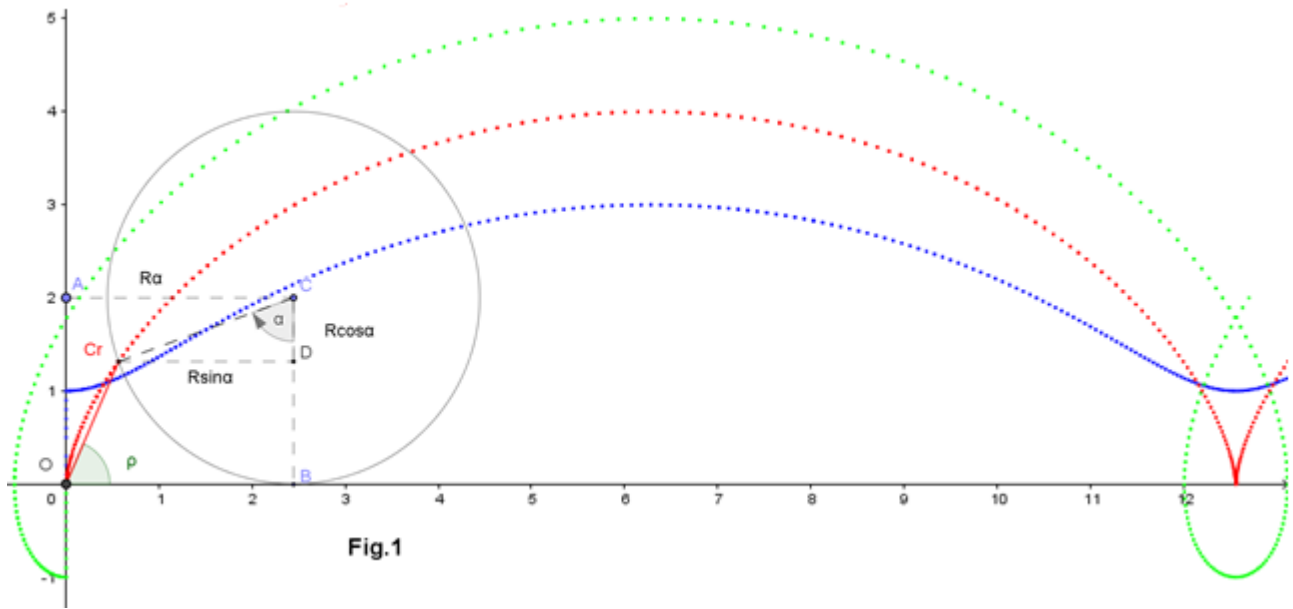


VIII. LE CICLOIDI

CICLOIDE



Si consideri un punto Cr collegato ad un cerchio che rotola senza strisciare sopra una retta, con raggio R , con la condizione:
 $\overline{arcBCr} = \overline{OB} = \overline{AC} = R\alpha$

$$\begin{cases} \overline{OCr} \cos \rho = R\alpha - \overline{CrC} \sin \alpha = R(\alpha - \sin \alpha) \\ \overline{OCr} \sin \rho = R - \overline{CrC} \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

nel caso si voglia un incremento o decremento di Cr di un valore $a \in (+a, -a)$:

avremo:

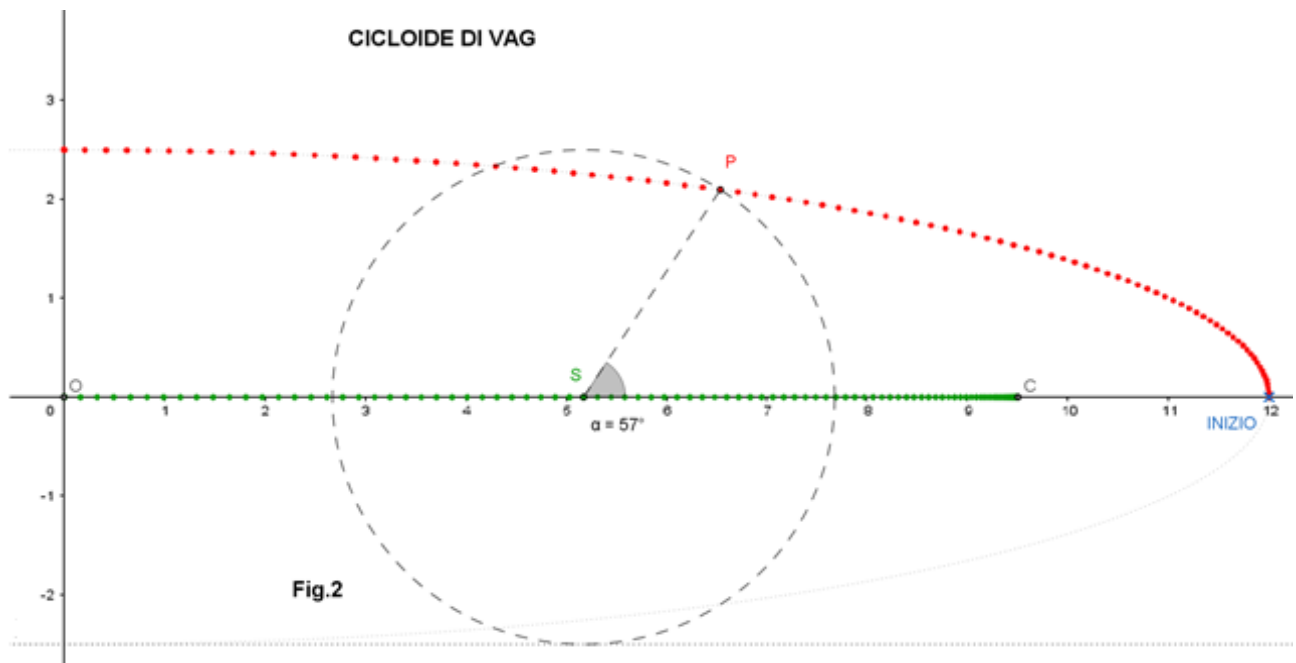
$$\begin{cases} \overline{OCr} \cos \rho = R\alpha - (R+a) \sin \alpha \\ \overline{OCr} \sin \rho = R - (R+a) \cos \alpha \end{cases}$$

- $a = 0$ *cicloide ordinaria*
- $a > 0$ " *allungata*
- $a < 0$ " *accorciata*

CICLOIDE DI VAG

Possiamo considerare come Cicloide la Circonferenza che è fatta rotolare su una retta, allorquando il suo Centro si sposta per un determinato valore: se poi questo spostamento avviene secondo una retta allora la cicloide è una ellisse.

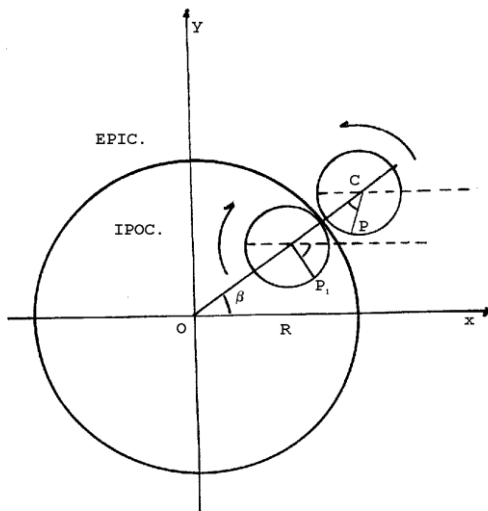
Ecco l'applet:



L'ascissa in Verde è lo spostamento del centro della Circonferenza; in Rosso è la traiettoria del punto P che ruota secondo la circonferenza.

Nell'esempio i valori parametrici degli assi della Ellisse sono $a=12$ e $b=2,5$.

CICLOIDE CIRCOLARE INTERNA



Eq. di Vag di una curva data da una circonferenza di raggio r di angolo β_1 che rotola all'esterno (Epicycloide) e all'interno (Ipcicloide) di una circonferenza di raggio R.

In entrambi i casi sarà $R\beta = r\beta_1$ cioè le circonferenze percorrono archi uguali.

