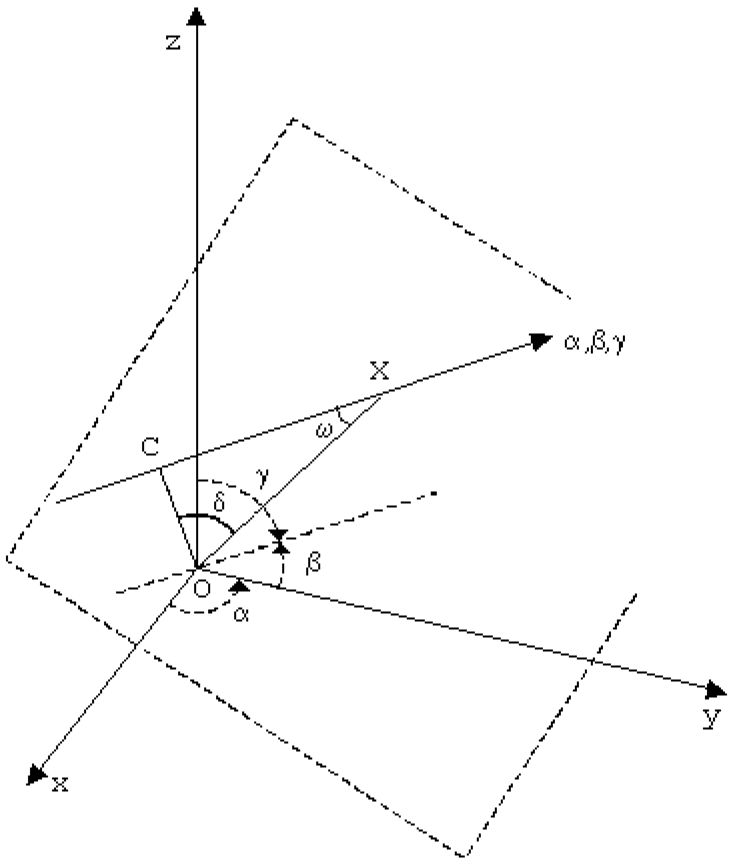
IV. L A R E T T A NELLO SPAZIO

LA RETTA E IL PIANO

Nella formulazione del piano generico si aveva che dato un punto X la distanza $\overline{CX}(\cos.\mathrm{dir.} = \alpha, \beta, \gamma)$ veniva ad essere il segmento della relativa retta r) di uguale cos.dir.
E' come dire che data una retta r) di cos. dir.$= \alpha, \beta, \gamma$ distante OC(a,b,c;cos.dir.=α_1;α_2;α_3) dall'origine, il punto X e' un suo punto e sono tutti punti di tale retta quelli che, nell'eq. generale del piano:

$$\overline{OX} = \overline{OC}\cos\delta + \overline{CX}sen\delta \qquad \begin{cases} \overline{OX}\cos\delta = a\cos\alpha_1 + b\cos\alpha_2 + c\cos\alpha_3 = p = \overline{OC} \\ \overline{OX}\sin\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \overline{CX} \end{cases}$$

hanno i coseni direttori (α, β, γ) **costanti**.
E' evidente che tutti i punti cosi' trovati appartengono sia alla retta sia al piano (di distanza OC) e che l'espressione di sopra rappresenta sia la retta $(\alpha, \beta, \gamma = \text{costanti})$ sia il piano $(\alpha, \beta, \gamma = \text{generici})$.



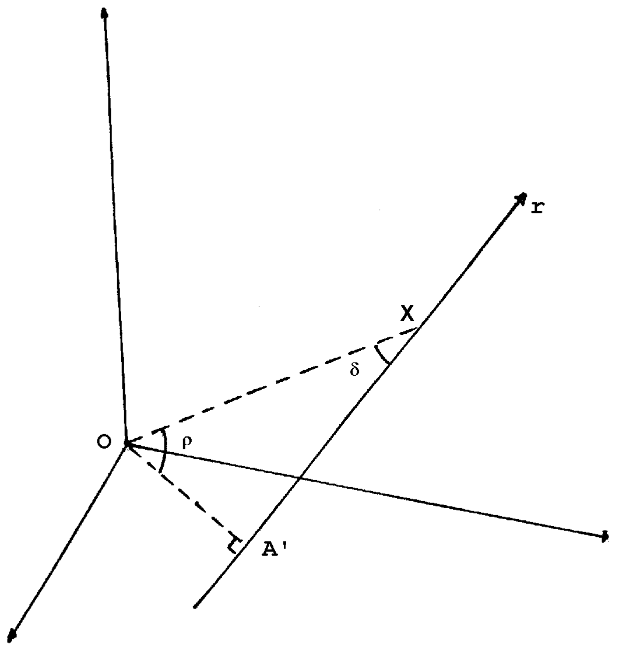
Il valore di α, β, γ riferiti alla retta ne danno la direzione e il verso (come indicato in figura).

