XIII. L’ EQ. DI VAG E GLI ANGOLI AL CENTRO

GLI ANGOLI E L’EQ. DI VAG

Di una qualunque Eq. di Vag abbiamo visto il rapporto e la somma delle loro coordinate, cioè:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x \\ \overline{OA}\,\mathrm{sen}\,\beta = y \end{cases} \qquad \frac{y}{x} = \tan\beta; \quad x^2 + y^2 = \overline{OA}^2$$

vediamo il caso del loro prodotto e differenza:

$$xy = \overline{OA}^2 \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta = \frac{\overline{OA}^2\,\mathrm{sen}\,2\beta}{2}$$

$$x^2 - y^2 = \overline{OA}^2(\cos^2\beta - \mathrm{sen}^2\beta) = \overline{OA}^2\cos 2\beta$$

Proviamo a scriverne l’Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{OA}^2\,\mathrm{sen}\,2\beta = 2xy \\ \overline{OA}^2\cos 2\beta = (x^2 - y^2) \end{cases} \quad \text{dove } \mathrm{sen}^2\,2\beta + \cos^2 2\beta = 1$$

ma dovrà anche essere:

$$\left(\overline{OA}^2\right)^2 = (2xy)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 = 4x^2y^2 + x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2$$

come infatti è, per tanto avremo la Eq. di Vag:

$$\overline{OA}^2 = 2xy\,\mathrm{sen}\,2\beta + \left(x^2 - y^2\right)\cos 2\beta$$

finora abbiamo sempre parametrizzato le coordinate delle figure rifacendoci sempre all'angolo di una circonferenza di riferimento e cercando poi la corrispondenza tra i valori della parametrizzazione e quelli dell'angolo al centro della figura. come ad esempio:

nella Ellisse $\tan\beta = \dfrac{m}{q}\tan\alpha$ nell' Iperbole $\tan\beta = \dfrac{m}{q}\sin\alpha$

e nella Parabola $\tan\beta = \dfrac{\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{+(1-2\cos\alpha)}$

In verità possiamo sfruttare come parametri anche gli angoli al centro come visto per la Parabola in Cap.III° "LE CURVE". Tale uso dà la risoluzione mediante una Equazione Polare che noi sfrutteremo, passando da una espressione per punti, ad una Parametrica mediante gli angoli al centro utilizzando le formule appropriate.

ESEMPIO DA “ROTAZIONE DI UNA IP.EQ.” (CAP. VI)

Avevamo visto l’Eq. di Vag: **$xy=a^2$**
applichiamo ciò che abbiamo fatto nella pagina precedente:

$$\begin{cases} \overline{OA'}^2 sen2\beta' = 2xy = 2a^2 = x & \overline{OA'}^2 = \dfrac{2a^2}{sen2\beta'} \\ \overline{OA'}^2 \cos 2\beta' = \overline{OA'}^2 \cos^2 \beta' - \overline{OA'}^2 \sin^2 \beta' = x^2 - y^2 = \dfrac{2a^2}{sen2\beta'} \cos 2\beta' = y \end{cases}$$

$$y = \frac{2a^2}{\tan 2\beta'} \qquad x = \frac{a^2}{y} = \frac{\tan 2\beta'}{2}$$

abbiamo trovato le coordinate della Iperbole Equilatera tramite l'angolo al centro.
Analogamente sia l'Eq. dell'Iperbole Eq.: **$X^2-Y^2=q^2=2a^2$**

$$\overline{OA}^2 \cos^2 \beta - \overline{OA}^2 \sin^2 \beta = \overline{OA}^2 (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) = \overline{OA}^2 \cos 2\beta = 2a^2 \qquad \overline{OA} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\beta}}$$

da cui l'equazione:

$$\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\beta}} \cos \beta = X \\ \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\beta}} \sin \beta = Y \end{cases}$$

e i valori delle coordinate della Iperbole.

Le due IPERBOLI sono identiche ma ruotate di 45° per cui OA'=OA.
Si tenga presente che, in questo esempio, le due Iperboli sono riferite all'angolo al centro β, mentre in CAP.VI° "ROTAZIONE DI UNA IPERBOLE EQUIL.(ESEMPIO)" Pag.8 le due iperboli sono calcolate in base, alla Funzione Parametrica di angolo α riferita ad una circonferenza e dove si ottiene:

$$xy = (X^2 - Y^2)0{,}5 = (X^2 - Y^2)\frac{1}{2} = a^2$$

Più avanti illustreremo l'ulteriore uso degli angoli al centro.

