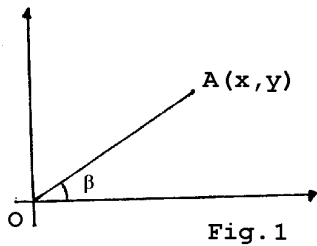


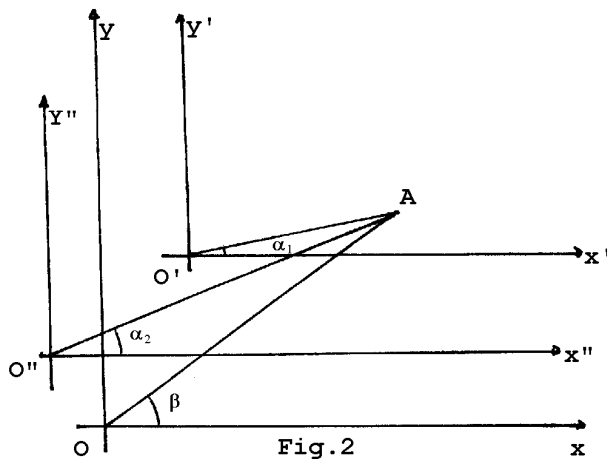
**XI. PUNTO RIFERITO A PIU' TRASLAZIONI (CURVA DEL
CASSINI E LEMNISCATA DI BERNOULLI)**

PUNTO RIFERITO A PIU' TRASLAZIONI

Sia il punto A (x;y;β) riferito ad un sistema come da fig. 1, ma lo si abbia anche riferito a due altri sistemi come da fig. 2, dove O'(a;b) e O''(a';b') rispetto ad O, cioè $\overline{OO'}^2 = (a^2 + b^2)$ e $\overline{OO''}^2 = (a'^2 + b'^2)$ e con gli angoli come in figura. Per quanto visto:



$$\begin{cases} \overline{O'A} \cos \alpha_1 = OA \cos \beta - a = x - a = x' \\ \overline{O'A} \sin \alpha_1 = OA \sin \beta - b = y - b = y' \end{cases}$$



$$\begin{cases} \overline{O''A} \cos \alpha_2 = OA \cos \beta - a' = x - a' = x'' \\ \overline{O''A} \sin \alpha_2 = OA \sin \beta - b' = y - b' = y'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA \cos \beta = x \\ OA \sin \beta = y \end{cases}$$

$$\overline{O'A} = (OA \cos \beta - a) \cos \alpha_1 + (OA \sin \beta - b) \sin \alpha_1 = (x - a) \cos \alpha_1 + (y - b) \sin \alpha_1$$

$$\overline{O''A} = (OA \cos \beta - a') \cos \alpha_2 + (OA \sin \beta - b') \sin \alpha_2 = (x - a') \cos \alpha_2 + (y - b') \sin \alpha_2$$

$$\overline{OA} = x \cos \beta + y \sin \beta$$

CURVA DEL CASSINI E LEMNISCATA DI BERNOULLI

Essendo OA ; $O'A$; $O''A$ segmenti orientati posso conteggiarli tra loro. Vediamo quindi qualche esempio tra i più noti (per esemplificazione di scrittura useremo i valori per punti $(x-a)$; $(x-a')$; ecc. anzichè $(OA \cos \beta - a)$; $(OA \cos \beta - a')$, ecc.): per $\overline{O'A} * \overline{O''A}$ avremo

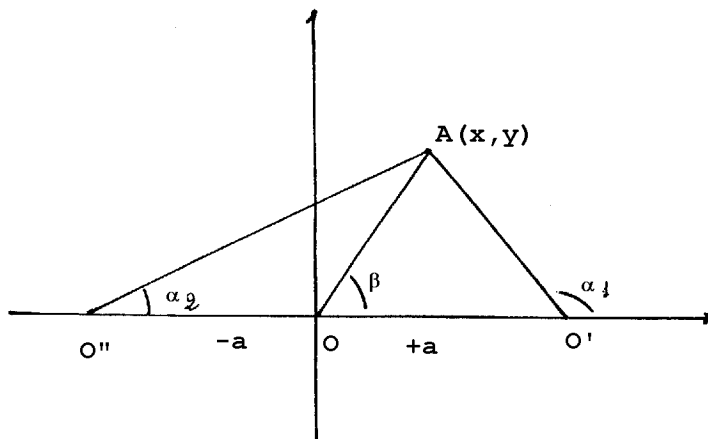
$$1a) \begin{cases} \overline{O'A}^2 \overline{O''A}^2 = [(x-a)^2 + (y-b)^2] [(x-a')^2 + (y-b')^2] = \\ = (x-a)^2(x-a')^2 + (x-a)^2(y-b')^2 + (x-a')^2(y-b)^2 + (y-b)^2(y-b')^2 \end{cases}$$

$$1b) \begin{cases} \overline{O'A} \overline{O''A} = [(x-a) \cos \alpha_1 + (y-b) \text{sen} \alpha_1] [(x-a') \cos \alpha_2 + (y-b') \text{sen} \alpha_2] = \\ = (x-a)(x-a') \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (x-a)(y-b') \cos \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 + \\ + (x-a')(y-b) \cos \alpha_2 \text{sen} \alpha_1 + (y-b)(y-b') \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 \end{cases}$$

