II. I L P U N T O NELLO SPAZIO

IL PUNTO NELLO SPAZIO

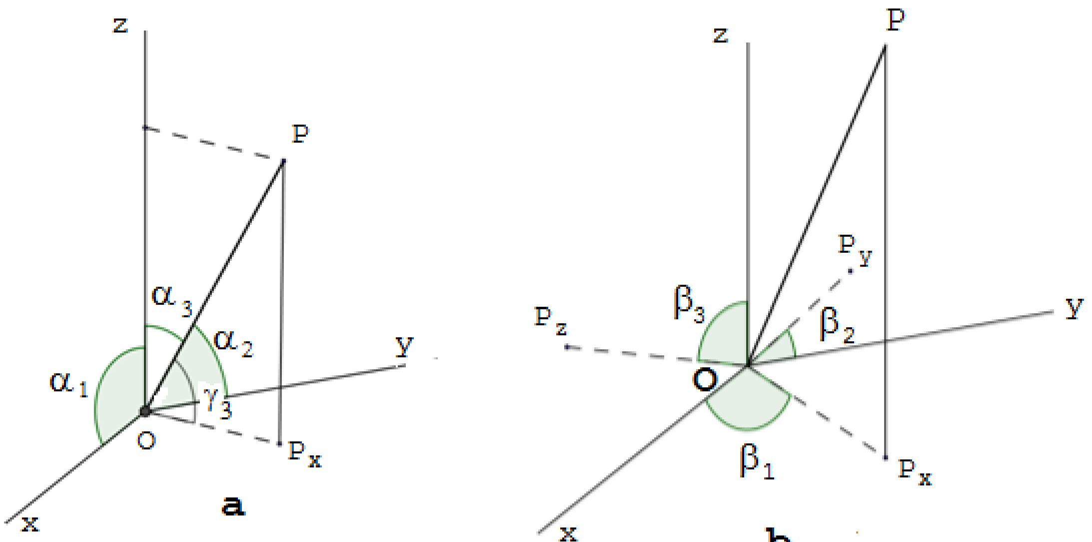

Fig.1

Sappiamo che $\overline{OP} = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3$ e' un Eq. di Vag in quanto

1a) $\begin{cases} \overline{OP}\cos\alpha_1 = x \\ \overline{OP}\cos\alpha_2 = y \\ \overline{OP}\cos\alpha_3 = z \end{cases}$ se $\begin{cases} \alpha_1 = 90 - \gamma_1 \\ \alpha_2 = 90 - \gamma_2 \\ \alpha_3 = 90 - \gamma_3 \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{OP}\,\text{sen}\,\gamma_1 = x \\ \overline{OP}\,\text{sen}\,\gamma_2 = y \\ \overline{OP}\,\text{sen}\,\gamma_3 = z \end{cases}$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = \text{sen}^2\gamma_1 + \text{sen}^2\gamma_2 + \text{sen}^2\gamma_3 = 1$$

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Siano P_x, P_y, P_z proiezioni di P sui piani coordinati:

1b) $\begin{cases} \overline{OP_x} = \sqrt{\overline{OP}^2 - z^2} = x\cos\beta_1 + y\,\text{sen}\,\beta_1 \\ \overline{OP_y} = \sqrt{\overline{OP}^2 - x^2} = y\cos\beta_2 + z\,\text{sen}\,\beta_2 \\ \overline{OP_z} = \sqrt{\overline{OP}^2 - y^2} = z\cos\beta_3 + x\,\text{sen}\,\beta_3 \end{cases}$ Eq.di Vag sui piani coord

$\begin{cases} \overline{OP_x}\cos\beta_1 = x \\ \overline{OP_x}\,\text{sen}\,\beta_1 = y \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{OP_y}\cos\beta_2 = y \\ \overline{OP_y}\,\text{sen}\,\beta_2 = z \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{OP_z}\cos\beta_3 = z \\ \overline{OP_z}\,\text{sen}\,\beta_3 = x \end{cases}$

