$$\text{Epicycloide est} \begin{cases} OP' \cos \rho = (n+1)r \cos \beta + r \cos(n+1)\beta = x \\ OP' \sin \rho = (n+1)r \sin \beta + r \sin(n+1)\beta = y \end{cases}$$

$$\text{Ipocicloide est} \begin{cases} OP_1' \cos \rho' = (n-1)r \cos \beta - r \cos(n-1)\beta = x \\ OP_1' \sin \rho' = (n-1)r \sin \beta + r \sin(n-1)\beta = y \end{cases}$$

Nelle epicycloidi per ( $n = 1$ ) si ha la curva detta CARDIOIDE.

LA EPICICLOIDE DETTA CARDIOIDE

La Cardioide è rappresentata, per  $MP = 2R$ , dal segmento

$$1^*) \quad \overline{OP} = 2R(1 + \cos \beta)$$

Vogliamo far vedere che la cardioide non è che il rotolamento di una circonferenza su un'altra di eguale raggio. Consideriamo C centro dell'origine, sarà:

$$2^*) \quad \overline{CP} = \overline{CM} \cos(\rho - \beta_1) + \overline{MP} \cos(\rho - \beta) = \\ = 2R \cos(\rho - \beta) + R \cos(\rho - \beta_1)$$

$$\begin{cases} CP \cos \rho = 2R \cos \beta + R \cos \beta_1 \\ CP \sin \rho = 2R \sin \beta + R \sin \beta_1 \end{cases}$$

Rispetto all'origine O avrò l'Eq.

di Vag:

$$\begin{cases} OP \cos \beta = CP \cos \rho + R = 2R \cos \beta + R \cos \beta_1 + R \\ OP \sin \beta = CP \sin \rho = 2R \sin \beta + R \sin \beta_1 \end{cases}$$

che può anche essere scritta come  $\begin{cases} (OP - 2R) \cos \beta = R(1 + \cos \beta_1) \\ (OP - 2R) \sin \beta = R \sin \beta_1 \end{cases}$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta_1}{1 + \cos \beta_1}; \quad \sin \beta + \sin \beta \cos \beta_1 = \sin \beta_1 \cos \beta$$

$$\sin \beta = \sin \beta_1 \cos \beta - \cos \beta_1 \sin \beta = \sin(\beta_1 - \beta); \quad \text{risolubile per } 2\beta = \beta_1$$

$$\begin{cases} OP \cos \beta = 2R \cos \beta + R \cos 2\beta + R = 2R \cos \beta + 2R \cos^2 \beta & OP = 2R(1 + \cos \beta) \\ OP \sin \beta = 2R \sin \beta + R \sin 2\beta = 2R \sin \beta + 2R \sin \beta \cos \beta \end{cases}$$

che è l'espressione di partenza 1\*).

Se anziché OP consideriamo P dall'origine C e in 2\*) facciamo  $2\beta = \beta_1$  avremo:

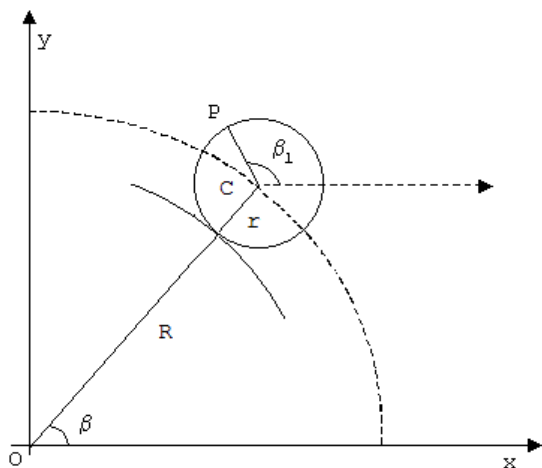
$$3^*) \quad \begin{cases} CP \cos \rho = 2R \cos \beta + R \cos 2\beta \\ CP \sin \rho = 2R \sin \beta + R \sin 2\beta \end{cases} \quad \text{la quale non è che l'Epicicl. Est. della}$$

pagina precedente fatto  $n = 1$ .

