

XVI. TANGENTI (DERIVATE) DEI PUNTI INTERNI

TANGENTI (derivate) DEI PUNTI INTERNI

Abbiamo visto nella ricerca precedente per gli insiemi come considerare il valore di $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 < 1$, per ottenere dei punti interni. Vediamo quale è la derivata di quei punti.

Sia l'Ellisse:

$$\begin{cases} x = q \cos \alpha_1 \\ y = m \cos \alpha_2 \end{cases} \quad \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = d \quad \text{dove il valore } d \text{ è una}$$

costante compresa tra $0 < d < 1$. Dunque possiamo anche scrivere

$\cos \alpha_2 = \pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1}$ dove dovrà essere $d \geq \cos^2 \alpha_1$ e quindi:

$$\begin{cases} x = q \cos \alpha_1 \\ y = m \left[\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1} \right] \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\alpha_1} = -q \sin \alpha_1 \\ \frac{dy}{d\alpha_1} = m \left[\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1} \right]' \end{cases}$$

La derivata di quest'ultima espressione è:

$$\frac{dy}{d\alpha_1} = m \frac{\cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1}}$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_1} = \frac{m}{q} \frac{\cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{(-\sin \alpha_1) \left[\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1} \right]} = \frac{m}{q} \frac{\cos \alpha_1}{\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1}} = \frac{m \cos \alpha_1}{q \cos \alpha_2}$$

Dove per $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$ si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{q} \frac{1}{\tan \alpha_1}$ (derivata dell'Ellisse)

Per $m=q=R$ è la tangente di una circonferenza.

Sia l'Iperbole:

$$\begin{cases} x = \frac{q}{\cos \alpha_1} \\ y = m \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \end{cases} \quad \text{da cui } \cos \alpha_2 = \pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1} \quad 0 < d < 1$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\alpha_1} = \frac{q \sin \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} \\ \frac{dy}{d\alpha_1} = m \left[\frac{\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1}}{\cos \alpha_1} \right]' \end{cases} ; \quad \frac{dy}{dx} = m \left[\frac{\left[\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1} \right] \cos \alpha_1 - [\cos \alpha_1]' \left(\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1} \right)}{\cos^2 \alpha_1} \right]$$

La derivata dell'ultima espressione: $\left[\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1} \right]' = \frac{\cos \alpha_1 \sin \alpha_1}{\pm \sqrt{d - \cos^2 \alpha_1}}$

$$\frac{dy}{dx} = m \left[\frac{\cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1 \cos \alpha_2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{d\alpha_1}{d\alpha_1} = m \left[\frac{\cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_1 \cos \alpha_2} \right] \quad \frac{\cos^2 \alpha_1}{q \sin \alpha_1} = \frac{m \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}{q \cos \alpha_2}$$

Dove per $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$ si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{q \sin \alpha_1}$ (derivata dell'Iperbole).

Siano le Parabole (p±x):

$$y = \frac{p}{1 \mp \cos \beta_1} \cos \beta_2 \quad x = \frac{p}{1 \mp \cos \beta_1} \cos \beta_1$$

$$\text{sapendo che } \cos \beta_2 = \pm \sqrt{d - \cos^2 \beta_1} \quad \text{e} \quad \left[\pm \sqrt{d - \cos^2 \beta_1} \right]' = \frac{\cos \beta_1 \sin \beta_1}{\pm \sqrt{d - \cos^2 \beta_1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\beta_1} &= p \frac{\left[\pm \sqrt{d - \cos^2 \beta_1} \right]' (1 \mp \cos \beta_1) - (\sin \beta_1) \left(\pm \sqrt{d - \cos^2 \beta_1} \right)}{(1 \mp \cos \beta_1)^2 \left(\pm \sqrt{d - \cos^2 \beta_1} \right)} = \\ &= p \frac{\sin \beta_1 \cos \beta_1 (1 \mp \cos \beta_1) - \sin \beta_1 (d - \cos^2 \beta_1)}{(1 \mp \cos \beta_1) \left(\pm \sqrt{d - \cos^2 \beta_1} \right)} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{d\beta_1} = p \frac{(-\sin \beta_1)(1 \mp \cos \beta_1) - \cos \beta_1 (+\sin \beta_1)}{(1 \mp \cos \beta_1)^2} = p \frac{-\sin \beta_1}{(1 \mp \cos \beta_1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{d\beta_1}{d\beta_1} = \frac{\cos \beta_1 (1 \mp \cos \beta_1) \mp (d - \cos^2 \beta_1)}{-\left(\pm \sqrt{d - \cos^2 \beta_1} \right)} = \frac{\cos \beta_1 \mp d}{-\cos \beta_2}$$

da cui le due tangenti:

$$\frac{\cos \beta_1 - d}{-\cos \beta_2} = \frac{d - \cos \beta_1}{\cos \beta_2} \quad \frac{\cos \beta_1 + d}{-\cos \beta_2} = -\frac{d + \cos \beta_1}{\cos \beta_2}$$

dove per $d=1$ si riavrebbero le tangenti delle due Parabole:

$$\frac{1 - \cos \beta_1}{\sin \beta_1} \quad -\frac{1 + \cos \beta_1}{\sin \beta_1}$$