$\overline{OP_x}\cos\beta_1 = \overline{OP_z}\,\text{sen}\,\beta_3$ $\overline{OP_y}\cos\beta_2 = \overline{OP_x}\,\text{sen}\beta_1$ $\overline{OP_z}\cos\beta_3 = \overline{OP_y}\,\text{sen}\,\beta_2$

Dalla figura si vede anche che:

1c) $\begin{cases} \overline{OP}sen\alpha_3 = \overline{OP}\cos\gamma_3 = \overline{OP_x} \\ \overline{OP}sen\alpha_1 = \overline{OP}\cos\gamma_1 = \overline{OP_y} \\ \overline{OP}sen\alpha_2 = \overline{OP}\cos\gamma_2 = \overline{OP_z} \end{cases}$ Ug. dove $\begin{cases} sen^2\alpha_1 + sen^2\alpha_2 + sen^2\alpha_3 = \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 2 \\ 2\overline{OP}^2 = \overline{OP_x}^2 + \overline{OP_y}^2 + \overline{OP_z}^2 \end{cases}$

cioè la somma dei quadrati delle proiezioni sui piani ortogonali e uguale a due volte il quadrato del segmento;

Inoltre $2\overline{OP}^2 = \overline{OP_x}\,\overline{OP}sen\alpha_3 + \overline{OP_y}\,\overline{OP}sen\alpha_1 + \overline{OP_z}\,\overline{OP}sen\alpha_2$

$$2\overline{OP} = \overline{OP_x}\operatorname{sen}\alpha_3 + \overline{OP_y}\operatorname{sen}\alpha_1 + \overline{OP_z}\operatorname{sen}\alpha_2 \quad \text{(Uguag.)}$$

e sostituendo OP di 1c) con 1a) dove è $(OP = \frac{z}{\cos\alpha_3} = \frac{x}{\cos\alpha_1} = \frac{y}{\cos\alpha_2})$

si avrà: $\begin{cases} z\tan\alpha_3 = \overline{OP_x} = \sqrt{x^2+y^2} \\ x\tan\alpha_1 = \overline{OP_y} = \sqrt{y^2+z^2} \\ y\tan\alpha_2 = \overline{OP_z} = \sqrt{z^2+x^2} \end{cases}$ **Ug.)

Per le condizioni viste in 1a),1b),1c), possiamo scrivere:

2a) $\begin{cases} \overline{OP}\cos\alpha_1 = x = \overline{OP_x}\cos\beta_1 = \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha_3\cos\beta_1 \\ \overline{OP}\cos\alpha_2 = y = \overline{OP_x}\operatorname{sen}\beta_1 = \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha_3\operatorname{sen}\beta_1 \\ \overline{OP}\cos\alpha_3 = z \end{cases}$

2b) $\begin{cases} \overline{OP}\cos\alpha_1 = x \\ \overline{OP}\cos\alpha_2 = y = \overline{OP_y}\cos\beta_2 = \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha_1\cos\beta_2 \\ \overline{OP}\cos\alpha_3 = z = \overline{OP_y}\operatorname{sen}\beta_2 = \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\beta_2 \end{cases}$

2c) $\begin{cases} \overline{OP}\cos\alpha_1 = x = \overline{OP_z}\operatorname{sen}\beta_3 = \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha_2\operatorname{sen}\beta_3 \\ \overline{OP}\cos\alpha_2 = y \\ \overline{OP}\cos\alpha_3 = z = \overline{OP_z}\cos\beta_3 = \overline{OP}\operatorname{sen}\alpha_2\cos\beta_3 \end{cases}$

2a) 2b) 2c) non sono che le trasformazioni da eq. Parametriche ad eq. Polari.