Sia la retta r) di cos.dir.(α,β,γ).
Sia un suo punto $X(x,y,z;\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$.
Sia OA'=d la congiungente perpendicolare alla retta dall'origine, di cui $A'(a',b',c';\alpha'_1\,\alpha'_2\,\alpha'_3)$. Sara':

$$\cos\delta = \operatorname{sen}\rho = \cos\alpha_1\cos\alpha + \cos\alpha_2\cos\beta + \cos\alpha_3\cos\gamma$$

$$\cos O\hat{A}'X = 0 = \cos\alpha'_1\cos\alpha + \cos\alpha'_2\cos\beta + \cos\alpha'_3\cos\gamma$$

$$\operatorname{sen}\delta = \cos\rho = \cos\alpha'_1\cos\alpha_1 + \cos\alpha'_2\cos\alpha_2 + \cos\alpha'_3\cos\alpha_3$$



1) $\begin{cases} \overline{OX}\,\operatorname{sen}\delta = \overline{OA'} = d \\ \overline{OX}\,\cos\delta = \overline{A'X} \end{cases}$ Eq.di Vag.

$$\overline{OX} = \overline{A'X}\cos\delta + \overline{OA'}\operatorname{sen}\delta$$

Il punto A′ della retta è anche il punto C del piano le cui distanza è OA′ = OC. La retta è dunque rappresentata dal particolare piano in cui (α,β,γ) sono costanti e d=p.

Vediamo il valore di A′X segmento della retta r:

$$*)\ \overline{A'X} = (x-a')\cos\alpha + (y-b')\cos\beta + (z-c')\cos\gamma \qquad \text{Eq.di Vag}$$

Consideriamo:

$$a'\cos\alpha + b'\cos\beta + c'\cos\gamma = \overline{OA'}(\cos\alpha'_1\cos\alpha + \cos\alpha'_2\cos\beta + \cos\alpha'_3\cos\gamma) = \overline{OA'}\cos 90 = 0$$

quindi $\overline{A'X} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ ug. **1)**
tale ug. dà l’appartenenza di un qualunque punto X alla retta r(α,β,γ).

Per quanto visto del piano si avrà:

$$x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 = \overline{OA'} = a'\cos\alpha'_1 + b'\cos\alpha'_2 + c'\cos\alpha'_3$$

$$**)\quad (x-a')\cos\alpha'_1 + (y-b')\cos\alpha'_2 + (z-c')\cos\alpha'_3 = 0 \qquad \textit{Ug.(gia' nota)}$$

Dunque per la *) il punto A appartiene alla retta r(α,β,γ) e per la **) anche al piano che la contiene.

La 1) può essere scritta come Eq. di Vag esplicita, e rappresenta un generico **Punto X** di una retta:

$$\begin{cases} OX\cos\delta = A'X = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma & \text{(segmento della retta)} \\ OX\,\mathrm{sen}\,\delta = OA' = a'\cos\alpha'_1 + b'\cos\alpha'_2 + c'\cos\alpha'_3 = x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 \end{cases}$$

$$OX = A'X\cos\delta + OA'\,\mathrm{sen}\,\delta$$

$$OX = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\delta + (x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3)\,\mathrm{sen}\,\delta$$

Tale equazione rappresenta in generale un generico punto X appartenente al piano distante OA' dall'origine; ma se (α,β,γ) sono valori costanti e $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ sarà anche generico punto della retta $r(\alpha,\beta,\gamma)$ distante OA' dall'origine e giacente sul piano in questione.
Già sappiamo che una retta generica r) (α,β,γ) deve essere definita dalla sua distanza dall’origine.