Se volessimo che un tale prodotto fosse costante cioè $\overline{O'A} * \overline{O''A} = K^2$ e i riferimenti O', O, O'' sullo stesso asse come da figura, avremo: $a' = -a$ e $b = b' = 0$ e quindi

$$2a) \quad (x^2 - a^2)^2 + (x-a)^2 y^2 + (x+a)^2 y^2 + y^4 = K^4$$

$$2b) \quad (x^2 - a^2) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (x-a)y \cos \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 + (x+a)y \cos \alpha_2 \text{sen} \alpha_1 + y^2 \text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_2 = K^2$$



Le equazioni 2a) e 2b) sono identiche. Infatti nella 2b) moltiplicando primo e secondo membro per $\overline{O'A}$ e $\overline{O''A}$ e sostituendo: $\overline{O'A} \cos \alpha_1 = x-a$, $\overline{O''A} \cos \alpha_2 = x-a' = x+a$, ecc.

si avrà: $(x^2 - a^2)^2 + (x-a)^2 y^2 + (x+a)^2 y^2 + y^4 = k^2 k^2$ identica alla 1a).

(continua)

Sviluppiamo la 2a) $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 = k^4$ e vediamo che tale espressione non e' che la "Curva del Cassini" per punti.
In forma Parametrica la 2a) può essere scritta:

$$(\overline{OA}^2)^2 - 2a^2(\overline{OA}^2)(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + (a^4 - k^4) = 0$$

$$\overline{OA}^2_{1/2} = \frac{2a^2 \cos 2\beta \pm \sqrt{4a^4 \cos^2 2\beta - 4(a^4 - k^4)}}{2} = a^2 \cos 2\beta \pm \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2 2\beta}$$

Si osservi che il radicando $\Delta = k^4 - a^4 \sin^2 2\beta$ e' positivo per $a < k$ e che delle due soluzioni di $\overline{OA}^2_{1/2}$, poichè sempre positivo, quindi, è valida solo la seguente

$$(a^2 \cos 2\beta + \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2 2\beta}).$$

Infatti per $(a^2 \cos 2\beta - \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2 2\beta})$ si avrebbe $(a^2 \cos 2\beta)^2 > k^4 - a^4 \sin^2 2\beta$; $a^4(\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta) > k^4$ cioè $a > k$ in contraddizione con la positività del Δ che deve essere $a < k$.

Dunque $\overline{OA} = \sqrt{a^2 \cos 2\beta + \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2 2\beta}}$
e' il valore della distanza dall'origine, dei punti nella "Curva del Cassini".

Se nella nostra espressione ponessimo $k=a$ avremo la curva chiamata LEMNISCATA DI BERNOULLI cioè

$$\overline{OA} = \left| \sqrt{a^2 \cos 2\beta + a^2 \cos 2\beta} \right| = \left| \sqrt{2a^2 \cos 2\beta} \right| \text{ valida solo per } \cos 2\beta > 0$$

CURVA DEL CASSINI

$$\left| \sqrt{a^2 \cos 2\beta + \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2 2\beta}} \right| = x \cos \beta + y \sin \beta \quad k > a$$

CURVA LEMNISCATA DI BERNOULLI

$$\left| \sqrt{2a^2 \cos 2\beta} \right| = x \cos \beta + y \sin \beta \quad k = a \quad \cos 2\beta > 0$$

ELLISSE E IPERBOLE

L'esempio tipico di un punto riferito a due riferimenti lo abbiamo dall'Ellisse e dalla Iperbole, dove le distanze di un punto da due diversi riferimenti e' dato come costante. Qui vediamo l'esempio della Ellisse.

