

### **III. IL PIANO NELLO SPAZIO**

IL PIANO

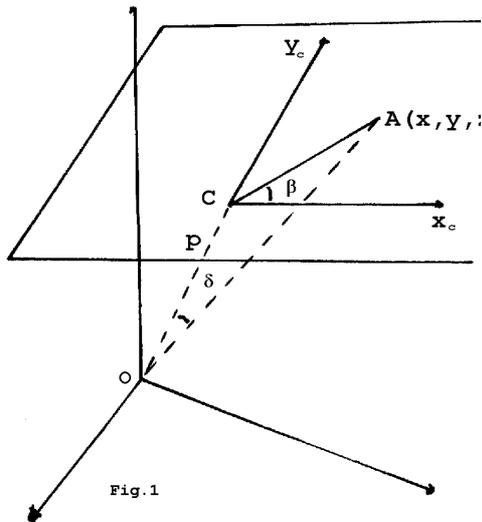


Fig.1

In un riferimento cartesiano di origine O sia il punto C(a,b,c) e coseni dir.  $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$  con  $OC=p$  (distanza del piano dall'origine). Sappiamo essere una Eq. di Vag:

$$1) \overline{OC} = p = a\cos\alpha_1 + b\cos\alpha_2 + c\cos\alpha_3$$

$$p^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

affinché un qualunque punto  $A(x, y, z; \cos\alpha'_1, \cos\alpha'_2, \cos\alpha'_3)$

appartenga al piano per C con  $\widehat{OCA} = 90^\circ$  basta che:

$$2) x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 = p \quad \text{Ug.}$$

E' anche Eq. di Vag:

$$3) x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 = OA$$

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha'_1 = x \\ \overline{OA}\cos\alpha'_2 = y \\ \overline{OA}\cos\alpha'_3 = z \end{cases}$$

ed inoltre:

$$4) \cos\widehat{AOC} = \cos\delta = (\cos\alpha'_1\cos\alpha_1 + \cos\alpha'_2\cos\alpha_2 + \cos\alpha'_3\cos\alpha_3)$$

Per tanto sostituendo nella 2) il secondo membro della 3) avrò la seguente Uguaglianza:

$$5) OA(\cos\alpha'_1\cos\alpha_1 + \cos\alpha'_2\cos\alpha_2 + \cos\alpha'_3\cos\alpha_3) = p \quad \text{Ug}$$

che sostituita dalla 4):

$$a) \begin{cases} \overline{OA}\cos\delta = p \\ \overline{OA}\sin\delta = \overline{CA} \end{cases} \quad b) \tan\delta = \frac{\overline{CA}}{p} \quad \overline{OA} = p\cos\delta + \overline{CA}\sin\delta$$

Eq. di Vag di un punto in un piano distante p dall'origine e poiché abbiamo  $0 \leq \delta \leq 90^\circ$  il valore p ed il valore CA saranno sempre positivi.

In quanto  $\overline{OA} = p\cos\delta + \overline{CA}\sin\delta$  e' una Eq. di Vag dovrà essere:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\delta = p \\ \overline{OA}\sin\delta = \overline{CA} \end{cases} \quad \cos^2\delta + \sin^2\delta = 1 \quad \overline{OA}^2 = \overline{CA}^2 + p^2$$

Comunque  $\overline{OA} = \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2}$

$$\begin{cases} \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2} \cos\alpha'_1 = x \\ \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2} \cos\alpha'_2 = y \\ \sqrt{\overline{CA}^2 + p^2} \cos\alpha'_3 = z \end{cases}$$

Da cui  $(\overline{CA}^2 + p^2)(\cos^2\alpha'_1 + \cos^2\alpha'_2) = (\overline{CA}^2 + p^2) \sin^2\alpha'_3$

$$\begin{cases} \sqrt{CA^2 + p^2} \sin^2 \alpha'_3 = (x^2 + y^2) \\ \sqrt{CA^2 + p^2} \cos^2 \alpha'_3 = z^2 \end{cases}$$

Può essere allora che sia CA = cerchio, ellisse, iperbole, ecc. cioè una figura rappresentata su quel piano.

Ad esempio se  $\frac{CA^2}{\cos^2 \beta} = \frac{q^2 + m^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}$  = Iperbole sarà:

$$x \cos \alpha'_1 + y \cos \alpha'_2 + z \cos \alpha'_3 = \left| \sqrt{\frac{q^2 + m^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} + p^2} \right| = |OA|$$

Se fosse  $\delta = \alpha_3$  perché  $p \equiv z$  avremmo il piano parallelo al piano  $x_0y_0$  e posto che le proiezioni su tale piano degli assi  $x_0, y_0$  siano coincidenti con gli assi  $x, y$  avremo anche che la proiezione di CA è coincide con  $OA_x$  riavremo il caso a) di 5).

(Per tracciare la figura basterà, per ogni terna di valori  $\alpha'_1; \alpha'_2; \alpha'_3$ , cercare un valore di  $\beta$  (essendo noto  $p$ ) per avere la distanza OA e quindi la figura).