Epicycloide: considerando che il raggio r gira in senso antiorario e che il punto P (vedi fig.) forma l'angolo

$$[180 + (\beta_1 + \beta)] \quad (P\hat{O}x = \rho ; P_1\hat{O}x = \rho')$$

avrò come somma di due segmenti orientati:

$$OP = (R+r)\cos(\rho - \beta) + r\cos[\rho - (180 + \beta_1 + \beta)]$$

e tenendo presente $R\beta = r\beta_1; R\beta + r\beta = r\beta_1 + r\beta; (R+r)\beta = r(\beta_1 + \beta)$ avrò:

$$1] \begin{cases} OP \cos \rho = (R+r)\cos \beta - r\cos(\beta_1 + \beta) = (R+r)\cos \beta + r\cos \frac{R+r}{r} \beta = x_E \\ OP \sin \rho = (R+r)\sin \beta - r\sin(\beta_1 + \beta) = (R+r)\sin \beta + r\sin \frac{R+r}{r} \beta = y_E \end{cases}$$

(il + nel terzo membro della uguaglianza 1] ribalta soltanto la immagine)

* EPICICLOIDE $OP = (R+r)\cos(\rho - \beta) - r\cos\left[\rho - \left(\frac{R+r}{r}\beta\right)\right]$

2) Ipcicloide: analogamente $R\beta = r\beta_1; R\beta - r\beta = r\beta_1 - r\beta; (R-r)\beta = r(\beta_1 - \beta)$.

Poichè il raggio r gira in senso orario dovrò indicarlo come

$$[360 - (\beta_1 - \beta)] \text{ e quindi } \begin{cases} +\cos(\beta_1 - \beta) \\ -\sin(\beta_1 - \beta) \end{cases} \text{ per cui}$$

$$\begin{cases} OP_1 \cos \rho' = (R-r)\cos \beta + r\cos(\beta_1 - \beta) = (R-r)\cos \beta + r\cos \frac{R-r}{r} \beta = x_I \\ OP_1 \sin \rho' = (R-r)\sin \beta - r\sin(\beta_1 - \beta) = (R-r)\sin \beta - r\sin \frac{R-r}{r} \beta = y_I \end{cases}$$

* IPOCICLOIDE $OP_1 = (R-r)\cos(\rho - \beta) + r\cos\left[\rho + \left(\frac{R-r}{r}\beta\right)\right]$

Si osservi che aver posto $R\beta = r\beta_1$ vuol dire che il rapporto β_1/β è uguale ad una costante (= R/r)

CICLOIDE CIRCOLARE INTERNA (CONTINUA)

Dagli esempi visti possiamo dunque scrivere la formula generale delle cicloidi interne posto $nR = R$ dove $n \in \mathbb{R}^{\circ}$ con la condizione $R\beta = r\beta_1$ cioè $n\beta = \beta_1$

$$\begin{cases} \text{Epicicl } OP = (n+1)r \cos(\rho - \beta) + r \cos[\rho - (n+1)\beta] \\ \text{Ipocicl } OP_1 = (n-1)r \cos(\rho - \beta) + r \cos[\rho + (n-1)\beta] \end{cases}$$

Per $r=1$ avremo che $R = n$: in tal caso vuol dire che n governa sia il raggio di partenza (R) sia il numero delle "gobbe" sia dell'Epicycloide sia dell'Ipocicloide.

Per $r < 1$ sarà $r = 1/m$ quindi $n/m = n' = R$

Per $R = n$ è ($r=1$) avremo che $(R \pm 1) = (n \pm 1)$ comunque

$$\begin{cases} \text{Epicic } OP = (n+1)\cos(\rho - \beta) + \cos[\rho - (n+1)\beta] \\ \text{Ipocic } OP_1 = (n-1)\cos(\rho - \beta) + \cos[\rho + (n-1)\beta] \end{cases}$$

Per $R = r$ sarà $n=1$ e si avranno solo l'Epicycloidi poichè l'Ipocicloide sarà $OP_1 = \cos \rho$
Avremo infine i valori delle coordinate:

$$\begin{cases} \text{Epicic} & \begin{cases} OP \cos \rho = (n+1)r \cos \beta + r \cos(n+1)\beta = x \\ OP \sin \rho = (n+1)r \sin \beta + r \sin(n+1)\beta = y \end{cases} \\ \text{Ipocic} & \begin{cases} OP \cos \rho = (n-1)r \cos \beta + r \cos(n-1)\beta = x \\ OP \sin \rho = (n-1)r \sin \beta - r \sin(n-1)\beta = y \end{cases} \end{cases}$$

CICLOIDE CIRCOLARE ESTERNA

Chiameremo Cicloidi Esterne le cicloidi date dal rotolamento di due circonferenze come visto per le Cicloidi Interne, ma il cui punto di partenza e' l'estremo opposto a quello di contatto. In realtà le curve sia delle Cicloidi Interne che di quelle esterne sono identiche ma si presentano ruotate rispetto agli assi cartesiani:

$$\overline{OP} = R; \quad \overline{P_0C} = \overline{P_0'C_1} = r; \quad (R\beta = r\beta_1)$$