VALORE DELLA DISTANZA RISPETTO AGLI ANGOLI

In generale possiamo costruire la nostra Eq. di Vag direttamente dall’angolo per il valore relativo di OA:

1) $$\begin{cases} \overline{OA}^2 sen2\beta = 2\overline{OA}^2 sen\beta \cos\beta = 2xy \\ \overline{OA}^2 \cos 2\beta = \overline{OA}^2 (\cos^2\beta - sen^2\beta) = x^2 - y^2 \end{cases}$$ (già vista all’inizio)

$$\overline{OA}^2 = 2xysen2\beta + (x^2 - y^2)\cos 2\beta$$

2) $$\begin{cases} \overline{OA}^3 sen3\beta = \overline{OA}^3 (3sen\beta - 4sen^3\beta) = 3yx^2 - y^3 = y\left(3x^2 - y^2\right) \\ \overline{OA}^3 \cos 3\beta = \overline{OA}^3 (4\cos^3\beta - 3\cos\beta) = x^3 - 3xy^2 = x\left(x^2 - 3y^2\right) \end{cases}$$

$$\overline{OA}^3 = (3yx^2 - y^3)sen3\beta + (x^3 - 3xy^2)\cos 3\beta$$

3) $$\begin{cases} \overline{OA}^4 \sin 4\beta = \overline{OA}^4 2\sin 2\beta\cos 2\beta = 2\overline{OA}^2 \sin 2\beta \cdot \overline{OA}^2 \cos 2\beta = 4xy\ (x^2 - y^2) \\ \overline{OA}^4 \cos 4\beta = \overline{OA}^4 (\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) = \overline{OA}^4 \cos^2 2\beta - \overline{OA}^4 \sin^2 2\beta = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2 \end{cases}$$

$$\overline{OA}^4 = 4yx(x^2 - y^2)\sin 4\beta + \left[(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2\right]\cos 4\beta$$

Si osservi che OA dell’Eq. di Vag iniziale assume ora il valore delle potenze OA^2, OA^3 e OA^4 utilissimi in certe considerazioni.

Nel caso di **somma o sottrazione di angoli** si può procedere in modo analogo e molto spesso utile:

$$\overline{OB}\cos(\alpha \pm \beta) = \overline{OB}(\cos\alpha\cos\beta \mp sen\alpha sen\beta)$$
$$\overline{OB}sen(\alpha \pm \beta) = \overline{OB}(sen\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha sen\beta)$$

supposto che:

$$\begin{cases}\overline{OA_1}\cos\alpha = x_1\\ \overline{OA_1}sen\alpha = y_1\end{cases} \quad \begin{cases}\overline{OA_2}\cos\beta = x_2\\ \overline{OA_2}sen\beta = y_2\end{cases}$$ e con $\overline{OB} = \overline{OA_1}\,\overline{OA_2}$

si avrà: $$\begin{cases}\overline{OB}\cos(\alpha \pm \beta) = X = x_1x_2 \mp y_1y_2\\ \overline{OB}\,sen(\alpha \pm \beta) = Y = y_1x_2 \pm x_1y_2\end{cases}$$

Ed aggiungendo: $$\begin{cases}\overline{OA_3}\cos\gamma = x_3\\ \overline{OA_3}sen\gamma = y_3\end{cases}$$ con $\overline{OB} = \overline{OA_1}\;\overline{OA_2}\;\overline{OA_3}$ avere

$$\begin{cases}\overline{OB}\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \overline{OB}\;\left[\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma\right] = X\\ \overline{OB}\,sen(\alpha+\beta+\gamma) = \overline{OB}\;\left[\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma\right] = Y\end{cases}$$

$$\begin{cases}X = (x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (y_1x_2 + x_1y_2)y_3\\ Y = (y_1x_2 + x_1y_2)x_3 + (x_1x_2 - y_1y_2)y_3\end{cases}$$

E' ovvio che se $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3}$ e $\alpha = \beta = \gamma$ si ritorna ai casi visti.