\*\*\*\*\*

RICORDIAMO. In un riferimento cartesiano ortogonale per passare dall'equazione di un piano per punti a quella di un piano tramite i suoi coseni direttori dobbiamo ricordare che l'equazione:

$$a) \quad x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 = p \quad \text{con} \quad \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$$

è l'eq. di un piano dove  $p$  è la distanza del piano dall'origine.

Per contro l'equazione per punti rappresentante un piano è:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

e per ritrovare la equazione a) dividiamo per un' opportuno K:

$$\frac{A}{K}x + \frac{B}{K}y + \frac{C}{K}z + \frac{D}{K} = 0 \quad \text{e posto} \quad \frac{A}{K} = \cos \alpha_1; \quad \frac{B}{K} = \cos \alpha_2; \quad \frac{C}{K} = \cos \alpha_3; \quad \frac{D}{K} = -p$$

ci ritorna la a) con  $K = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$  mentre avremo la distanza  $p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Siano i punti  $A(x,y,z)(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$   $C(a,b,c)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  (come in fig. precedente) e come abbiamo visto

$$\begin{cases} OA \cos \delta = OC = p = a \cos \alpha_1 + b \cos \alpha_2 + c \cos \alpha_3 \\ OA \sin \delta = CA \end{cases}$$

E supponiamo ora che CA sia un segmento di una retta con cos. dir.  $(\cos \varepsilon_1, \cos \varepsilon_2, \cos \varepsilon_3)$  allora per quanto sappiamo possiamo scrivere:

$$\text{angolo } \widehat{CAO} = \cos(90 - \delta) = \sin \delta = (\cos \varepsilon_1 \cos \alpha'_1 + \cos \varepsilon_2 \cos \alpha'_2 + \cos \varepsilon_3 \cos \alpha'_3)$$

che moltiplicato per OA darà

$$OA \sin \delta = CA = x \cos \varepsilon_1 + y \cos \varepsilon_2 + z \cos \varepsilon_3$$

Si noti che essendo  $\widehat{OCA} = 90^\circ$  darà

$$\cos \varepsilon_1 \cos \alpha_1 + \cos \varepsilon_2 \cos \alpha_2 + \cos \varepsilon_3 \cos \alpha_3 = \cos 90 = 0$$

che moltiplicato per OC=p:

$$a \cos \varepsilon_1 + b \cos \varepsilon_2 + c \cos \varepsilon_3 = 0$$

Pertanto:

$$\begin{cases} OA \cos \delta = p = a \cos \alpha_1 + b \cos \alpha_2 + c \cos \alpha_3 = x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 \\ OA \sin \delta = \overline{CA} = x \cos \varepsilon_1 + y \cos \varepsilon_2 + z \cos \varepsilon_3 \end{cases}$$

Sono punti generici del piano tutti quei punti che danno le seguenti eguaglianze, in funzione della distanza del piano:

$$p = x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 = x_1 \cos \alpha_1 + y_1 \cos \alpha_2 + z_1 \cos \alpha_3 = \text{ecc.}$$

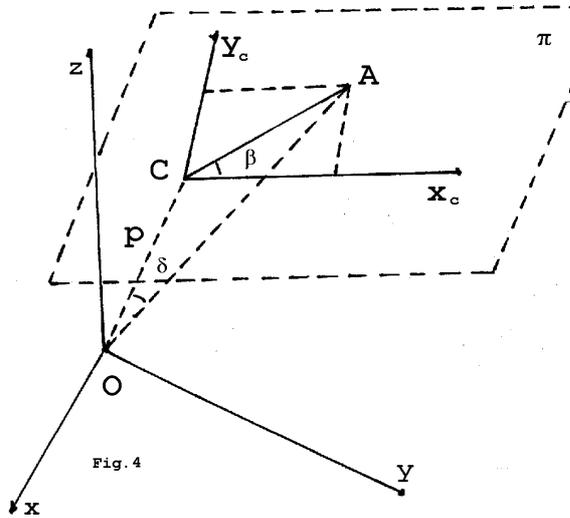
$$p^2 = xa + yb + zc = x_1 a + y_1 b + z_1 c = \text{ecc.}$$

E in coseni direttori:

$$p = \overline{OA} (\cos \alpha'_1 \cos \alpha_1 + \cos \alpha'_2 \cos \alpha_2 + \cos \alpha'_3 \cos \alpha_3) = \text{ecc.}$$

$$p^2 = \overline{OA} (a \cos \alpha'_1 + b \cos \alpha'_2 + c \cos \alpha'_3) = \text{ecc.}$$

Nella figura sotto sul piano  $\pi$   $OC\hat{A}=90^\circ$ , mentre il punto A e' governato da un riferimento cartesiano di origine C con coord.  $A(x_c, y_c)$  ed angolo  $\beta$ , mentre rispetto al riferimento cart. nello spazio abbiamo  $A(x, y, z; \alpha'_1; \alpha'_2; \alpha'_3)$  e  $C(c, b, c; \alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ .



Quale sar\`a, dunque, la relazione tra  $(x_c, y_c)$  e  $(x, y, z; \cos \alpha'_1, \cos \alpha'_2, \cos \alpha'_3)$  del punto A, avendo l'Eq. di Vag

$$\begin{cases} OA \cos \delta = p \\ OA \sin \delta = CA \end{cases} \quad |\overline{OA}| = p \cos \delta + \overline{CA} \sin \delta$$

Sia  $CA = x_c \cos \beta + y_c \sin \beta$

$$1) \begin{cases} CA \cos \beta = x_c \\ CA \sin \beta = y_c \end{cases} \begin{cases} (OA \sin \delta) \cos \beta = x_c \\ (OA \sin \delta) \sin \beta = y_c \end{cases}$$

Dalla Eq. di Vag sappiamo

$$\begin{cases} OA \cos \alpha'_1 = x \\ OA \cos \alpha'_2 = y \\ OA \cos \alpha'_3 = z \end{cases} OA = \frac{x}{\cos \alpha'_1} = \frac{y}{\cos \alpha'_2} = \frac{z}{\cos \alpha'_3} \text{ che sostituita in 1) dar\`a:}$$

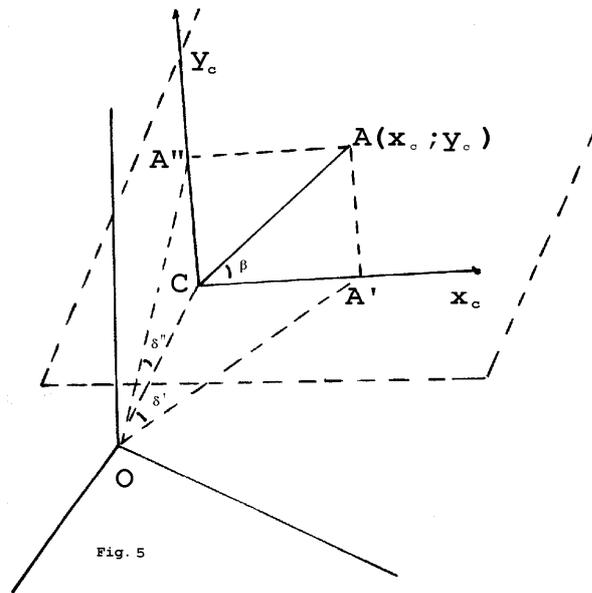
$$2) \begin{cases} x_c \cos \alpha'_1 = x \sin \delta \cos \beta \\ x_c \cos \alpha'_2 = y \sin \delta \cos \beta \\ x_c \cos \alpha'_3 = z \sin \delta \cos \beta \end{cases} \begin{cases} y_c \cos \alpha'_1 = x \sin \delta \sin \beta \\ y_c \cos \alpha'_2 = y \sin \delta \sin \beta \\ y_c \cos \alpha'_3 = z \sin \delta \sin \beta \end{cases}$$

La 2) da' la relazione che intercorre tra le varie coordinate e tra le Eq. di Vag che rappresentano i punti.

Se il segmento OC giace sull'asse z tale piano sar\`a parallelo al piano xOy e implicher\`a che  $\sin \delta = \sin \alpha'_3$  e quindi come proiezione possiamo far coincidere  $x_c$  con x e  $y_c$  con y:

$$\begin{cases} x_c \cos \alpha'_1 = x \sin \alpha'_3 \cos \beta \\ x_c \cos \alpha'_2 = y \sin \alpha'_3 \cos \beta \\ x_c \cos \alpha'_3 = z \sin \alpha'_3 \cos \beta \end{cases} \begin{cases} y_c \cos \alpha'_1 = x \sin \alpha'_3 \sin \beta \\ y_c \cos \alpha'_2 = y \sin \alpha'_3 \sin \beta \\ y_c \cos \alpha'_3 = z \sin \alpha'_3 \sin \beta \end{cases}$$

Dalla figura sotto, un piano distante  $p$  dall'origine, per quanto visto e posto  $\delta = \widehat{COA}$ :



$$\begin{cases} OA \cos \delta = p \\ OA \sin \delta = CA \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA' \cos \delta' = p \\ OA' \sin \delta' = CA' = x_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA'' \cos \delta'' = p \\ OA'' \sin \delta'' = CA'' = y_c \end{cases}$$

Fig. 5

$$CA = CA' \cos \beta + CA'' \sin \beta = x_c \cos \beta + y_c \sin \beta$$

$$1) CA = OA \sin \delta = (OA' \sin \delta') \cos \beta + (OA'' \sin \delta'') \sin \beta$$

$$(OA \sin \delta)^2 = (OA' \sin \delta')^2 + (OA'' \sin \delta'')^2$$

ed anche:  $CA = p \tan \delta$ ;  $x_c = CA' = p \tan \delta'$ ;  $y_c = CA'' = p \tan \delta''$

$$2) CA = (p \tan \delta') \cos \beta + (p \tan \delta'') \sin \beta \quad \begin{cases} CA \cos \beta = p \tan \delta \cos \beta = p \tan \delta' \\ CA \sin \beta = p \tan \delta \sin \beta = p \tan \delta'' \end{cases}$$

