X. EVOLUTA, EVOLVENTE, CERCHIO OSC.

LA DERIVATA SECONDA DELL'EQ. PARAMETRICA

Anche se ciò che segue è materia strettamente dell' Analisi, diamo di seguito le formule per il calcolo della derivata seconda.
Abbiamo visto che nella Eq. parametrica le coordinate sono funzioni di un parametro (indicato in genere con t) che nel nostro caso è dato dal valore in gradi di un angolo.

$\begin{cases} x = \varphi(\alpha) \\ y = \psi(\alpha) \end{cases}$ da cui la derivata prima $y' = \frac{dy}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)} = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha}$

il valore della derivata seconda sarà: $y'' = \frac{(y'_\alpha)'}{x'_\alpha}$

che dà la formula: $y'' = \frac{y''_\alpha \cdot x'_\alpha - y'_\alpha \cdot x''_\alpha}{(x'_\alpha)^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'_\alpha & y'_\alpha \\ x''_\alpha & y''_\alpha \end{vmatrix}}{(x'_\alpha)^3}$

Applichiamo quanto detto all'Ellisse:

$\begin{cases} x = q\cos\alpha \\ y = m\sin\alpha \end{cases}$ $\quad y' = -\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha} \quad y'' = \frac{\left[-\frac{m}{q}\cot\alpha\right]'}{x'_\alpha} = \frac{\frac{m}{q}\frac{1}{\sin^2\alpha}}{-q\sin\alpha} = -\frac{m}{q^2}\frac{1}{\sin^3\alpha}$

Se facciamo m=q=R e α=ε anziché l'ellisse avremmo una circonferenza ed ε sarebbe l'angolo del raggio con l'asse positivo delle x e la derivata della circonferenza:

$$y' = -\cot\varepsilon \qquad y'' = -\frac{1}{R\sin^3\varepsilon}$$

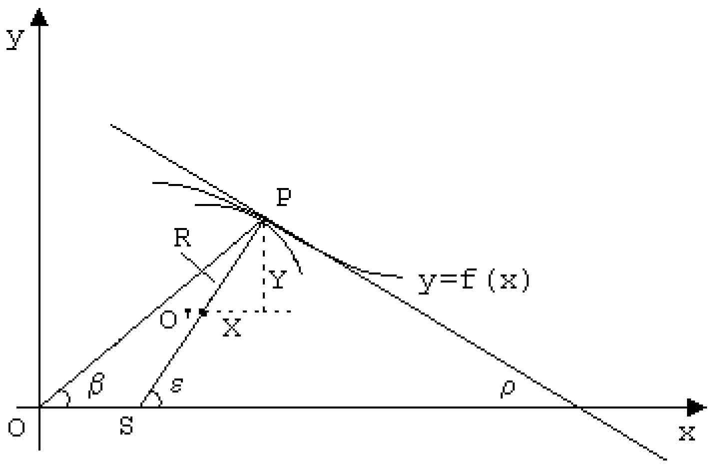
Come per l'Ellisse anche per la Iperbole:

$$y' = -\frac{m}{q}\frac{1}{\sin\alpha} \qquad y'' = -\frac{m}{q^2}\frac{1}{\tan^3\alpha}$$

RAGGIO DI CURVATURA

Quando due curve si toccano in un punto,ed in questo stesso punto ammettono la stessa tangente si dice che esse hanno un *contatto di prim'ordine.* Se poi nello stesso punto hanno uguale variazione di pendenza (cioè la stessa derivata seconda) si dirà che esse hanno *un contatto di secondo ordine.*
Consideriamo una generica curva y=f(x) e un suo punto P:

$$\begin{cases} \overline{OP}\cos\beta = x \\ \overline{OP}\sin\beta = y \end{cases}$$



e una sua tangente in P, di angolo ρ con l'asse positivo dell'ascissa. Conduciamo la perpendicolare a P (come da figura a lato)e,fra le tante possibili curve,passanti per il punto P e con un *contatto di secondo ordine*, prendiamo una circonferenza di raggio R. Ciò vuol dire che:

$$y' = y'_R \qquad \text{e} \qquad y'' = y''_R$$

Dalla figura vediamo:

$$y'_R = -\frac{1}{\tan\varepsilon} = -\frac{x_R}{y_R} \qquad y' = \tan\rho = -\frac{1}{\tan\varepsilon} \qquad \tan\varepsilon = -\frac{1}{\tan\rho} = -\frac{1}{y'}$$

$$y_R'' = (y'_R)' = -\left(\frac{x_R}{y_R}\right)' = -\frac{y_R - y'_R\, x_R}{y_R^{\,2}} = -\frac{y_R^{\,2} + x_R^{\,2}}{y_R^{\,3}} = -\frac{R^2}{R^3\sin^3\varepsilon} = -\frac{1}{R\sin^3\varepsilon}$$

per cui: $y'' = -\dfrac{1}{R\sin^3\varepsilon}$ $\qquad R = -\dfrac{1}{y''\sin^3\varepsilon}$ ed anche $R = -\dfrac{1}{y''\cos^3\rho}$