In definitiva abbiamo che: $$\begin{cases}\overline{OB}\cos\mu = x\\ \overline{OB}\,\mathrm{sen}\,\mu = y\end{cases}$$ ***)**

Dove in generale possiamo comunque fare:

$OB = (a_1\ a_2\ a_3\ ....a_n)$ e $\mu = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ ....\alpha_n)$

qualunque sia il valore della x e della y e scrivere l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases}(a_1\,a_2\,a_3\,............a_n)\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+............\alpha_n) = x\\ (a_1\,a_2\,a_3\,............a_n)sen(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+............\alpha_n) = y\end{cases}$$

Il caso di una somma $OB = OA_1 + OA_2 + ...+ OA_n$ e angoli ρ e $\alpha_1;\alpha_2;.................;\alpha_n$ rientra come sappiamo nella regola del parallelogramma (Cap. VI. TRASLAZIONE ROTAZIONE ROTO-TRASLAZIONE) ed può essere scritta:

$$\begin{cases}OB\cos\rho = OA_1\cos\alpha_1 + OA_2\cos\alpha_2 + ...+ OA_n\cos\alpha_n\\ OB\sin\rho = OA_1\sin\alpha_1 + OA_2\sin\alpha_2 + ...+ OA_n\sin\alpha_n\end{cases}$$

$$OB = OA_1\cos(\rho-\alpha_1) + OA_2\cos(\rho-\alpha_2) + ...+ OA_n\cos(\rho-\alpha_n)$$

PRODOTTO SCALARE-VETTORIALE E CURVA DEL CASSINI

Il valore di OB come prodotto l'abbiamo applicato nella "Curva del Cassini" (capitolo: PUNTO RIFERITO A PIU' TRASLAZIONI); infatti se facciamo:

$\overline{OB} = \overline{O'A} * \overline{O''A} = k^2 \quad e \quad (\alpha_1 \pm \alpha_2) = \mu$

ritroviamo la "Curva del Cassini" (Cap. XI). Proviamo per $(\alpha_1 - \alpha_2) = \mu$ e coordinate $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$

$$\text{a)} \begin{cases} k^2 \cos\mu = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ k^2 sen\mu = y_1 x_2 - x_1 y_2 \end{cases}$$

nella "Curva del Cassini" (vedi figura Cap.XI Pag.2) altra condizione era che le coord. (x_1,x_2) fossero nella stessa ascissa e $(x_1+x_2)=2a$; con A di coordinate (x,y) dove $x_1=a-x$, $x_2=a+x$ e $y_1=y_2=y$ che sostituite in a) daranno:

$$\text{b)} \begin{cases} k^2 \cos\mu = (a^2 - x^2) + y^2 \\ k^2 sen\mu = y(a+x) - y(a-x) = 2xy \end{cases}$$

Quadriamo e sommiamo

$$k^4 = (a^2 - x^2)^2 + y^4 + 2y^2(a^2 - x^2) + 4x^2y^2 = a^4 + x^4 - 2a^2x^2 + y^4 + 2y^2a^2 - 2y^2x^2 + 4x^2y^2$$

Sviluppiamo:

$$k^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4$$

che è l'Eq. per punti della "Curva del Cassini".

Sostituiamo (x,y) con i valori dell'Eq. di Vag: $\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x \\ \overline{OA}\sin\beta = y \end{cases}$

$$k^4 = \overline{OA}^4 - 2a^2\overline{OA}^2(\cos^2\beta - \sin^2\beta) \qquad \overline{OA}^4 - 2a^2\overline{OA}^2\cos 2\beta + (a^4 - k^4) = 0$$

da cui (vedi Cap.XI) $\overline{OA} = \sqrt{a^2\cos 2\beta + \sqrt{k^4 - a^4 sen^2 2\beta}}$

Siamo dunque pervenuti esattamente alla "Curva del Cassini" a cui si perviene anche facendo (□□□□□□

E' IMPORTANTE osservare che la "Curva del Cassini" rappresenta l'andamento del *prodotto scalare-vettoriale* sul piano.