Qualunque possa essere il valore di  $p$  avremo:

$$3) \tan \delta = \tan \delta' \cos \beta + \tan \delta'' \sin \beta \quad \begin{cases} \tan \delta \cos \beta = \tan \delta' \\ \tan \delta \sin \beta = \tan \delta'' \end{cases} \quad \tan^2 \delta = \tan^2 \delta' + \tan^2 \delta''$$

$$4) \tan \beta = \frac{\tan \delta''}{\tan \delta'}$$

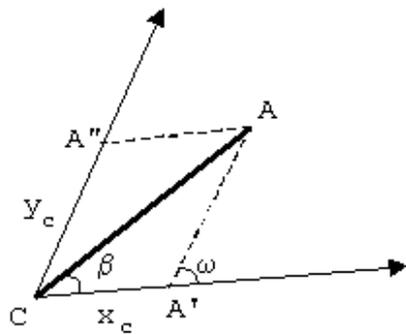


Fig. 6

Proseguendo nelle considerazioni fatte nella pagina precedente nel caso che il riferimento sul piano non sia ortogonale, come nella figura a lato, sappiamo come possiamo scrivere tale equazione:

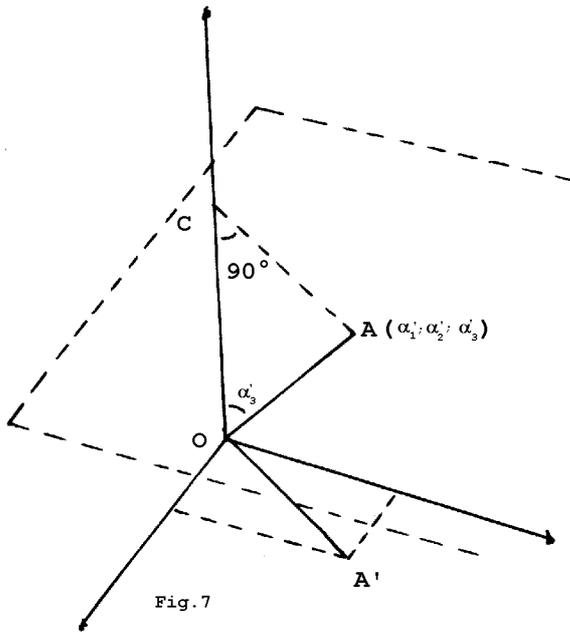
$$\begin{cases} \overline{CA} \cos \beta = x_c + y_c \cos \omega = CA' + CA'' \cos \omega \\ \overline{CA} \sin \beta = y_c \sin \omega = CA'' \sin \omega \end{cases}$$

$$\overline{CA}^2 = \overline{CA'}^2 + \overline{CA''}^2 + 2\overline{CA'}\overline{CA''} \cos \omega$$

$$\begin{cases} \overline{CA} \cos \beta = p \tan \delta \cos \beta = p \tan \delta' + p \tan \delta'' \cos \omega \\ \overline{CA} \sin \beta = p \tan \delta \sin \beta = p \tan \delta'' \sin \omega \end{cases}$$

$$\tan^2 \delta = \tan^2 \delta' + \tan^2 \delta'' + 2 \tan \delta' \tan \delta'' \cos \omega$$

dove  $\delta, \delta', \delta''$  sono quelli della pagina precedente.



Il piano parallelo al piano  $yOx$  e' dato da  $OC=p$  e dai coseni direttori di angoli:

$$\alpha_1 = 90^\circ; \alpha_2 = 90^\circ; \alpha_3 = 0$$

cioè:

$$\cos \delta = \cos \alpha'_1 \cos 90 + \cos \alpha'_2 \cos 90 + \cos \alpha'_3 \cos 0^\circ = \cos \alpha'_3$$

$$\begin{cases} OA \cos \alpha'_3 = p \\ OA \sin \alpha'_3 = CA \end{cases}$$

$$OA = p \cos \alpha'_3 + CA \sin \alpha'_3$$

Se lo stesso piano fosse per l'origine dovrebbe essere  $p=0$

$$OA' \cos \alpha'_3 = 0 \text{ quindi}$$

$$\cos \alpha'_3 = 0 \quad \alpha'_3 = 90^\circ \text{ e coinciderebbe}$$

con il piano  $yOx$ . Quindi i suoi

coseni dir. sarebbero stati  $(\cos \alpha'_1; \cos \alpha'_2; \cos \alpha'_3 = 0)$  cioè

$$\cos^2 \alpha'_1 + \cos^2 \alpha'_2 = 1$$

$$\begin{cases} \cos \alpha'_1 = \sin \alpha'_2 \\ \cos \alpha'_2 = \sin \alpha'_1 \end{cases}$$

$$\cos \alpha'_1 \cos \alpha'_2 = \sin \alpha'_1 \sin \alpha'_2$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 = 90^\circ$$