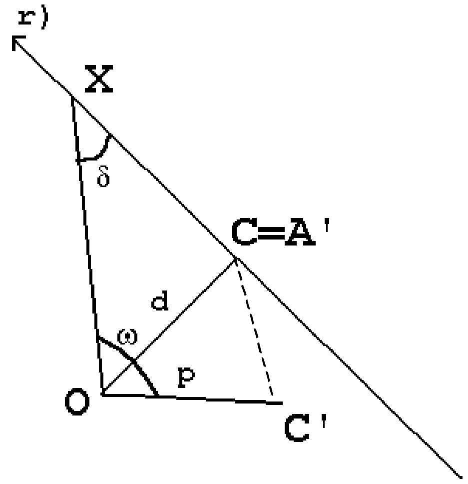
Si osservi che in generale per avere i **<u>coseni direttori</u>** di OA'=d o di una retta r(α,β,γ) per un punto $X(x,y,z;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, tenendo presente che XA’ vale *) Eq.di Vag della pagina precedente avremo i vari legami tra punti:

$$d = x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 \quad \text{Ug.}$$
$$d^2 = x\,a' + y\,b' + z\,c'$$

$$\begin{cases} A'X\cos\alpha = OX\cos\alpha_1 - d\cos\alpha'_1 = x - a' \\ A'X\cos\beta = OX\cos\alpha_2 - d\cos\alpha'_2 = y - b' \\ A'X\cos\gamma = OX\cos\alpha_3 - d\cos\alpha'_3 = z - c' \end{cases}$$

ed anche: $$\overline{A'X} = \frac{x-a'}{\cos\alpha} = \frac{y-b'}{\cos\beta} = \frac{z-c'}{\cos\gamma}$$

Fino adesso e nel proseguo abbiamo rappresentato la retta per definizione come giacente nel piano di eguale distanza dall’origine. Vediamola ora rispetto ad un piano generico che la contenga ma con distanza dall’origine diversa.
Sia la retta r) (α,β,γ) definita dalla sua distanza OA’=d (in coord. e cos. dir.) dove ogni suo punto è dato da:



1) $\begin{cases} OX \operatorname{sen}\delta = d \\ OX \cos\delta = A'X \end{cases}$

Si consideri ora il piano distante OC’=p (in coord.e cos.dir.) e contenente la retta r), potrò scrivere:

2) $\begin{cases} OX \cos\omega = p \\ OX \operatorname{sen}\omega = C'X \end{cases}$

I punti della 1) sono punti della 2) con OC’X=OC’A’=90.
Comunque dalla 2)abbiamo:

$\overline{C'X}^2 = \overline{OX}^2 - p^2 = d^2 + \overline{A'X}^2 - p^2$

pertanto la retta rispetto al nuovo piano distante p può essere scritta:

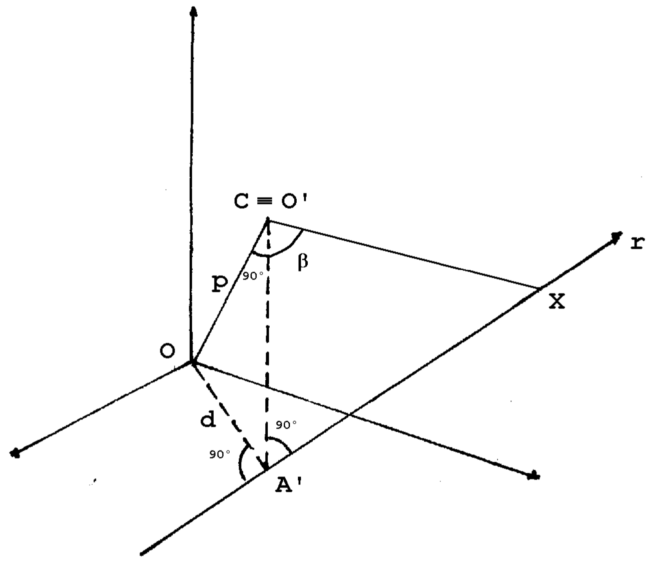
a) $\begin{cases} \overline{OX} \cos\omega = p \\ \overline{OX} \operatorname{sen}\omega = \pm\sqrt{d^2 + \overline{A'X}^2 - p^2} \end{cases}$ che rappresenta una retta contenuta in un generico piano distante OC’=p.