Infatti per $\overline{OB} = ab; \quad (\alpha - \beta) = \mu; \quad (x_1;y_1) = (a_x;a_y); \quad (x_2;y_2) = (b_x;b_y)$; (con $\alpha=\alpha_1$ e $\beta=\alpha_2$) abbiamo la classica espressione:

$$\begin{cases} ab\cos\mu = a_x b_x + a_y b_y & \textit{prodotto scalare} \\ absen\mu = a_y b_x - a_x b_y & \textit{prodotto vettoriale} \end{cases}$$

$$ab = k^2 = (a_x b_x + a_y b_y)\cos\mu + (a_y b_x - a_x b_y)sen\mu$$

inoltre in tale rappresentazione per $0° \le \vec{\mu} \le 90°$ vediamo che il prodotto scalare tende a zero ed il prodotto vettoriale a k^2, mentre per $\overleftarrow{\mu}$ sarà il prodotto scalare a tendere a k^2 e il vettoriale a zero.

ESEMPIO

Sia una circonferenza di raggio R. L'area di un suo qualunque settore circolare è data da:

$$\left[\frac{\alpha_0 \pi}{180}\frac{R^2}{2}\right]$$

se facciamo variare $0° \leq \alpha_0 \leq 360°$ si hanno tutti i valori di tale area a crescere fino all'area del cerchio.
L'AREA DEL SETTORE è dunque un valore al quadrato in quanto superficie, e di esso, applicando quanto detto, è possibile trovare una curva mediante una Eq. di Vag:

$$*)\quad \begin{cases} \left[\frac{\alpha_0 \pi}{180}\frac{R^2}{2}\right]\cos 2\alpha_0 = x \\ \left[\frac{\alpha_0 \pi}{180}\frac{R^2}{2}\right]\operatorname{sen} 2\alpha_0 = y \end{cases}$$

dove il primo membro varia al variare di α_0.

Si osservi che tale curva è una *spirale*.

Se avessi scritto: $\begin{cases} R^2 \cos 2\alpha_0 = x \\ R^2 \operatorname{sen} 2\alpha_0 = y \end{cases}$ avrei avuto una circonferenza.

Di un rettangolo nota la base, coincidente con l’asse delle ascisse, si voglia la curva della sua area (cioè di un valore al quadrato), quando l’angolo della sua diagonale vari secondo β.

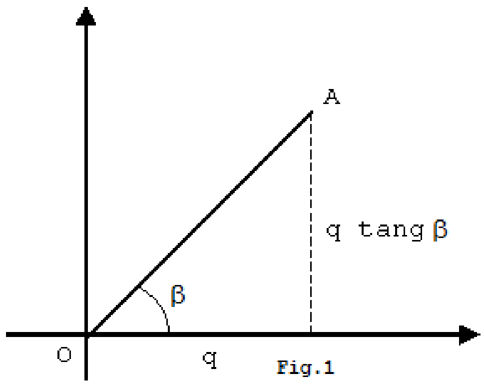


Fig.1

Come in figura, sia q la base mentre q tangβ l’altro lato. Vediamo il prodotto dei lati e il valore della diagonale al quadrato:

$$2(AREA)=2xy=2q^2\tan\beta$$

$$x^2-y^2=q^2(1-\tan^2\beta)$$

$$\overline{OA}^2=x^2+y^2=q^2(1+\tan^2\beta)=\frac{q^2}{\cos^2\beta}$$

(con 0°≤ β ≤ 360°)

Scriviamo l’Eq. di Vag:

$$\begin{cases}\dfrac{q^2}{\cos^2\beta}sen2\beta=2q^2\tan\beta=y\\[2ex]\dfrac{q^2}{\cos^2\beta}\cos2\beta=q^2(1-\tan^2\beta)=x\end{cases}$$

Tale curva dà una sola **Parabola**,aperta verso il basso, che ha come ordinata il doppio dell’area del rettangolo come Iper. Equil. tipo $xy=q^2\tan\beta$ e per ascissa una Iper. Equil. tipo $x^2-y^2=q^2(1-\tan\beta)$.

Facendo invece:

$$\begin{cases}q^2\tan\beta\, sen\beta=y\\ q^2\tan\beta\cos\beta=x\end{cases}$$

cioè l’area del rettangolo come valore del segmento OA dall’origine,in tal caso avrò due **Iperboli** simmetriche con il vertice nell’origine e aperte verso destra e verso sinistra.