Epicicloide Est:

$$\begin{aligned} OP' &= (R + r) \cos(\rho - \beta) + r \cos \rho - (\beta_1 + \beta) \\ \begin{cases} OP' \cos \rho = (R + r) \cos \beta + r \cos(\beta_1 + \beta) = x \\ OP' \sin \rho = (R + r) \sin \beta + r \sin(\beta_1 + \beta) = y \end{cases} \end{aligned}$$

Ipicicloide Est:

$$\begin{aligned} OP_1' &= (R - r) \cos(\rho' - \beta) + r \cos \rho' - (180 + \beta - \beta_1) = \\ &= (R - r) \cos(\rho' - \beta) - r \cos \rho' + (\beta_1 - \beta) \\ \begin{cases} OP_1' \cos \rho' = (R - r) \cos \beta - r \cos(\beta_1 - \beta) = x \\ OP_1' \sin \rho' = (R - r) \sin \beta + r \sin(\beta_1 - \beta) = y \end{cases} \end{aligned}$$

Fatte le dovute trasformazioni come per la cicloide interna ($nr = R$) avremo:

$$\begin{aligned} \text{Epicicloide est} &\begin{cases} OP' \cos \rho = (n+1)r \cos \beta + r \cos(n+1)\beta = x \\ OP' \sin \rho = (n+1)r \sin \beta + r \sin(n+1)\beta = y \end{cases} \\ \text{Ipicicloide est} &\begin{cases} OP_1' \cos \rho' = (n-1)r \cos \beta - r \cos(n-1)\beta = x \\ OP_1' \sin \rho' = (n-1)r \sin \beta + r \sin(n-1)\beta = y \end{cases} \end{aligned}$$

Nelle epicicloidi per ($n = 1$) si ha la curva detta CARDIOIDE.

LA EPICICLOIDE DETTA CARDIOIDE

La Cardioide è rappresentata, per $MP = 2R$, dal segmento

$$1^*) \quad \overline{OP} = 2R(1 + \cos \beta)$$

Vogliamo far vedere che la cardioide non è che il rotolamento di una circonferenza su un'altra di eguale raggio. Consideriamo C centro dell'origine, sarà:

$$2^*) \quad \overline{CP} = \overline{CM} \cos(\rho - \beta_1) + \overline{MP} \cos(\rho - \beta) = \\ = 2R \cos(\rho - \beta) + R \cos(\rho - \beta_1)$$

$$\begin{cases} CP \cos \rho = 2R \cos \beta + R \cos \beta_1 \\ CP \sin \rho = 2R \sin \beta + R \sin \beta_1 \end{cases}$$

Rispetto all'origine O avrò l'Eq.

di Vag:

$$\begin{cases} OP \cos \beta = CP \cos \rho + R = 2R \cos \beta + R \cos \beta_1 + R \\ OP \sin \beta = CP \sin \rho = 2R \sin \beta + R \sin \beta_1 \end{cases}$$

che può anche essere scritta come $\begin{cases} (OP - 2R) \cos \beta = R(1 + \cos \beta_1) \\ (OP - 2R) \sin \beta = R \sin \beta_1 \end{cases}$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta_1}{1 + \cos \beta_1}; \quad \sin \beta + \sin \beta \cos \beta_1 = \sin \beta_1 \cos \beta$$

$$\sin \beta = \sin \beta_1 \cos \beta - \cos \beta_1 \sin \beta = \sin(\beta_1 - \beta); \quad \text{risolubile per } 2\beta = \beta_1$$

$$\begin{cases} OP \cos \beta = 2R \cos \beta + R \cos 2\beta + R = 2R \cos \beta + 2R \cos^2 \beta \\ OP \sin \beta = 2R \sin \beta + R \sin 2\beta = 2R \sin \beta + 2R \sin \beta \cos \beta \end{cases} \quad OP = 2R(1 + \cos \beta)$$

che è l'espressione di partenza 1*).