Si osservi che $\overline{OC}^2 = \overline{OC'}^2 + \overline{C'C}^2$ quindi $\overline{C'C}^2 = \overline{C'A'}^2 = d^2 - p^2$ essendo l’angolo CC’O = 90° se A’ è punto della retta e quindi del piano distante C’, il che vuol dire che tutti i piani contenenti la retta avranno distanza dall’origine O compresa tra $0 \le p \le d$.
Per p=0 il piano sarà per l’origine e nella a) $OX = \left|\sqrt{d^2 + \overline{A'X}^2}\right|$

Per p=d riavremo l’eq. della retta cioè del particolare piano contenente la retta, di eguale distanza dall’origine.
Dalla differenza dei quadrati di 1) e 2) si ottiene

$\overline{C'X}^2 - \overline{A'X}^2 = d^2 - p^2 = \overline{C'C}^2$ cioè in un qualunque piano è costante il quadrato della differenza tra la distanza di un qualunque punto X della retta da A’ e C’ (estremi delle distanze della retta e del piano in questione dall’origine): il che vuole dire che $\sqrt{d^2 + \overline{A'X}^2 - p^2} = \sqrt{\overline{A'X}^2 + \overline{CC'}^2} = \overline{C'X}$ come indicato nella 2)

OSSERVAZIONE



Data una retta per X distante dall'origine OA': tutti gli infiniti piani che la contengono hanno la prerogativa che la congiungente CA'(C estremo della distanza del piano dall'origine) e' PERPENDICOLARE alla retta in questione!

Infatti dato un qualunque OC=p (vedi figura) si avrà che:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA'}^2 - \overline{CA'}^2$$

ma anche

$O\hat{C}X = 90$ $\quad \overline{OC}^2 = \overline{OX}^2 - \overline{CX}^2 = \overline{OA'}^2 - \overline{CA'}^2$ (defin.di piano)

per cui: $\overline{CX}^2 = (\overline{OX}^2 - \overline{OA'}^2) + \overline{CA'}^2$

ma dalla retta sappiamo: $(\overline{OX}^2 - \overline{OA'}^2) = \overline{A'X}^2$

cioè $\overline{CX}^2 = \overline{A'X}^2 + \overline{CA'}^2$ per cui il triangolo A'CXA' è un triangolo rettangolo e $C\hat{A}'X = 90°$ qualunque possa essere il valore di OC.

Data una retta $r(\alpha,\beta,\gamma)$ e la sua distanza dall'origine in Eq. di Vag:

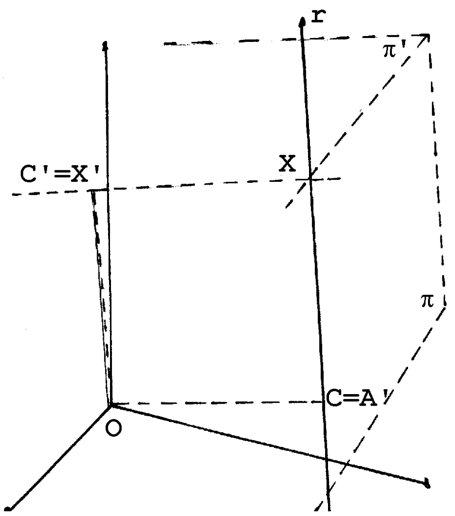
$$\overline{OA'} = d = a'\cos\alpha'_1 + b'\cos\alpha'_2 + c'\cos\alpha'_3$$

abbiamo visto che un qualunque punto X appartiene alla retta r)se:

$$a) \quad OX\cos\delta' = A'X = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

$$b) \quad OX\,\mathrm{sen}\,\delta' = d = x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3$$

dove il primo membro sappiamo essere una Eq. di Vag. Se leggiamo i secondi e terzi membri che sono Ug. deduciamo che:



la riga a) da' il punto X appartenente al piano π'e alla retta r).

la riga b) da il punto X appartenente al piano π.

Evidente che i due piani sono perpendicolari tra loro, essendo perpendicolari le loro distanze dall'origine OA' OX'.
Si osservi che e' $0 \le \delta' \le 90°$ essendo angolo interno di un triangolo retto.