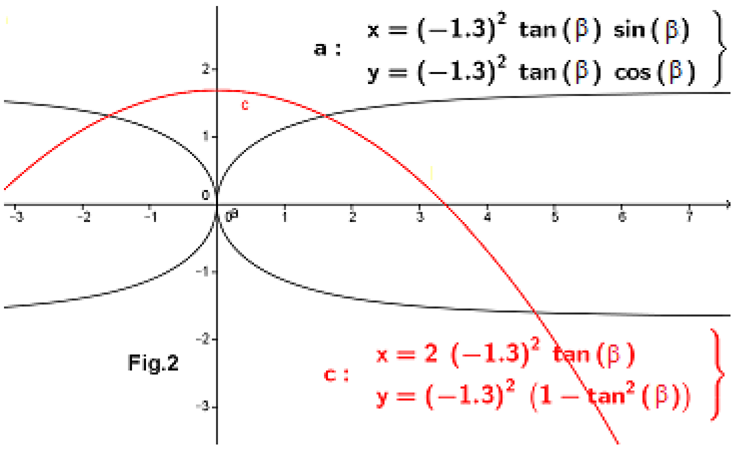


Fig.2

In Fig.2 in Rosso la parabola; in nero le due Iperboli.

APPLICAZIONE DELL'EQ.DI VAG ALL'EQ. PER PUNTI

Vediamo una applicazione di quanto affermato nel paragrafo "VALORE DELLA DISTANZA RISPETTO AGLI ANGOLI" tenendo sempre presente OA dell'Eq. di Vag iniziale:

I°) Sia $(x^2+y^2)^2 = 4xy^2$ (Curva Bifoglio)
convertiamo con OA dell'Eq. di Vag:

$\left(\overline{OA}^2\right)^2 = 2xy \cdot 2 \cdot y = \overline{OA}^2 \sin 2\beta \cdot 2 \cdot \overline{OA}\sin\beta$; $\overline{OA} = 2\sin\beta \cdot \sin 2\beta$

Sostituiamo OA nell'Eq. di Vag $\begin{cases}(2\sin\beta \cdot \sin 2\beta)\cos\beta = x \\ (2\sin\beta \cdot \sin 2\beta)\sin\beta = y\end{cases}$;

Otteniamo x e y tramite l'angolo: $\begin{cases}(\sin^2 2\beta) = x \\ (2\sin^2\beta)\sin 2\beta = y\end{cases}$

Allo stesso modo che per la Curva Bifoglio proseguiamo interpretando la Parabola con il vertice nell'origine, risolta con altre considerazioni nel Cap. III° "LE CURVE":

II°) $y^2 = 2px$; $\overline{OA}^2 \sin^2\beta = 2p\overline{OA}\cos\beta$; $\overline{OA} = \left|\frac{2p}{\sin^2\beta}\cos\beta\right|$

$$\begin{cases}\overline{OA}\cos\beta = \frac{2p}{\sin^2\beta}\cos^2\beta = \frac{2p}{\tan^2\beta} = x \\ \overline{OA}\sin\beta = \frac{2p}{\sin^2\beta}\cos\beta\sin\beta = \frac{2p}{\tan\beta} = y\end{cases}$$

III°) A pag.9 del Cap.V° abbiamo visto la formula dell'ELLISSE e dell' IPERBOLE: $m^2x^2 \pm q^2y^2 = m^2q^2$ trattata con il parametro riferito alle variabili coordinate x,y; vediamolo invece riferito all'angolo al centro:

$$\overline{OA}^2(m^2\cos^2\beta \pm q^2\sin^2\beta) = m^2q^2$$

$$\overline{OA}^2 = \frac{m^2q^2}{(m^2\cos^2\beta \pm q^2\sin^2\beta)} \qquad \overline{OA} = \frac{mq}{\sqrt{(m^2\cos^2\beta \pm q^2\sin^2\beta)}}$$

E quindi i valori delle incognite:

$$\begin{cases}x = \overline{OA}\cos\beta = \frac{mq}{\sqrt{(m^2\cos^2\beta \pm q^2\sin^2\beta)}}\cos\beta \\ y = \overline{OA}\sin\beta = \frac{mq}{\sqrt{(m^2\cos^2\beta \pm q^2\sin^2\beta)}}\sin\beta\end{cases}$$

L' Esempio rappresenta le Eq. Polari, in forma parametrica delle curve: basta infatti dividere tutto per q^2 e fare $(1-e^2) = \frac{m^2}{q^2}$ per l'

Ellisse e $(e^2-1)=\dfrac{m^2}{q^2}$ per l'Iperbole. Si osservi che posso considerare $\sin^2\beta=\cos^2\beta_1$ avendo per definizione $\cos^2\beta+\cos^2\beta_1=1$.