Sviluppando opportunamente le uguaglianze 1a),1b),1c) tra le altre considerazioni abbiamo le seguenti:

$$\tan\alpha_1 = \frac{\overline{OP_y}}{x} = \frac{\overline{OP_y}}{OP_x \cos\beta_1} = \frac{\overline{OP_y}}{OP_z sen\beta_3}$$

ma $\dfrac{\overline{OP_y}}{OP_x \cos\beta_1} \dfrac{sen\beta_1}{\cos\beta_2} \dfrac{1}{\cos\beta_1} = \dfrac{\tan\beta_1}{\cos\beta_2}$

oppure $\dfrac{OP_y}{OP_z sen\beta_3} = \dfrac{\cos\beta_3}{sen\beta_2} \dfrac{1}{sen\beta_3} = \dfrac{1}{\tan\beta_3 sen\beta_2}$

da cui ricavare l'importante relazione: $\dfrac{\tan\beta_1}{\cos\beta_2} = \dfrac{1}{\tan\beta_3 sen\beta_2}$

per cui $\|\tan\beta_1 \tan\beta_2 \tan\beta_3 = 1\|$

oltre $\begin{cases} \tan\alpha_1 = \dfrac{\tan\beta_1}{\cos\beta_2} \\ \tan\alpha_2 = \dfrac{\tan\beta_2}{\cos\beta_3} \\ \tan\alpha_3 = \dfrac{\tan\beta_3}{\cos\beta_1} \end{cases}$ $\quad \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\beta_3 = \dfrac{1}{\tan\alpha_1 \tan\alpha_2 \tan\alpha_3}$

Riducendo la 2a),2b),2c) abbiamo:

dalla 2a) $\begin{cases} \cos\alpha_1 = sen\alpha_3 \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 = sen\alpha_3 sen\beta_1 \\ \cos\alpha_3 = \cos\alpha_3 \end{cases}$ che sviluppata:

$$1 = (\sin\alpha_3 \cos\beta_1)\cos\alpha_1 + (\sin\alpha_3 \sin\beta_1)\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 \cos\alpha_3$$

$$1 - \cos^2\alpha_3 = \sin^2\alpha_3 = \sin\alpha_3(\cos\beta_1 \cos\alpha_1 + \sin\beta_1 \cos\alpha_2)$$

3a) $\sin\alpha_3 = \cos\beta_1 \cos\alpha_1 + \sin\beta_1 \cos\alpha_2$

E analogamente

3b) $\sin\alpha_1 = \cos\beta_2 \cos\alpha_2 + \sin\beta_2 \cos\alpha_3$

3c) $\sin\alpha_2 = \sin\beta_3 \cos\alpha_1 + \cos\beta_3 \cos\alpha_3$

Da cui:

$$\tan\beta_1 = \frac{y}{x} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \qquad \tan\beta_2 = \frac{z}{y} = \frac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_2} \qquad \tan\beta_3 = \frac{x}{z} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_3}$$

ESEMPI

I) Sfruttando le formule viste è possibile determinare un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ dando alcuni dei valori che abbiamo analizzato.In questo esempio sono date le tre proiezioni OP_x,OP_y,OP_z che abbiamo visto dare: $\overline{OP}=\sqrt{\dfrac{\overline{OP}_x^2+\overline{OP}_y^2+\overline{OP}_z^2}{2}}$ il cui valore è vero solo se

$$\overline{OP}_x<\overline{OP};\quad \overline{OP}_y<\overline{OP};\quad \overline{OP}_z<\overline{OP}$$

Nel caso che una delle proiezioni fosse uguale o maggiore di OP,le tre proiezioni non sono le proiezioni di uno stesso punto:quindi una delle tre è errata.Abbiamo visto:

da 1a) $\begin{cases} sin\,\alpha_3=\dfrac{\overline{OP_x}}{\overline{OP}} \\ sin\,\alpha_1=\dfrac{\overline{OP_y}}{\overline{OP}} \\ sin\,\alpha_3=\dfrac{\overline{OP_z}}{\overline{OP}} \end{cases}$ e $\begin{cases} cos\,\alpha_3=\sqrt{1-sin^2\,\alpha_3} \\ cos\,\alpha_1=\sqrt{1-sin^2\,\alpha_1} \\ cos\,\alpha_2=\sqrt{1-sin^2\,\alpha_2} \end{cases}$ da 1b) $\begin{cases} \overline{OP}\,cos\,\alpha_3=z_0 \\ \overline{OP}\,cos\,\alpha_1=x_0 \\ \overline{OP}\,cos\,\alpha_2=y_0 \end{cases}$

con il che resta determinato il punto $P(x_0,y_0,z_0;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