Dato un piano distante  $p$  di cos. dir.  $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$  e un suo punto  $A$  di cos.dir.  $(\cos\alpha'_1, \cos\alpha'_2, \cos\alpha'_3)$  esso e' rappresentato da

$$OA \cos \rho = p \quad \cos \rho = \cos \alpha_1 \cos \alpha'_1 + \cos \alpha_2 \cos \alpha'_2 + \cos \alpha_3 \cos \alpha'_3$$

Se  $C(c_1, c_2, c_3)$  e' l'estremo del punto  $p$  sappiamo

$$c_1 \cos \alpha_1 + c_2 \cos \alpha_2 + c_3 \cos \alpha_3 = p$$

ma  $OA \cos \rho = a \cos \alpha_1 + b \cos \alpha_2 + c \cos \alpha_3 = p$  e pertanto

$$(a - c_1) \cos \alpha_1 + (b - c_2) \cos \alpha_2 + (c - c_3) \cos \alpha_3 = 0 \quad (\text{espressione già nota})$$

Un qualunque altro piano  $X$  noto e' **parallelo** a quello per  $A$  se:

$$\cos \rho_x = \cos x \cos \alpha_1 + \cos y \cos \alpha_2 + \cos z \cos \alpha_3$$

$$OX \cos \rho_x = x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 = p'$$

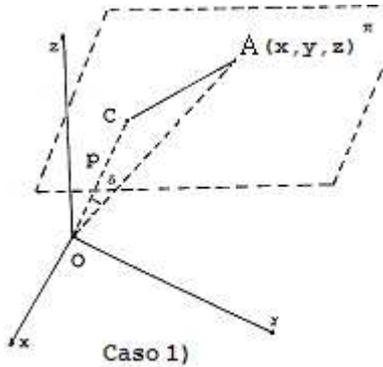
Mentre la distanza dei due piani e':

$$OA \cos \rho - OX \cos \rho_x = p - p'$$

IL PUNTO NEL PIANO

Sia un piano distante  $\overline{OC} = p(a, b, c; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dall'origine;  
 $A(x, y, z; \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$  un punto generico di tale piano; la retta  
 congiungente CA di coseni dir.  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ .

L'Eq. di Vag generica di tale punto (Vedi "IL PIANO") sar :

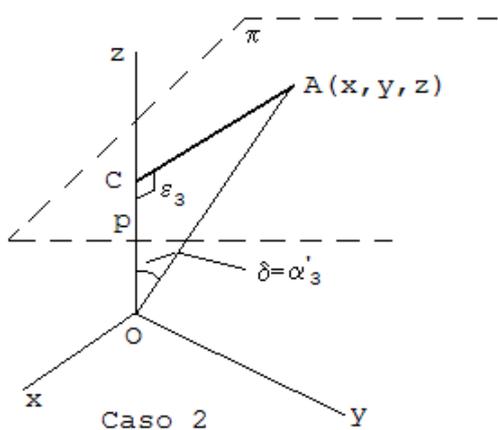


$$\overline{OA} = p \cos \delta + \overline{CA} \sin \delta$$

$$\cos \delta = \cos \alpha'_1 \cos \alpha_1 + \cos \alpha'_2 \cos \alpha_2 + \cos \alpha'_3 \cos \alpha_3$$

con le seguenti uguaglianze:

$$1) \text{ piano generico } \begin{cases} x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 = p \\ x \cos \epsilon_1 + y \cos \epsilon_2 + z \cos \epsilon_3 = \overline{CA} \end{cases}$$



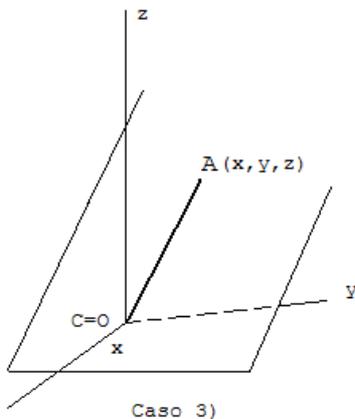
2) piano parallelo al piano  $xOy$ .

$$\begin{cases} z = p \\ x \cos \epsilon_1 + y \sin \epsilon_1 = \overline{CA} \end{cases} \quad OA = p \cos \alpha'_3 + \overline{CA} \sin \alpha'_3$$

$$C(0, 0, p; \alpha_1=90^\circ, \alpha_2=90^\circ, \alpha_3=0^\circ); \quad OC = p$$

$$\delta = \alpha'_3 \quad A = (x, y, p; \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$$

$$\epsilon_3 = 90^\circ \quad \cos^2 \epsilon_1 + \cos^2 \epsilon_2 = 1 \quad \cos \epsilon_2 = \sin \epsilon_1$$