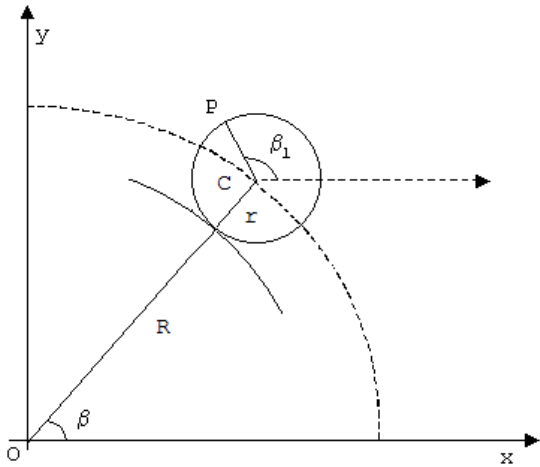
Se anziché OP consideriamo P dall'origine C e in 2*) facciamo $2\beta = \beta_1$ avremo:

3*) $\begin{cases} CP \cos \rho = 2R \cos \beta + R \cos 2\beta \\ CP \sin \rho = 2R \sin \beta + R \sin 2\beta \end{cases}$ la quale non è che l'Epicycl. Est. della pagina precedente fatto $n = 1$.

Quadrando e sommando si avrà $CP = \left| R\sqrt{5 + 4 \cos \beta} \right|$ e sviluppando la 3*), l'Equazione della Cardioide rispetto al sistema con centro in C, diventa:

$$\overline{CP} = R \sqrt{5 + 4 \cos \frac{\beta_1}{2}} = 2R \cos\left(\rho - \frac{\beta_1}{2}\right) + R \cos(\rho - \beta_1)$$

CICLOIDE CIRCOLARE A CENTRO



Se prendiamo una Epicicloide Circolare Esterna facciamo $R+r=R_c$ essa sarà tracciata come in figura in quanto riferita alla circonferenza di raggio OC per cui prenderà il nome di Cicloide Circolare a Centro:

$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \rho = R_c \cos \beta + r \cos(\beta_1 + \beta) \\ \overline{OP} \sin \rho = R_c \sin \beta + r \sin(\beta_1 + \beta) \end{cases}$$

si osservi che β_1 è il valore dell'angolo quando sia:

$$R\beta = r\beta_1 \quad (\text{archi uguali})$$

$$(R+r)\beta = r(\beta_1 + \beta) \quad R_c\beta = r(\beta_1 + \beta) \quad \mathbf{a]}$$

Poiché $\beta_1 = \frac{2\pi}{P_1}$ e $\beta = \frac{2\pi}{P}$ dove P_1 e P sono i rispettivi periodi di

rivoluzione, dividendoli tra loro: $\frac{P}{P_1} = \frac{\beta_1}{\beta} = P_R \quad \beta_1 = \beta P_R$

dove P_R =Periodo di Rivoluzione Relativo

$$\mathbf{*] \begin{cases} \overline{OP} \cos \rho = R_c \cos \beta + r \cos \beta(P_R + 1) \\ \overline{OP} \sin \rho = R_c \sin \beta + r \sin \beta(P_R + 1) \end{cases} \quad \overline{OP} = R_c \cos(\rho - \beta) + r \cos(\rho - [\beta(P_R + 1)])$$

Qualora si volesse il valore β_0 che assume β per $\beta_1=2\pi$ si avrà:

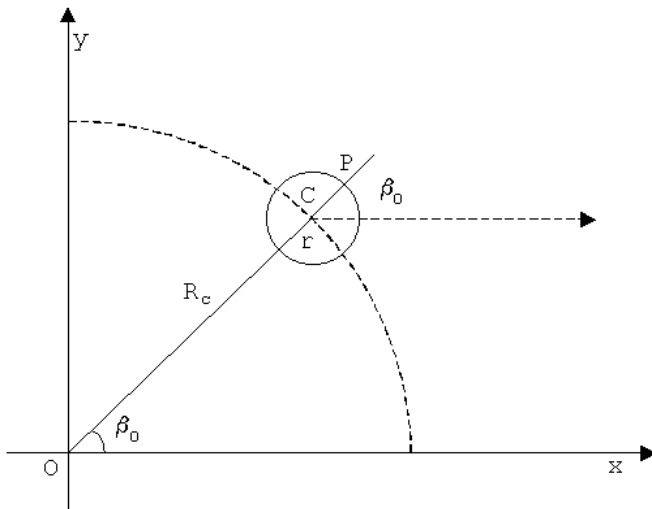
$$\beta_0 = \frac{2\pi}{P_R} \quad \mathbf{b]}$$

Il valore P_R rappresenta di quante volte dobbiamo moltiplicare β_0 , moto medio angolare, per avere 2π , (nel caso delle Cicloidi non a centro il periodo vale $\frac{R}{r} = \frac{2\pi}{\beta}$)