II) Sono Date le due proiezioni OP_x e OP_y e l'angolo β_1 (vedi Fig.1)tra OP_x e l'asse delle x. Faremo:

$\begin{cases} \overline{OP_x}\,cos\,\beta_1=x_0 \\ \overline{OP_x}\,sin\,\beta_1=y_0 \end{cases}$ e poi $\begin{cases} \overline{OP_y}\,cos\,\beta_2=y_0 \\ \overline{OP_y}\,sin\,\beta_2=z_0 \end{cases}$

Noti (x_0,y_0,z_0) è possibile determinare OP e i coseni direttori e quindi la posizione esatta di P.

III) DISTANZA DI DUE PUNTI. Siano i punti A e B:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha_1=a_1 \\ \overline{OA}\cos\alpha_2=a_2 \\ \overline{OA}\cos\alpha_3=a_3 \end{cases}\qquad \begin{cases} \overline{OB}\cos\varepsilon_1=b_1 \\ \overline{OB}\cos\varepsilon_2=b_2 \\ \overline{OB}\cos\varepsilon_3=b_3 \end{cases}$$

Dalla loro distanza per punti abbiamo

$$\overline{AB}^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\delta$$

Dove $\cos\delta=\cos\alpha_1\cos\varepsilon_1+\cos\alpha_2\cos\varepsilon_2+\cos\alpha_3\cos\varepsilon_3$ è l'angolo tra OA e OB

IV°) dalla Eq. di Vag di un punto:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha_1 = x \\ \overline{OA}\cos\alpha_2 = y \\ \overline{OA}\cos\alpha_3 = z \end{cases}$$ possiamo scrivere $$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha_1 = x \\ \overline{OA}^2(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3) = y^2 + z^2 \end{cases}$$

e poiché $\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 - \cos^2\alpha_1 = \sin^2\alpha_1 = \cos^2(90-\alpha_1)$ possiamo scrivere

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha_1 = x \\ \overline{OA}\sin\alpha_1 = \sqrt{y^2+z^2} \end{cases}$$ il cui significato è dato dalla Fig.2:

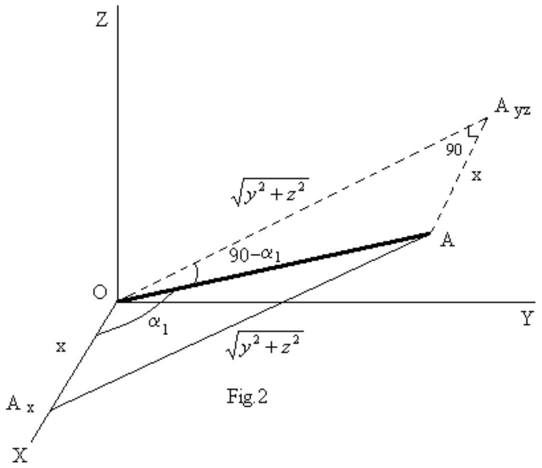

Fig.2

il segmento $\overline{OA_{yz}} = \overline{AA_x}$ è la proiezione OP_y di OA sul piano coordinato ZOY e come visto in **Ug) sappiamo che

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} = \frac{\overline{OPy}}{x} .$$

Tutti i segmenti in questione sono contenuti nel piano per l'asse x e OA: la retta OA_{yz} è l'intersezione del piano indicato con il piano ZOY.