Quadrando e sommando si avrà  $CP = R\sqrt{5 + 4 \cos \beta}$  e sviluppando la 3\*), l'Equazione della Cardioide rispetto al sistema con centro in C, diventa:

$$\overline{CP} = R \sqrt{5 + 4 \cos \frac{\beta_1}{2}} = 2R \cos \left( \rho - \frac{\beta_1}{2} \right) + R \cos \left( \rho - \beta_1 \right)$$

CICLOIDE CIRCOLARE A CENTRO



Se prendiamo una Epicicloide Circolare Esterna facciamo  $R+r=R_c$  essa sarà tracciata come in figura in quanto riferita alla circonferenza di raggio  $OC$  per cui prenderà il nome di Cicloide Circolare a Centro:

$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \rho = R_c \cos \beta + r \cos(\beta_1 + \beta) \\ \overline{OP} \sin \rho = R_c \sin \beta + r \sin(\beta_1 + \beta) \end{cases}$$

si osservi che  $\beta_1$  è il valore dell'angolo quando sia:

$$R\beta = r\beta_1 \quad (\text{archi uguali})$$

$$(R+r)\beta = r(\beta_1 + \beta) \quad R_c\beta = r(\beta_1 + \beta) \quad \mathbf{a]}$$

Poiché  $\beta_1 = \frac{2\pi}{P_1}$  e  $\beta = \frac{2\pi}{P}$  dove  $P_1$  e  $P$  sono i rispettivi periodi di

rivoluzione, dividendoli tra loro:  $\frac{P}{P_1} = \frac{\beta_1}{\beta} = P_R \quad \beta_1 = \beta P_R$

dove  $P_R$  =Periodo di Rivoluzione Relativo

$$*] \begin{cases} \overline{OP} \cos \rho = R_c \cos \beta + r \cos \beta(P_R + 1) \\ \overline{OP} \sin \rho = R_c \sin \beta + r \sin \beta(P_R + 1) \end{cases} \quad \overline{OP} = R_c \cos(\rho - \beta) + r \cos(\rho - [\beta(P_R + 1)])$$

Qualora si volesse il valore  $\beta_0$  che assume  $\beta$  per  $\beta_1=2\pi$  si avrà:

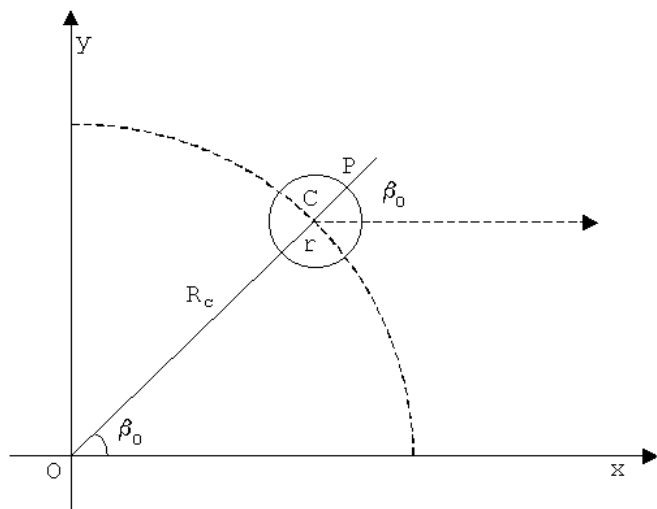
$$\beta_0 = \frac{2\pi}{P_R} \quad \mathbf{b]}$$

Il valore  $P_R$  rappresenta di quante volte dobbiamo moltiplicare  $\beta_0$ , moto medio angolare, per avere  $2\pi$ , (nel caso delle Cicloidi non a centro il periodo vale  $\frac{R}{r} = \frac{2\pi}{\beta}$ )

Nella formula \*] per tutto il perimetro della circonferenza di raggio  $r$  si avrà l'intero arco  $R_c\beta_0$ ; mentre se vogliamo  $R_c2\pi$  cioè i punti di tutto il suo perimetro e per  $r$  i punti di conseguenza dobbiamo considerare:

$$0 \leq \beta P_R \leq 2\pi$$

CICLOIDE CIRCOLARE A CENTRO (CONTINUA)



Se  $R_c\beta_0$  e  $r\beta_1$  sono archi proporzionali di due circonferenze non uguali, in una Cicloide Circolare a Centro avrò:

1]  $R_c\beta_0 = r\beta_1 n_v$   
 dove  $n_v$  è il rapporto degli archi o della velocità media delle due circonferenze.  
 $(R_c - r)\beta_0 = r\beta_1 n_v - r\beta_0 = r(\beta_1 n_v - \beta_0)$   
 E per  
 $R\beta_0 = r(\beta_1 n_v - \beta_0)$

questa ultima espressione è ancora una Cicloide Circolare poiché  $(\beta_1 n_v - \beta_0)$  rappresenta pur sempre un angolo; possiamo dunque fare

$$\alpha = (\beta_1 n_v - \beta_0) \quad R\beta_0 = r\alpha \quad \text{dunque} \quad R_c\beta_0 = r(\alpha + \beta_0)$$