Nella formula $*]$ per tutto il perimetro della circonferenza di raggio r si avrà l'intero arco $R_c\beta_0$; mentre se vogliamo $R_c2\pi$ cioè i punti di tutto il suo perimetro e per r i punti di conseguenza dobbiamo considerare:

$$0 \leq \beta P_R \leq 2\pi$$

CICLOIDE CIRCOLARE A CENTRO (CONTINUA)



Se $R_c\beta_0$ e $r\beta_1$ sono archi proporzionali di due circonferenze non uguali, in una Cicloide Circolare a Centro avrò:

1] $R_c\beta_0 = r\beta_1 n_v$

dove n_v è il rapporto degli archi o della velocità media delle due circonferenze.

$$(R_c - r)\beta_0 = r\beta_1 n_v - r\beta_0 = r(\beta_1 n_v - \beta_0)$$

E per

$$R\beta_0 = r(\beta_1 n_v - \beta_0)$$

questa ultima espressione è ancora una Cicloide Circolare poiché $(\beta_1 n_v - \beta_0)$ rappresenta pur sempre un angolo; possiamo dunque fare

$$\alpha = (\beta_1 n_v - \beta_0) \quad R\beta_0 = r\alpha \quad \text{dunque} \quad R_c\beta_0 = r(\alpha + \beta_0)$$

Posto il rapporto tra α e β_0 : $\alpha = P_\alpha \beta_0$ dove P_α (come P_R già visto), rappresenta di quante volte dobbiamo moltiplicare β_0 per avere α , avremo

$$R_c\beta_0 = r\alpha + r\beta_0 = r\beta_0(P_\alpha + 1)$$

Per $\alpha = 2\pi$ come in **b]** della pagina precedente: $2\pi = (\beta_1 n_v - \beta_0) = \beta_0 P_\alpha$; abbiamo $\beta_1 n_v = 2\pi + \beta_0$ (vedi figura) e anche $\beta_1 n_v = \beta_0(P_\alpha + 1)$ si avrà infine l'Eq.di Vag

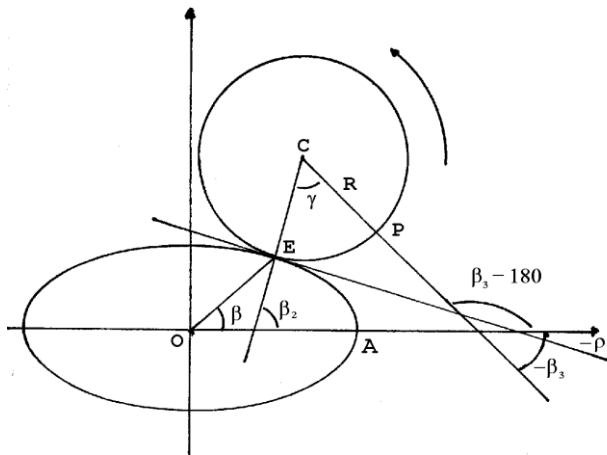
$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \rho = R_c \cos \beta_0 + r \cos \beta_0 (P_\alpha + 1) & \overline{OP} = R_c \cos(\rho - \beta_0) + r \cos(\rho - \beta_0 (P_\alpha + 1)) \\ \overline{OP} \sin \rho = R_c \sin \beta_0 + r \sin \beta_0 (P_\alpha + 1) \end{cases}$$

cioè ritroviamo la stessa eq. di vag con *] della pagina precedente, la differenza è che prima per archi uguali avevamo

$$\frac{R_c}{r} = \frac{\beta_1 + \beta_0}{\beta_0} = \frac{\beta_1}{\beta_0} + 1 = (P_R + 1)$$

ora invece per archi proporzionali è: $\frac{R_c}{r} = \frac{\beta_1}{\beta_0} n_v = (P_\alpha + 1).$

CICLOIDE ELLITTICA - CIRCOLARE



Data una Ellisse
(assi:q,m) e la circonferenza di

raggio R che percorrano eguali archi si trovi la Cicloide.