Data dunque una curva y=f(x) siamo pervenuti a determinare il raggio di una circonferenza che ha un *contatto di secondo ordine* nel punto

P della stessa: tale raggio è detto Raggio di Curvatura, e la Eq. di Vag del relativo cerchio,detto Cerchio Osculatore è:

$$\begin{cases} |R|\cos\varepsilon = X \\ |R|\sin\varepsilon = Y \end{cases}$$

Esaminiamo $\sin^3\varepsilon = \frac{\tan^3\varepsilon}{\left(\sqrt{1+\tan^2\varepsilon}\right)^3} = \frac{\tan^3\varepsilon\sqrt{1+\tan^2\varepsilon}}{\left(1+\tan^2\varepsilon\right)^2}$ e sostituendo $\tan\varepsilon = -\frac{1}{y'}$ si perviene dopo facili passaggi a $\sin^3\varepsilon = -\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\left[1+(y')^2\right]^2}$. Quindi

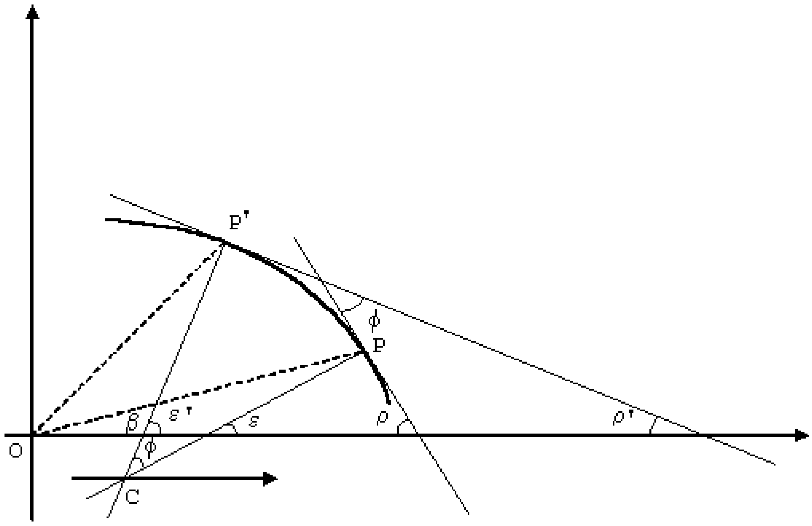
$$R = +\frac{\left[1+(y')^2\right]^2}{y''\sqrt{1+(y')^2}} = +\frac{\left[1+(y')^2\right]^2\sqrt{1+(y')^2}}{y''\left[1+(y')^2\right]} = +\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

dove y’ y” sono i valori indicati in “LA DERIVATA SECONDA DELL’EQ.PARAMETRICA” di questo capitolo.
Possiamo anche scrivere:

$$R == +\frac{\left[1+(\tan\rho)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

R è dunque funzione di ε la quale a sua volta è funzione di ρ.

CURVATURA DI UNA CURVA



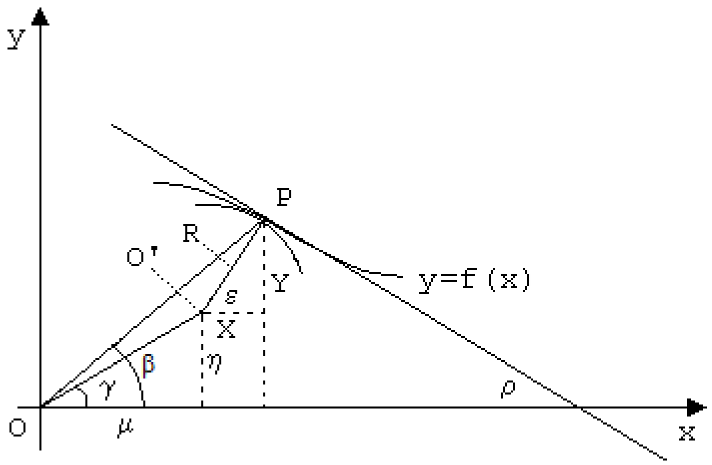
Si osservi la seguente figura dove sono riportate le considerazioni che abbiamo visto nelle pagine precedenti. Nella Figura il punto C è l'incontro delle perpendicolari ai punti P e P' (P verso P'); è ovvio che CP≠CP'. Si può osservare che la uguaglianza dell'angolo ϕ si ottiene facendo:

$$\varepsilon'-\varepsilon=\phi \quad \text{ma} \quad \tan(\varepsilon'-\varepsilon)=\frac{\tan\varepsilon'-\tan\varepsilon}{1+\tan\varepsilon'.\tan\varepsilon}=\frac{-\frac{1}{\tan\rho'}+\frac{1}{\tan\rho}}{1+\frac{1}{\tan\rho'}\frac{1}{\tan\rho}}=\frac{\tan\rho'-\tan\rho}{1+\tan\rho'\tan\rho}=\tan(\rho'-\rho)$$

per cui $(\varepsilon'-\varepsilon)=(\rho'-\rho)=\phi$.
A questo si perviene anche facendo la semplice considerazione che gli angoli in questione sono tra loro Complementari.
Se poi consideriamo $\varepsilon'=\varepsilon+\Delta\varepsilon$ e $\rho'=\rho+\Delta\rho$ cioè come un incremento di ε e di ρ avremo che $\Delta\varepsilon=\Delta\rho=\phi$ detto ANGOLO DI CONTINGENZA e se facciamo l'arco $\widehat{PP'}=K$ detto CURVATURA DI UNA CURVA possiamo scrivere:
$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}=\frac{d\varepsilon}{ds}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\rho}{\Delta s}=\frac{d\rho}{ds}=K$ il valore $R_c=\frac{1}{K}$ e detto RAGGIO DI CURVATURA e nel caso di una circonferenza esso è costante e pari al raggio.