Dalla pag.1 facciamo:

$$\overline{O'A} + \overline{O''A} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2} = k$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = k - \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2}$$

poniamo $a=c$ $a'=-c$ $k=2q$ $b=b'=0$ e quadriamo

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 + 4q^2 - 4q\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-2xc = 2xc + 4q^2 - 4q\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Semplificando: $q\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = q^2 + cx$

e quadrandolo: $x^2(q^2 - c^2) + q^2y^2 = q^2(q^2 - c^2)$

poiché tale espressione è del tipo $\overline{OA}^2 = x^2 + y^2$ si potrà scriverne l'Eq. Parametrica di Vag.

$$\begin{cases} q\sqrt{q^2 - c^2} \cos \alpha = x\sqrt{q^2 - c^2} \\ q\sqrt{q^2 - c^2} \sin \alpha = qy \end{cases} \quad \begin{cases} x = q \cos \alpha \\ y = \sqrt{q^2 - c^2} \sin \alpha \end{cases} \quad \text{già vista}$$

e poiché dalla condizione iniziale ne deriva che $q^2 - c^2 = m^2$ avremo la condizione parametrica $x = q \cos \alpha$ e $y = m \sin \alpha$ e quella per punti

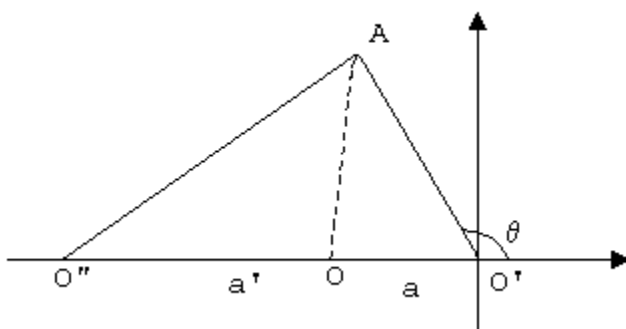
(Cap.III): $x^2m^2 + q^2y^2 = q^2m^2$ con q =assemaggiore e m =asseminore.

EQUAZIONE POLARE CLASSICA

(Ellisse, Iperbole, Circonferenza)

Dal caso visto in precedenza $\overline{O'A} \pm \overline{O''A} = K$ (costante) possiamo fare, vedi figura:

$$\begin{cases} (\overline{O''A})^2 = (K \mp \overline{O'A})^2 = \overline{O'A}^2 + K^2 \mp 2K\overline{O'A} \\ (\overline{O''A})^2 = (a'+a)^2 + \overline{O'A}^2 + 2(a'+a)\overline{O'A} \cos \theta \end{cases}$$



e uguagliando:

$$\overline{O'A}^2 + K^2 \mp 2K\overline{O'A} = (a'+a)^2 + \overline{O'A}^2 + 2(a'+a)\overline{O'A} \cos \theta$$

$$\overline{O'A} = \frac{K^2 - (a'+a)^2}{2(\pm K + (a'+a)\cos \theta)}$$

la espressione $2(\pm K + (a'+a)\cos \theta)$ può essere scritta $\pm 2(K \pm (a'+a)\cos \theta) = \pm 2(K + (a'+a)\cos \theta)$ in quanto il valore del coseno è positivo e negativo, variando da 0° a 360°. Pertanto

$$\overline{O'A} = \pm \frac{K^2 - (a'+a)^2}{2(K + (a'+a)\cos \theta)} \quad \overline{O'A} = \frac{\pm \frac{K^2 - (a'+a)^2}{2K}}{\left(1 + \frac{(a'+a)}{K} \cos \theta\right)}$$

Facendo $p = \pm \frac{K^2 - (a'+a)^2}{2K}$ e $e = \frac{(a'+a)}{K}$ possiamo scrivere:

$$\overline{O'A} = \rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \mathbf{1]}$$

Se poniamo $K=2q$, dove q =asse maggiore o asse trasverso, la **1]** sarà l'Equazione Polare Classica, calcolata dal Fuoco=Origine, quando sia p la costante Parametro-Focale; (e) la costante eccentricità e θ la variabile del vettore del Fuoco. La costante K può essere maggiore o inferiore ad $(a'+a)$ a seconda il valore di $\overline{O'A} \pm \overline{O''A}$. Se sostituiamo $(a'+a)=eK$ avremo che:

$$p = + \frac{K^2 - (eK)^2}{2K} = \frac{K}{2}(1 - e^2) \quad \mathbf{a]} \quad e \quad p = + \frac{(eK)^2 - K^2}{2K} = \frac{K}{2}(e^2 - 1) \quad \mathbf{b]}$$

Nel caso **a]** p è il parametro relativo all' Ellisse con l'origine nel fuoco, nel caso **b]** di quello della Iperbole; quindi l'(e) di **a]** è diverso dall'(e) di **b]**. In entrambi i casi tuttavia il suo valore è identico: $\frac{m^2}{q}$. Il valore p vediamo dipendere solamente da K e dalla eccentricità (e), possiamo quindi scrivere:

$$\overline{O'A} = \frac{K}{2} \frac{(1-e^2)}{(1+e \cos \theta)} \qquad \overline{O'A} = \frac{K}{2} \frac{(e^2-1)}{(1+e \cos \theta)} \qquad \mathbf{2]}$$