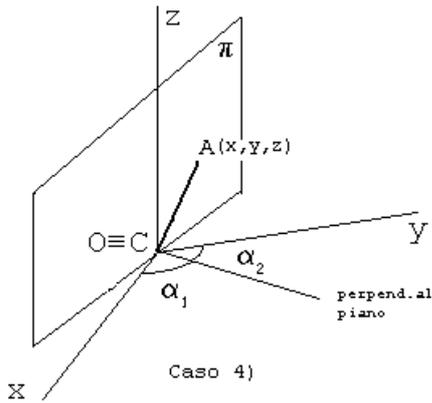


3) piano per 'origine

$$\begin{cases} x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3 = 0 \\ x \cos \alpha'_1 + y \cos \alpha'_2 + z \cos \alpha'_3 = \overline{CA} \end{cases}$$

poich   $OA \equiv CA$   $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ ;  $p=0$ ,

$\cos \delta = \cos 90^\circ$  e con  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  angoli della  
 perpendicolare al piano in  $O=C$  (non segnata  
 in figura):  $OA = p \cos 90^\circ + CA \sin 90^\circ = CA$



4) piano contenente l'asse z quindi anche per l'origine, pertanto si hanno le stesse condizioni del punto 3):

$$OA=CA \quad (\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \quad p=0,$$

Inoltre il piano è perpendicolare al piano coordinato xOy e la perpendicolare in  $O \equiv C$  a tale piano giace sul piano coordinato xOy e i suoi angoli sono  $(\alpha_1, \alpha_2)$  essendo  $\alpha_3=90^\circ$  per cui  $\cos^2 \alpha_1 = 1 - \cos^2 \alpha_2 = \sin^2 \alpha_2$ .

$$\begin{cases} x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 = 0 \\ x \cos \alpha'_1 + y \cos \alpha'_2 + z \cos \alpha'_3 = \overline{CA} = \overline{OA} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{CA} \cos \alpha'_1 = x \\ \overline{CA} \cos \alpha'_2 = y \\ \overline{CA} \cos \alpha'_3 = z \end{cases}$$

Variando  $\alpha_1$  avremo che il piano  $\pi$  girerà sull'asse z ed il punto A percorrerà, in questo caso, una circonferenza.

$$5) \text{ piano } xOy \quad \begin{cases} z = 0 \\ x \cos \varepsilon_1 + y \cos \varepsilon_2 + z \cos \varepsilon_3 = \overline{CA} \end{cases}$$

ECC.

PROIEZIONE DEI PUNTI DI UN PIANO SU UN PIANO COORDINATO

Sia il piano distante  $OC = p$  e un suo punto  $X(x, y, z; \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  secondo quanto visto nella pagina precedente si avrà:

$$OX = p \cos \delta + CX \sin \delta \quad \begin{cases} OX \cos \epsilon_1 = x \\ OX \cos \epsilon_2 = y \\ OX \cos \epsilon_3 = z \end{cases}$$

si consideri la sua proiezione  $X_x$  sul coordinato  $xOy$  (identico ragionamento vale per gli altri piani coordinati) avremo, come si è visto:

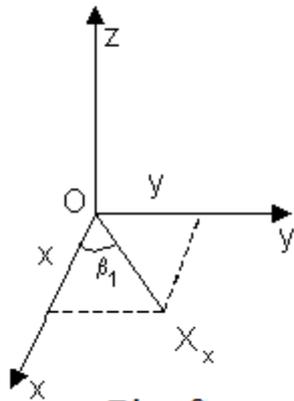


Fig.9a

$$\overline{OX_x}^2 = \overline{OX}^2 - z^2$$

$$\begin{cases} \overline{OX_x} \cos \beta_1 = x = \overline{OX} \cos \epsilon_1 \\ \overline{OX_x} \sin \beta_1 = y = \overline{OX} \cos \epsilon_2 \end{cases} \quad \tan \beta_1 = \frac{\cos \epsilon_2}{\cos \epsilon_1}$$

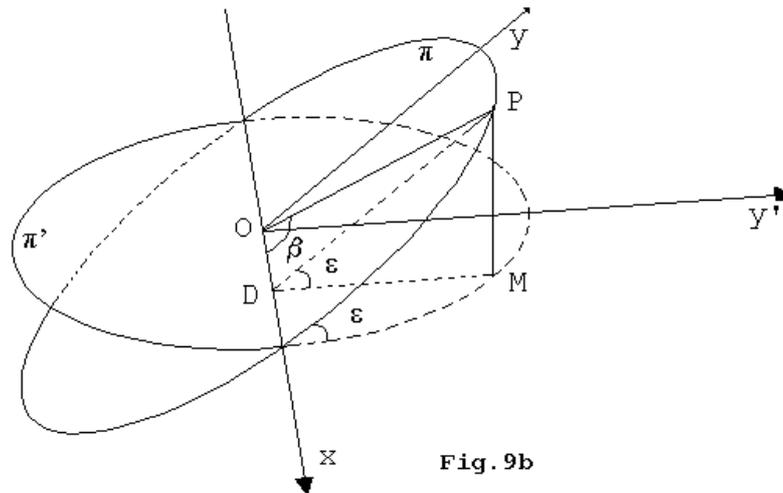
$$\overline{OX_x} = \overline{OX} \sqrt{(\cos^2 \epsilon_1 + \cos^2 \epsilon_2)} \quad \overline{OX} = \frac{\overline{OX_x}}{\sqrt{(\cos^2 \epsilon_1 + \cos^2 \epsilon_2)}}$$