EVOLUTA

Se per ogni generico punto P della curva y=f(x) con angolo $\beta = x\hat{O}P$ tracciamo un Cerchio Osculatore si avrà che il suo centro O', detto Centro di Curvatura, traccerà una curva, e tale curva, luogo geometrico dei Centri di Curvatura, è detta EVOLUTA. I punti di tale Evoluta hanno coordinate (μ, η) i cui valori sono dati da ogni punto di P della curva y=f(x) tramite le distanze OP e O'P (vedi figura) infatti la distanza OO' di tale centro è data dalla somma dei segmenti OP+O'P:



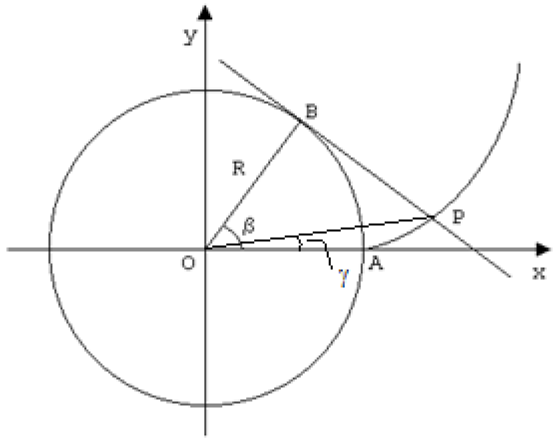
$$\overline{OO'} = \overline{OP}\cos(\gamma - \beta) + R\cos(\gamma - \varepsilon)$$

che sviluppata mi dà l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{OO'}\cos\gamma = \overline{OP}\cos\beta + R\cos\varepsilon = \mu \\ \overline{OO'}\sin\gamma = \overline{OP}\sin\beta + R\sin\varepsilon = \eta \end{cases} \qquad \tan\gamma = \frac{\overline{OP}\sin\beta + R\sin\varepsilon}{\overline{OP}\cos\beta + R\cos\varepsilon} = \frac{\eta}{\mu}$$

EVOLVENTE DEL CERCHIO

In generale, se noi abbiamo una curva (che sappiamo essere una Evoluta)e da essa vogliamo risalire alla curva y=f(x) di partenza, la curva y=f(x) ottenuta dalla Evoluta si chiama Evolvente.
Nell’esempio che segue partiamo da una circonferenza (Evoluta) per ottenere una curva Evolvente, cioè la curva cercata.



Data la circonferenza di centro O nel sistema di riferimento come da figura e una sua tangente nel punto B(dove il parametro β e' l'angolo BOA) tale che l'arco AB = seg.BP. Si cerchi il luogo di tali punti. Sia γ l'angolo del segmento OP;

$$OB = R; \quad AB = BP = R\beta (\beta = rad)$$

$$\overline{OP} = R\cos(\gamma-\beta) + R\beta\cos\left[\gamma - (360 - 90 + \beta)\right] =$$
$$= R\cos(\gamma-\beta) + R\beta\,\mathrm{sen}(\gamma-\beta)$$

La sua Eq. di Vag sarà:

$$\begin{cases} \overline{OP}\cos\gamma = R(\cos\beta + \beta\,\mathrm{sen}\,\beta) \\ \overline{OP}\,\mathrm{sen}\,\gamma = R(\mathrm{sen}\,\beta - \beta\cos\beta) \end{cases}$$
$$\overline{OP}^2 = R^2(1+\beta^2)$$

e avremo che $\tan\gamma = \dfrac{\mathrm{sen}\,\beta + \beta\cos\beta}{\cos\beta - \beta\,\mathrm{sen}\,\beta}$

Eq. di Vag dell’Evolvente del cerchio dato:

$$\overline{OP} = R\sqrt{1+\beta^2} = R(\cos\beta + \beta\,\mathrm{sen}\,\beta)\cos\gamma + R(\mathrm{sen}\,\beta - \beta\cos\beta)\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

$$\begin{cases} R\left(\sqrt{1+\beta^2}\right)\cos\gamma = R\,x \\ R\left(\sqrt{1+\beta^2}\right)\sin\gamma = R\,y \end{cases}$$

Il luogo geometrico dei punti dell'Evolvente del Cerchio sono dati dal prodotto del raggio del cerchio(qualunque sia il valore di R) per $\sqrt{1+\beta^2}$.