Posto il rapporto tra  $\alpha$  e  $\beta_0$ :  $\alpha = P_\alpha \beta_0$  dove  $P_\alpha$  (come  $P_R$  già visto), rappresenta di quante volte dobbiamo moltiplicare  $\beta_0$  per avere  $\alpha$ , avremo

$$R_c\beta_0 = r\alpha + r\beta_0 = r\beta_0(P_\alpha + 1)$$

Per  $\alpha = 2\pi$  come in **b]** della pagina precedente:  $2\pi = (\beta_1 n_v - \beta_0) = \beta_0 P_\alpha$ ; abbiamo  $\beta_1 n_v = 2\pi + \beta_0$  (vedi figura) e anche  $\beta_1 n_v = \beta_0(P_\alpha + 1)$  si avrà infine l'Eq.di Vag

$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \rho = R_c \cos \beta_0 + r \cos \beta_0 (P_\alpha + 1) \\ \overline{OP} \sin \rho = R_c \sin \beta_0 + r \sin \beta_0 (P_\alpha + 1) \end{cases} \quad \overline{OP} = R_c \cos(\rho - \beta_0) + r \cos(\rho - \beta_0 (P_\alpha + 1))$$

cioè ritroviamo la stessa eq. di vag con \*] della pagina precedente, la differenza è che prima per archi uguali avevamo

$$\frac{R_c}{r} = \frac{\beta_1 + \beta_0}{\beta_0} = \frac{\beta_1}{\beta_0} + 1 = (P_R + 1)$$

ora invece per archi proporzionali è:  $\frac{R_c}{r} = \frac{\beta_1}{\beta_0} n_v = (P_\alpha + 1)$ .



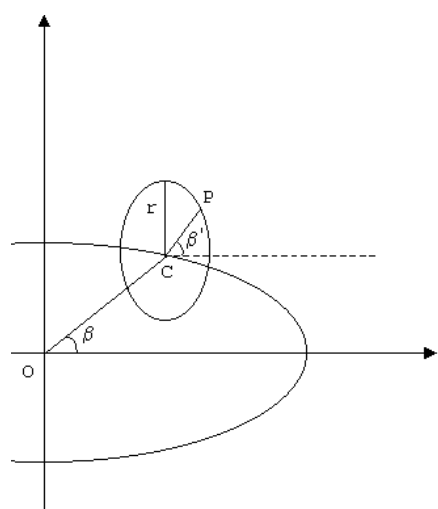


$$AE = EP = R \frac{\gamma\pi}{180}; \gamma = \frac{AE}{R} \frac{180}{\pi}; \beta_3 = (180 + \gamma + \beta_2)$$

Con che sono definite le coordinate: 
$$\begin{cases} OP \cos \varphi = x_0 \\ OP \sin \varphi = y_0 \end{cases}$$

Per i valori di  $\alpha$  da  $91^\circ$  a  $180$ ,  $181^\circ$  a  $270$ ,  $271^\circ$  a  $360$  il ragionamento e' lo stesso ma si deve tenere presente i relativi incrementi degli angoli e il valore dell'arco dell'Ellisse.

CICLOIDE ELLITTICA A CENTRO



Date due ellissi, una con centro nella origine e l'altra sul perimetro di questa, e il Periodo Relativo  $P_R$  è riferito agli angoli e non agli archi:

[1] se il Periodo è tra gli angoli delle Ellissi di semiassi  $q, m, \beta$  e  $q', m', \beta'$  e il periodo  $P_R \beta = \beta'$

$$\alpha' = \text{arc tan } \frac{q'}{m'} \tan P_R \beta \qquad \alpha = \text{arc tan } \frac{q}{m} \tan \beta$$

$$\text{e } \begin{cases} \overline{OC} \cos \beta = q \cos \alpha \\ \overline{OC} \text{sen} \beta = m \text{sen} \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{CP} \cos P_R \beta = q' \cos \alpha' \\ \overline{CP} \text{sen} P_R \beta = m' \text{sen} \alpha' \end{cases}$$

$$\text{e l'Eq. di Vag } \begin{cases} \overline{OP} \cos \varphi = q \cos \alpha + q' \cos \alpha' \\ \overline{OP} \text{sen} \varphi = q \text{sen} \alpha + q' \text{sen} \alpha' \end{cases}$$