$$\begin{cases} \overline{OX}^2 \cos^2 \delta = p^2 \\ \overline{OX}^2 \sin^2 \delta = \overline{CX}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (\overline{OX_x}^2 + z^2) \cos^2 \delta = p^2 \\ (\overline{OX_x}^2 + z^2) \sin^2 \delta = \overline{CX}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OX_x}^2 \cos^2 \delta = p^2 - z^2 \cos^2 \delta \\ \overline{OX_x}^2 \sin^2 \delta = \overline{CX}^2 - z^2 \sin^2 \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{OX} \cos \delta = \frac{\overline{OX_x}}{\sqrt{\cos^2 \epsilon_1 + \cos^2 \epsilon_2}} \cos \delta = p \\ \overline{OX} \sin \delta = \frac{\overline{OX_x}}{\sqrt{\cos^2 \epsilon_1 + \cos^2 \epsilon_2}} \sin \delta = \overline{CX} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OX_x} \cos \delta = p \sqrt{\cos^2 \epsilon_1 + \cos^2 \epsilon_2} \\ \overline{OX_x} \sin \delta = \overline{CX} \sqrt{\cos^2 \epsilon_1 + \cos^2 \epsilon_2} \end{cases}$$

Il punto  $X_x$  è dunque il proietto del punto generico  $X$  appartenente al piano distante  $OC = p$ .

PROIEZIONE DI UNA ELLISSE



Sul piano  $\pi$  sia l'Ellisse di semi assi  $q; m$  e assi coordinati  $x, y$ . Sia la sua proiezione sul piano  $\pi'$ , passante per il centro ed origine dell'Ellisse  $\pi$ ;  $\varepsilon$  l'angolo tra i due piani e  $y'$  proiezione di  $y$ .

Il punto  $M$  è la proiezione del generico punto  $P$  e  $D$  la proiezione di  $M$  sull'asse  $x$  (vedi figura); avremo:

$$\overline{DM} = \overline{DP} \cos \varepsilon = \overline{OP} \sin \beta \cos \varepsilon \quad \overline{OD} = \overline{OP} \cos \beta$$

$$\overline{OM}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{OD}^2 = (\overline{OP} \sin \beta \cos \varepsilon)^2 + (\overline{OP} \cos \beta)^2 \quad \text{da cui le due Eq. di Vag}$$

rappresentanti le due Ellisse ( $\beta'$  angolo  $MOx$ ):

$$1) \begin{cases} \overline{OP} \cos \beta = q \cos \alpha \\ \overline{OP} \sin \beta = m \sin \alpha \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \overline{OM} \cos \beta' = \overline{OD} = \overline{OP} \cos \beta = q \cos \alpha \\ \overline{OM} \sin \beta' = \overline{DM} = \overline{DP} \cos \varepsilon = \overline{OP} \sin \beta \cos \varepsilon = (m \sin \alpha) \cos \varepsilon \end{cases}$$

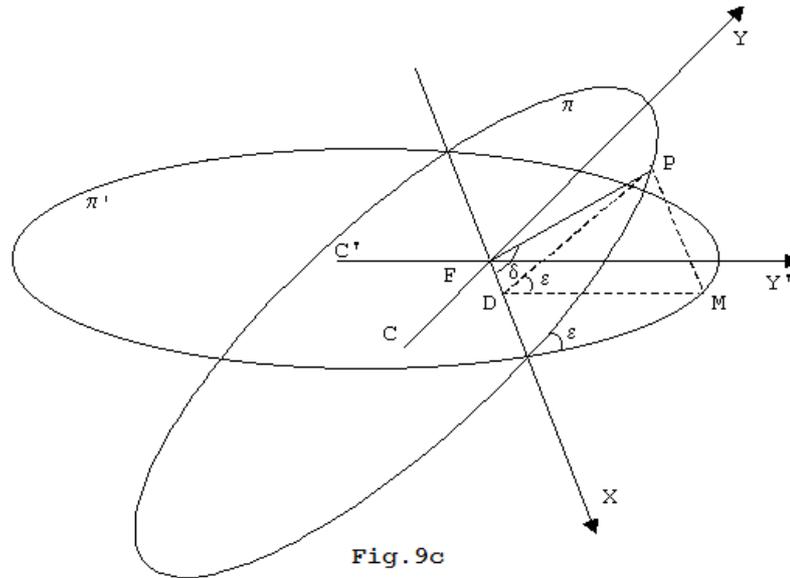
$$\tan \beta = \frac{m \sin \alpha}{q \cos \alpha}$$

$$\tan \beta' = \frac{m \sin \alpha}{q \cos \alpha} \cos \varepsilon = \tan \beta \cos \varepsilon$$

Per  $q=m$  e  $\cos \varepsilon \neq 1$  la 1) sarà una Circonferenza e la 2) una Ellisse

Per  $q < m$  e  $\cos \varepsilon = \frac{q}{m}$  la 1) sarà una Ellisse e la 2) una Circonferenza

Per  $q > m$  entrambi Ellisse.