La fig. accanto da' i termini del problema:
 si cerchi la traiettoria del punto P estremo di OP, il quale ha angolo φ con l'asse x.

$$\overline{OP} = \overline{OE} \cos(\varphi - \beta) + R \cos(\varphi - \beta_2) + R \cos(\varphi - \beta_3)$$

che svolta in Eq. di Vag:
$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \varphi = \overline{OE} \cos \beta + R \cos \beta_2 + R \cos \beta_3 \\ \overline{OP} \operatorname{sen} \varphi = \overline{OE} \operatorname{sen} \beta + R \operatorname{sen} \beta_2 + R \operatorname{sen} \beta_3 \end{cases}$$

e rappresentando OE una Ellisse e'

$$\begin{cases} \overline{OE} \cos \beta = q \cos \alpha \\ \overline{OE} \operatorname{sen} \beta = m \operatorname{sen} \alpha \end{cases} \quad (q \text{ e } m \text{ assi})$$

$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \varphi = q \cos \alpha + R(\cos \beta_2 + \cos \beta_3) = x_0 \\ \overline{OP} \operatorname{sen} \varphi = m \operatorname{sen} \alpha + R(\operatorname{sen} \beta_2 + \operatorname{sen} \beta_3) = y_0 \end{cases}$$

Da ciò si vede che il problema consiste nel cercare i valori degli angoli β_2 e β_3 fornendo il valore di α e quindi di β .

Consideriamo i valori di α da 0° a 90° .

Si osservi che la tangente in E all'Ellisse e' anche tangente alla circonferenza e quindi forma con il raggio un angolo retto.

La tang. in E all'Ellisse e' $\tan \rho = -\frac{m}{q} \frac{1}{\tan \alpha}; \rho = \operatorname{arc} \tan \left(-\frac{m}{q} \frac{1}{\tan \alpha} \right)$

Avremo dunque che $\beta_2 = (90 - \rho)$ essendo ora ρ noto.

Cerchiamo β_3 : Conoscendo il valore geometrico dell'arco

$$AE = \left[\frac{\sqrt{q^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha}}{2} + \frac{m}{2} \right] \frac{\alpha \pi}{180} \quad \text{sappiamo essere per definizione gli}$$

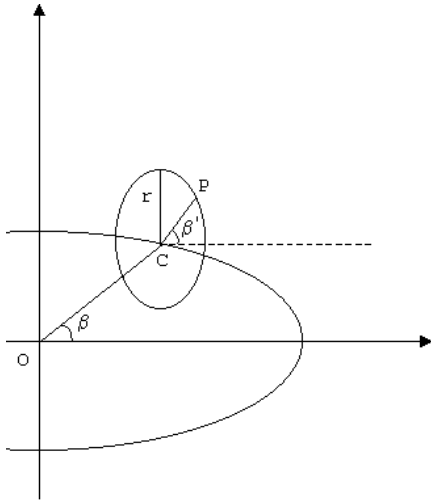
archi $AE = EP$ quindi

$$AE = EP = R \frac{\gamma \pi}{180}; \gamma = \frac{AE}{R} \frac{180}{\pi}; \beta_3 = (180 + \gamma + \beta_2)$$

Con che sono definite le coordinate:
$$\begin{cases} OP \cos \varphi = x_0 \\ OP \operatorname{sen} \varphi = y_0 \end{cases}$$

Per i valori di α da 91° a 180 , 181° a 270 , 271° a 360 il ragionamento e' lo stesso ma si deve tenere presente i relativi incrementi degli angoli e il valore dell'arco dell'Ellisse.

CICLOIDE ELLITTICA A CENTRO



Date due ellissi, una con centro nella origine e l'altra, e il Periodo Relativo P_R è riferito agli angoli e non agli archi:

[1] se il Periodo è tra gli angoli delle Ellissi di semiassi q, m, β e q', m', β' e il periodo $P_R \beta = \beta'$

$$\alpha' = \arctan \frac{q'}{m'} \tan P_R \beta \qquad \alpha = \arctan \frac{q}{m} \tan \beta$$

$$\text{e } \begin{cases} \overline{OC} \cos \beta = q \cos \alpha \\ \overline{OC} \sin \beta = m \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{CP} \cos P_R \beta = q' \cos \alpha' \\ \overline{CP} \sin P_R \beta = m' \sin \alpha' \end{cases}$$

$$\text{e l'Eq. di Vag } \begin{cases} \overline{OP} \cos \varphi = q \cos \alpha + q' \cos \alpha' \\ \overline{OP} \sin \varphi = q \sin \alpha + q' \sin \alpha' \end{cases}$$