IV°) Riferendoci ancora alla tabellina del Cap.V° possiamo considerare una qualunque espressione del tipo: $\left(ax^2\pm by^2\right)$ trasformabili per a=m^2 e b=q^2 come abbiamo visto in quel capitolo, in $\left((mx)^2+(qy)^2\right)$, $\left((mq)^2+(yx)^2\right)$ ecc. ed equiparata ciascuna o ad una ellisse o ad una iperbole. Vediamone un esempio:

$ax^2+by^2=(yx)^2$ che darà:

$$\overline{OA}^2\left(a\cos^2\beta+b\sin^2\beta\right)=\overline{OA}^4\cos^2\beta\sin^2\beta \qquad \overline{OA}=\frac{\sqrt{\left(a\cos^2\beta+b\sin^2\beta\right)}}{\cos^2\beta\sin^2\beta}$$

In generale il valore di una espressione può essere indicato con il valore dell'angolo:

V°) $\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2\cos\beta\sin\beta}=\dfrac{2}{\sin 2\beta}$

VI°) $\dfrac{x^2+y^2}{(xy)^2}=\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4}{\overline{OA}^2\sin^2 2\beta}=\left(\dfrac{2}{\overline{OA}\sin 2\beta}\right)^2$

VII°) $\dfrac{x^2-y^2}{xy}=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\cdot\overline{OA}^2\cos 2\beta}{\overline{OA}^2\sin 2\beta}=\dfrac{2}{\tan 2\beta}$

VIII°) $\dfrac{x^2-y^2}{(xy)^2}=\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4\cos\beta}{\overline{OA}^2\sin^2 2\beta}=\left(\dfrac{2}{\overline{OA}\sin 2\beta}\right)^2\cos\beta$

IX°) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2=\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{2}{\sin 2\beta}\dfrac{2}{\tan 2\beta}=\left(\dfrac{2}{\sin 2\beta}\right)^2\cos 2\beta$

X°) $(x\pm y)=OA(\cos\beta\pm\sin\beta)$

XI°) $(x\pm y)^2=\overline{OA}^2(\cos\beta\pm\sin\beta)^2=\overline{OA}^2(1\pm\sin 2\beta)$

XII°) $(ax\pm by)=\overline{OA}\,(a\cos\beta\pm b\sin\beta)$; $(a^2x^2\pm b^2y^2)=\overline{OA}^2(a^2\cos^2\beta\pm b^2\sin^2\beta)$

Tenendo sempre presente che $\left|\overline{OA}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$, vediamo anche:

XIII°) $x^4-y^4=(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)=\left(\overline{OA}^2\cos 2\beta\right)\cdot\overline{OA}^2=\overline{OA}^4\cos 2\beta$

Il che vuol dire $\begin{cases}\overline{OA}^4\sin 2\beta=\overline{OA}^2\sin 2\beta\cdot\overline{OA}^2=2xy\ (x^2+y^2)\\ \overline{OA}^4\cos 2\beta=\overline{OA}^2\cos 2\beta\,\overline{OA}^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=x^4-y^4\end{cases}$

XIV°) $x^4+y^4=\overline{OA}^4(\cos^4\beta+\sin^4\beta)=\overline{OA}^4\left[1-2\cos^2\beta\sin^2\beta\right]$

dove $(\cos^4\beta+\sin^4\beta)=\left[\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right)^2-2\cos^2\beta\sin^2\beta\right]=\left[1-2\cos^2\beta\sin^2\beta\right]$

RISOLUZIONE DI EQUAZIONI (CUBICHE E NON SOLO).