Se l'origine del riferimento cartesiano delle Ellissi è nel Fuoco, i centri risulteranno ciascuno sul proprio piano, ma il procedimento sarebbe identico ed avremmo avuto (per  $O \equiv F$  e  $\delta$  angolo  $PFx$ ;  $\delta'$  angolo  $MFx$ )

$$1] \begin{cases} \overline{FP} \cos \delta = q(\cos \alpha - e) \\ \overline{FP} \sin \delta = m \sin \alpha \end{cases} \quad 2] \begin{cases} \overline{FM} \cos \delta' = q(\cos \alpha - e) \\ \overline{FM} \sin \delta' = (m \sin \alpha) \cos \epsilon \end{cases}$$

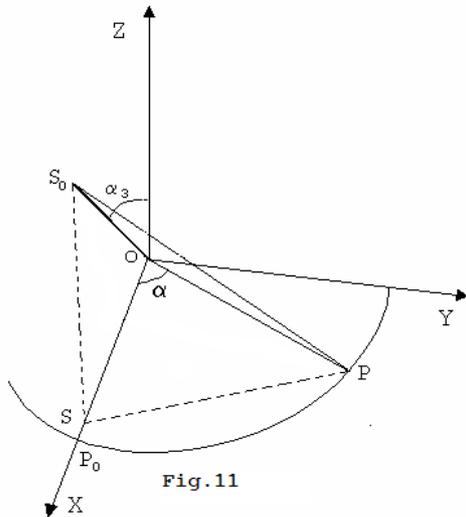
$$\tan \delta = \frac{m \sin \alpha}{q \cos \alpha - e} \quad \tan \delta' = \frac{m \sin \alpha}{q \cos \alpha - e} \cos \epsilon = \tan \delta \cos \epsilon$$

Per  $q=m$  (quindi eccentricità=0) e  $\cos \epsilon \neq 1$  la 1] sarà una Circonferenza di centro C, con Origine nel punto F, e la 2] una Ellisse di centro C' e Origine nel Fuoco.

Per  $q < m$  e  $\cos \epsilon = \frac{q}{m}$  analogamente come sopra la 1] sarà una Ellisse e la 2] una Circonferenza.

Per  $q > m$  entrambi Ellissi di centro C e C' e Origine nel fuoco F.

IL TEOREMA DEI PIANETI NELLO SPAZIO



Sia la circonferenza di centro O e perpendicolare Z (come in figura) su un piano e un punto S<sub>0</sub> fuori di tale piano, tale che la sua proiezione S cada entro la circonferenza in esame. Si conduca la congiungente OS ad intersecare la circonferenza nel punto P<sub>0</sub>, in modo che si formi il riferimento cartesiano ortogonale nello spazio XYZ. Sia OS = r, OP<sub>0</sub> = R e P un qualunque punto sulla circonferenza di angolo α con l'asse X.

Usando α anziché α/2, per il Teorema dei Pianeti sappiamo:

$$\begin{cases} \overline{SP} \cos \beta = (R+r) \cos \alpha \\ \overline{SP} \sin \beta = (R-r) \sin \alpha \end{cases} \quad * ] \quad \text{con } \tan \beta = \frac{R-r}{R+r} \tan \alpha$$

Inoltre 
$$\begin{cases} \overline{OS_0} \cos \alpha_3 = \overline{SS_0} = z \\ \overline{OS_0} \sin \alpha_3 = \overline{OS} = r \end{cases}$$

Vediamo anche: 
$$\overline{S_0P}^2 = \overline{SS_0}^2 + \overline{SP}^2 = z^2 + \overline{SP}^2 = (R+r)^2 \cos^2 \alpha + (R-r)^2 \sin^2 \alpha + z^2 = [(R+r)^2 + z^2] \cos^2 \alpha + [(R-r)^2 + z^2] \sin^2 \alpha$$

E per un opportuno β<sub>1</sub> anche:

$$\begin{cases} \overline{S_0P} \cos \beta_1 = \sqrt{(R+r)^2 + z^2} \cos \alpha \\ \overline{S_0P} \sin \beta_1 = \sqrt{(R-r)^2 + z^2} \sin \alpha \end{cases} \quad \text{posto} \quad \begin{cases} \sqrt{(R-r)^2 + z^2} = m_1 \\ \sqrt{(R+r)^2 + z^2} = q_1 \end{cases}$$

cioè una Ellisse di semiassi m < q e 
$$\tan \beta_1 = \frac{m_1}{q_1} \tan \alpha$$

Anche nello spazio dunque è valido il Teorema dei Pianeti già visto!

**TEOREMA DEI PIANETI.** Data una circonferenza, la distanza dei suoi punti da un qualunque punto fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, è la distanza di una ellisse.