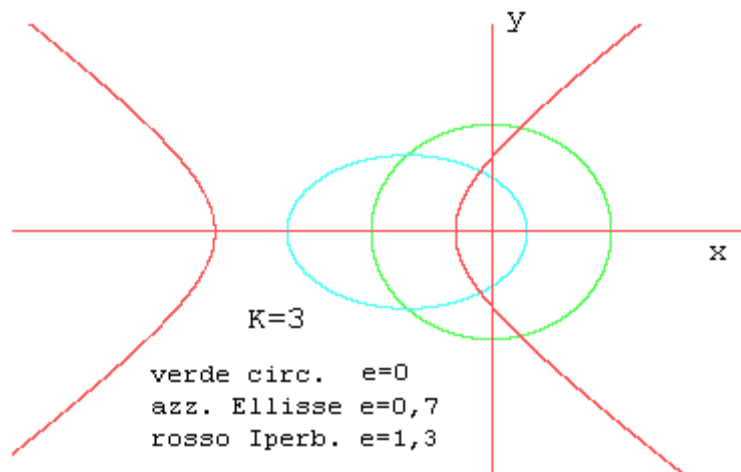
e le due espressioni della **2]** rappresentano la stessa figura, in quanto il Parametro-Focale è lo stesso.
 In generale dalla **1]** e dalla **2]** abbiamo che il valore e disegna il tipo della figura; K la grandezza della curva e l'angolo θ i punti che la compongono.

Con $e=0$ abbiamo una Circonferenza di raggio $K/2$.

con $e<1$ sappiamo avere una Ellisse.

con $e>1$ sappiamo avere una Iperbole.

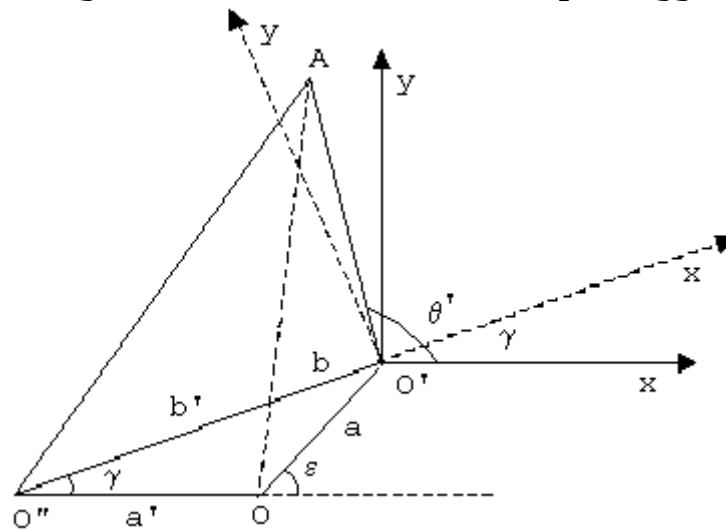
come possiamo vedere dalla figura sotto:



Nel Cap.III "ELLISSE (FUOCO)" abbiamo visto essere $\cos \theta = \frac{\cos \alpha - e}{1 - e \cos \alpha}$ e

nel Cap.III "IPERBOLE (FUOCO)" avevamo visto $\cos \theta = \frac{1 - e \cos \alpha}{\cos \alpha - e}$

Se i segmenti a ed a' sono deviati come in figura sotto, possiamo sempre arrivare a calcolare $O'O''=(b+b')$ e riportarci al caso generale, a condizione che siano dati o ϵ o γ , oltre ad a e a' , poiché questi dati sono legati tra loro dai soliti passaggi:



$$\begin{cases} \overline{O'O''} \cos \gamma = a \cos \epsilon + a' \\ \overline{O'O''} \sin \gamma = a \sin \epsilon \end{cases} \quad \left(\overline{O'O''}^2 \right) = a^2 + a'^2 + 2a a' \cos \epsilon \quad \tan \gamma = \frac{a \sin \epsilon}{a \cos \epsilon + a'}$$

che daranno l' EQ. POLARE CLASSICA vista, con $\theta = \theta' - \gamma$:

$$\overline{O'A} = \rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta' - \gamma)} \quad \mathbf{1]}$$

$$\overline{O'A} = \frac{K}{2} \frac{(1 - e^2)}{(1 + e \cos \theta' - \gamma)} \quad \overline{O'A} = \frac{K}{2} \frac{(e^2 - 1)}{(1 + e \cos \theta' - \gamma)} \quad \mathbf{2]}$$