[2] se il Periodo è tra gli angoli delle circonferenze relative alle Ellissi e il periodo  $P_R \alpha = \alpha'$

$$\beta = \text{arc tan } \frac{m}{q} \tan \alpha \qquad \beta' = \text{arc tan } \frac{m'}{q'} \tan P_R \alpha \quad \begin{cases} \overline{OC} \cos \beta = q \cos \alpha \\ \overline{OC} \text{sen} \beta = m \text{sen} \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{CP} \cos \beta' = q' \cos P_R \alpha \\ \overline{CP} \text{sen} \beta' = m' \text{sen} P_R \alpha \end{cases}$$

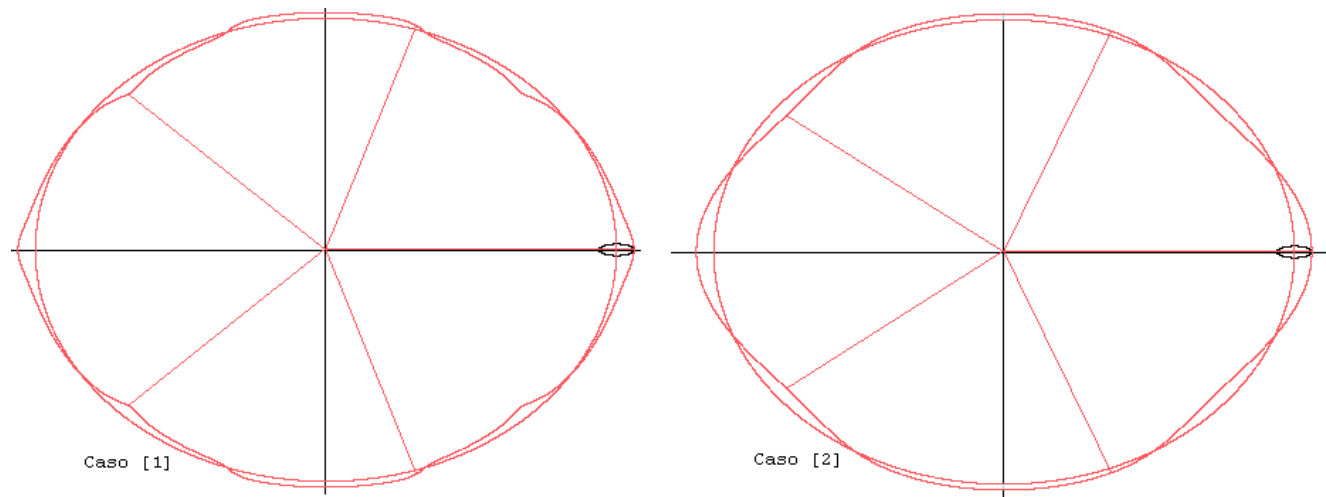
$$\text{e l'Eq. di Vag } \begin{cases} \overline{OP} \cos \varphi = q \cos \alpha + q' \cos(P_R \alpha) \\ \overline{OP} \text{sen} \varphi = m \text{sen} \alpha + m' \text{sen}(P_R \alpha) \end{cases}$$

Osservazione: nel caso [1] la curva risultante è irregolare perché ad angoli delle Ellissi proporzionali non corrispondono archi proporzionali; nel caso [2] la curva risultante è proporzionale perché ad angoli delle circonferenze proporzionali corrispondono archi di Ellissi proporzionali!

Per  $q=m$  o  $q'=m'$  o per entrambi le Ellisse diventano circonferenze.

ESEMPIO DI CICLOIDE ELLITTICA A CENTRO

Applicando ciò che si è detto nel Capitolo precedente diamo un grafico di esempio per il Caso [1] e Caso [2].  
 I valori per gli Assi sono: Q1=50, M1=20 per l'ellisse al centro, Q2=3, M2=1 per l'ellisse che ruota. Il valore P<sub>R</sub>=5 per cui nel Caso [1]  $\frac{\beta'}{\beta}=5$  e nel Caso [2]  $\frac{\alpha'}{\alpha}=5$ . Nel primo caso la curva è irregolare nell'altro più omogenea e sinusoidale.



Diamo anche il grafico di una applicazione importante: quello ottenuto dalla ellisse della Luna che ruota sul perimetro dell'ellisse della Terra.  
 I valori degli assi sono quelli noti mentre il valore di P<sub>R</sub> è ottenuto dal rapporto dei rispettivi Periodi di Rivoluzione:

$$P_R = \frac{P.Riv. Terra}{P.Riv. Luna (Draconitico)} = \frac{365,24}{27.21222} = 13,421911$$