XV°) $y = x^3$ $\quad \frac{y}{x} = \tan\beta = x^2 \quad x = \pm\sqrt{\tan\beta} \quad \text{con} \quad \tan\beta \geq 0$

$y = x\tan\beta = \pm\sqrt{\tan\beta}\tan\beta = \pm\sqrt{\tan^3\beta}$ (+x con +y; -x con -y)

XVI°) $y^2 = x^3 K \qquad x = \frac{\tan^2\beta}{K} \qquad y = \frac{\tan^2\beta}{K}\tan\beta = \frac{\tan^3\beta}{K}$

XVII°) $y = x(ax+K) \qquad \tan\beta = \frac{y}{x} = ax + K \qquad x = \frac{\tan\beta - K}{a}$

$$y = \frac{(\tan\beta - K)^2}{a} + \frac{(\tan\beta - K)}{a}K \qquad y = \frac{(\tan\beta - K)}{a}\left[(\tan\beta - K) + K\right] = \frac{(\tan\beta - K)}{a}\tan\beta$$

XVIII°) $y^2 = x(x-K) \qquad x^2 - y^2 = xK \qquad \overline{OA}^2\cos 2\beta = \overline{OA}\cos\beta\ K \qquad \overline{OA} = \frac{K\cos\beta}{\cos 2\beta}$

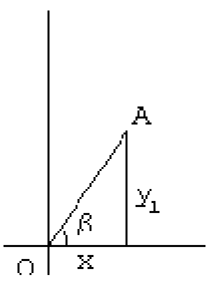
$$\begin{cases} \frac{K\cos\beta}{\cos 2\beta}\cos\beta = x \\ \frac{K\cos\beta}{\cos 2\beta}\sin\beta = y \end{cases}$$

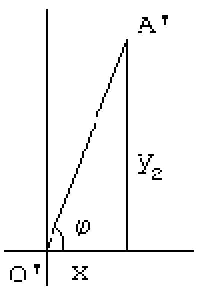
Nell'esempio che segue suddividiamo l'equazione data (rappresentanti le cubiche o parabole divergenti di Newton) in due figure:

XIX°)CUBICA 1

$$y^2 = x(x+a)(x+b)$$

dove (a) e (b) sono date (vedi il programma CAP.XIII PRG Cubica 1).
Consideriamo $y^2 = y_1 y_2$





1) $\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x \\ \overline{OA}\sin\beta = y_1 = x(x+a) \end{cases}$

2) $\begin{cases} \overline{O'A'}\cos\varphi = x \\ \overline{O'A'}\sin\varphi = y_2 = (x+b) \end{cases}$

Il caso 1) è una parabola ed è come il caso XVII°).
Il caso 2) è una retta, non per l'origine.

In 1) abbiamo $x=\tan\beta-a$ in 2) $\tan\varphi=\dfrac{x+b}{x}$ le cui eguaglianze in x, ci forniscono il legame tra gli angoli β e φ. Inoltre

$$y_1 = x\tan\beta = (\tan\beta-a)\tan\beta \qquad y_2 = x\tan\varphi = (\tan\beta-a)\frac{\tan\beta-a+b}{(\tan\beta-a)} = (\tan\beta-a+b)$$

Sostituendo nella Eq. Iniziale avremo i valori della x e della y, il tutto in funzione dell'angolo β:

$$\begin{cases} x=\tan\beta-a \\ y=\pm\sqrt{(\tan\beta-a+b)(\tan\beta-a)\tan\beta} \end{cases}$$ reali con discriminante≥0

XX°)CUBICA 2

$$y=(x+a)(x+b)(x+c)$$

Se a=b=c=0 si avrebbe il caso XV°).Facciamo $y=y_1y_2y_3$ e scriviamo:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x \\ \overline{OA}\sin\beta = y_1 = (x+a) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OA}'\cos\varphi = x \\ \overline{OA}'\sin\varphi = y_2 = (x+b) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OA}''\cos\varepsilon = x \\ \overline{OA}''\sin\varepsilon = y_3 = (x+c) \end{cases}$$

In queste Eq. Param. di Vag il valore della x è lo stesso per cui la relazione tra gli angoli sarà data dalla x delle formule:

$$\tan\beta=\frac{x+a}{x} \qquad \tan\varphi=\frac{x+b}{x} \qquad \tan\varepsilon=\frac{x+c}{x}$$

Mentre dalla prima eguaglianza, avendo supposto $a\neq 0$ otteniamo:

$$x=\frac{a}{\tan\beta-1}$$ e per sostituzione

$$y_1=\frac{a}{\tan\beta-1}+a \qquad y_2=\frac{a}{\tan\beta-1}+b \qquad y_3=\frac{a}{\tan\beta-1}+c$$

e la soluzione $y=y_1y_2y_3$ tutto in funzione dell'angolo beta.