[2] se il Periodo è tra gli angoli delle circonferenze relative alle Ellissi e il periodo $P_R \alpha = \alpha'$

$$\beta = \arctan \frac{m}{q} \tan \alpha \quad \beta' = \arctan \frac{m'}{q'} \tan P_R \alpha \quad \begin{cases} \overline{OC} \cos \beta = q \cos \alpha \\ \overline{OC} \sin \beta = m \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{CP} \cos \beta' = q' \cos P_R \alpha \\ \overline{CP} \sin \beta' = m' \sin P_R \alpha \end{cases}$$

$$\text{e l'Eq. di Vag } \begin{cases} \overline{OP} \cos \varphi = q \cos \alpha + q' \cos(P_R \alpha) \\ \overline{OP} \sin \varphi = m \sin \alpha + m' \sin(P_R \alpha) \end{cases}$$

Osservazione: nel caso **[1]** la curva risultante è irregolare perché ad angoli delle Ellissi proporzionali non corrispondono archi proporzionali; nel caso **[2]** la curva risultante è proporzionale perché ad angoli delle circonferenze proporzionali corrispondono archi di Ellissi proporzionali!
Per $q=m$ o $q'=m'$ o per entrambi le Ellisse diventano circonferenze.

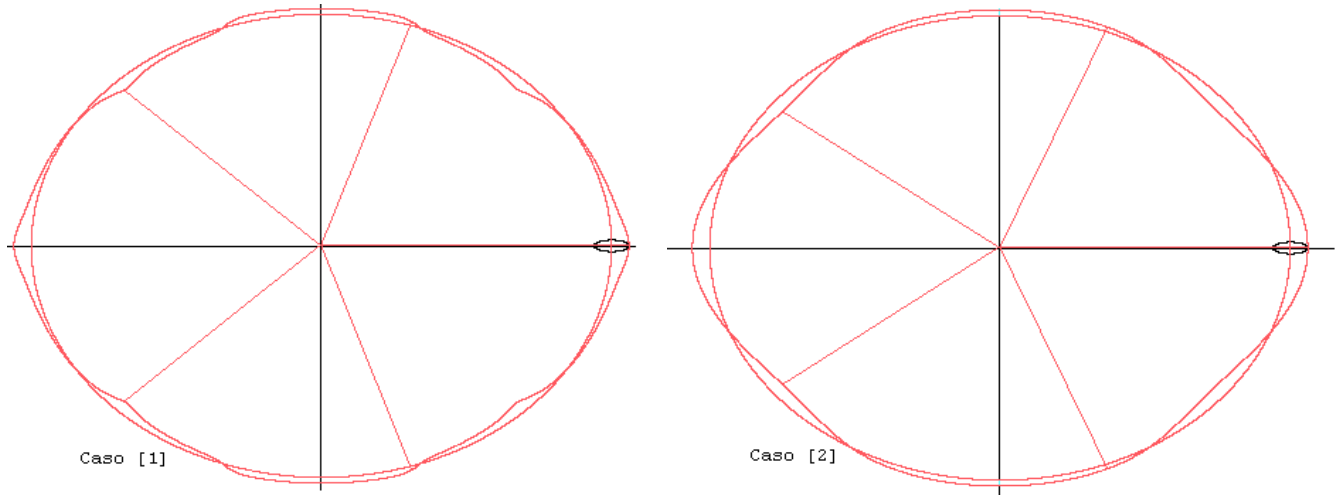
ESEMPIO DI CICLOIDE ELLITTICA A CENTRO

Applicando ciò che si è detto nel Capitolo precedente diamo un grafico di esempio per il Caso [1] e Caso [2].

I valori per gli Assi sono: Q1=50, M1=20 per l'ellisse al centro, Q2=3, M2=1 per l'ellisse che ruota. Il valore P_R=5 per cui nel Caso

[1] $\frac{\beta'}{\beta}=5$ e nel Caso [2] $\frac{\alpha'}{\alpha}=5$. Nel primo caso la curva è irregolare

nell'altro più omogenea e sinusoidale.



Diamo anche il grafico di una applicazione importante: quello ottenuto dalla ellisse della Luna che ruota sul perimetro dell'ellisse della Terra.

I valori degli assi sono quelli noti mentre il valore di P_R è ottenuto dal rapporto dei rispettivi Periodi di Rivoluzione:

$$P_R = \frac{P.Riv.Terra}{P.Riv.Luna (Draconitic o)} = \frac{365,24}{27.21222} = 13,421911$$