Nel caso $y^2=y_1y_2y_3$ faremo $y=\pm\sqrt{y_1y_2y_3}$ (vedi PRG Cubica 2)

XXI°)CUBICA 3 $y=x^2(x+a)+x(x+b)$

Poniamo $y=y_1y_2+y_3$

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x \\ \overline{OA}\sin\beta = y_1 = (x+a) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OA}'\cos\varphi = x \\ \overline{OA}'\sin\varphi = y_2 = x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OA}''\cos\varepsilon = x \\ \overline{OA}''\sin\varepsilon = y_3 = x(x+b) \end{cases}$$

Anche qui tramite la x possiamo trovare la relazione tra gli angoli. Supposto $a\neq 0, b\neq 0$ abbiamo:

$$x=\left(\frac{a}{\tan\beta-1}\right)=\tan\varphi=\left[\frac{b}{\tan\varepsilon-1}\right]$$ e quindi

$$y_1=\left(\frac{a}{\tan\beta-1}+a\right)=\left(\frac{a}{\tan\beta-1}\right)\tan\beta \qquad y_2=\left(\frac{a}{\tan\beta-1}\right)^2 \qquad y_3=\left(\frac{a}{\tan\beta-1}\right)\cdot\left(\frac{a}{\tan\beta-1}+b\right)$$

oppure:

$$y_1 = \tan\varphi + a\ ;\quad y_2 = \tan^2\varphi\ ;\quad y_3 = (\tan\varphi + b)\tan\varphi$$

In entrambi i casi le figure sono identiche (vedi PRG Cubica3)

XXII°)CUBICA 4 $\quad y^2 + xy = x^2(x+a)$

$$\overline{OA}^2\sin^2\beta + \overline{OA}^2\sin\beta\cos\beta = \overline{OA}^2\cos^2(\overline{OA}\cos\beta + a)$$

$$\sin^2\beta + \sin\beta\cos\beta = \overline{OA}\cos^3\beta + a\cos^2\beta$$

$$\sin^2\beta + \sin\beta\cos\beta - a\cos^2\beta = \overline{OA}\cos^3\beta$$

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = \dfrac{\sin^2\beta + \sin\beta\cos\beta - a\cos^2\beta}{\cos^3\beta}\cos\beta = \tan^2\beta + \tan\beta - a = x \\ \overline{OA}\sin\beta = \dfrac{\sin^2\beta + \sin\beta\cos\beta - a\cos^2\beta}{\cos^3\beta}\sin\beta = y = x\tan\beta = \tan^3\beta + \tan^2\beta - a\tan\beta \end{cases}$$

(vedi PGR. CUBICA IV°)

XXIII°) Abbiamo visto precedentemente il caso di **somma o sottrazione di angoli** con:

$$\overline{OB}\cos(\alpha\pm\beta) = \overline{OB}(\cos\alpha\cos\beta \mp sen\alpha sen\beta)$$

$$\overline{OB}sen(\alpha\pm\beta) = \overline{OB}(sen\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha sen\beta)$$

Supponendo ora di sommare due Curve:

a) una circonf. $\begin{cases} \overline{OA_1}\cos\alpha = x_1 \\ \overline{OA_1}sen\alpha = y_1 \end{cases}$ b) una ellisse $\begin{cases} \overline{OA_2}\cos\beta = x_2 \\ \overline{OA_2}sen\beta = y_2 \end{cases}$

si avrà: $\overline{OB} = \overline{OA_1}\,\overline{OA_2}$ cioè $\begin{cases} \overline{OB}\cos(\alpha\pm\beta) = X = x_1x_2 \mp y_1y_2 \\ \overline{OB}sen(\alpha\pm\beta) = Y = y_1x_2 \pm x_1y_2 \end{cases}$

che traccia una figura che sembra un gasteropode.