Sappiamo che due piani non paralleli (figura sotto) si intersecano in una retta.
Siano i due piani di distanza:

$$\begin{cases} p = p_1 \cos\alpha_1 + p_2 \cos\alpha_2 + p_3 \cos\alpha_3 \\ p' = p'_1 \cos\alpha'_1 + p'_2 \cos\alpha'_2 + p'_3 \cos\alpha'_3 \end{cases} \quad \text{Eq. di Vag}$$

I punti X comuni ad entrambi i piani sono la retta:

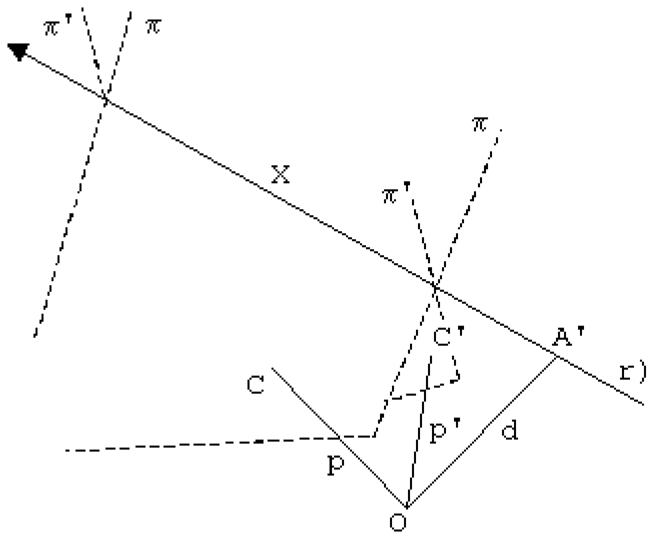
$$\begin{cases} p = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 \\ p' = x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 \end{cases} \quad \text{Uguag.}$$

Formeranno una retta anche i punti dei due piani:

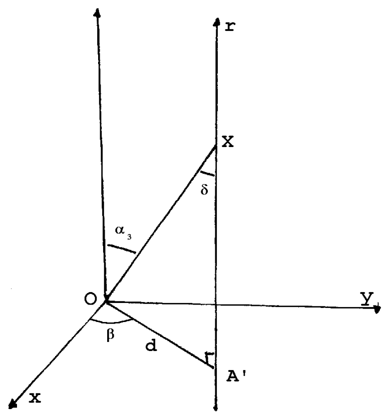
$$\begin{cases} p_1 = x\cos\alpha_1 + z\cos\alpha_3 & \text{perpendicolare ad XOZ con } \alpha_2 = 90° \\ p'_1 = y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3 & \text{" YOZ "} \quad \alpha_1 = 90° \end{cases}$$

$$\text{posto} \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1} = -m; \quad \dfrac{p_1}{\cos\alpha_1} = n \\ \dfrac{\cos\alpha_3}{\cos\alpha'_2} = -p; \quad \dfrac{p'_1}{\cos\alpha'_2} = q \end{cases} \qquad \text{avro'} \begin{cases} x = mz + n \\ y = pz + q \end{cases}$$

L'ultima espressione è quella generalmente data, tramite due piani, per rappresentare una retta per punti.



ESEMPIO 1



Sia la retta r) parallela all'asse z (come da figura) e distante OA'=d dall'origine. Tale distanza ovvio sarà sul piano xOy, pertanto i coseni direttori di OA'=d saranno (cosβ,senβ,cos90).
Se gli angoli direttori del punto X sono
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ed è $\alpha_3=\delta$, si avrà:

$$\begin{cases} \overline{OX}\cos\delta = OX\cos\alpha_3 = \overline{A'X} = z \\ \overline{OX}\,\text{sen}\,\delta = OX\,\text{sen}\,\alpha_3 = d \end{cases} \qquad \text{Eq di Vag}$$

ma
$$\begin{cases} d\cos\beta = x \\ d\,\text{sen}\,\beta = y \end{cases}$$

cioè
$$\begin{cases} (OX\,\text{sen}\,\alpha_3)\cos\beta = x \\ \;\text{"}\quad \text{sen}\,\beta = y \end{cases} \qquad \text{Eq.di Vag}$$

infine
$$\begin{cases} OX\cos\alpha_3 = OX\cos\delta = z \\ OX\cos\alpha_2 = (OX\,\text{sen}\,\alpha_3)\,\text{sen}\,\beta = y \\ OX\cos\alpha_1 = (OX\,\text{sen}\,\alpha_3)\cos\beta = x \end{cases} \qquad \text{Eq.di Vag}$$

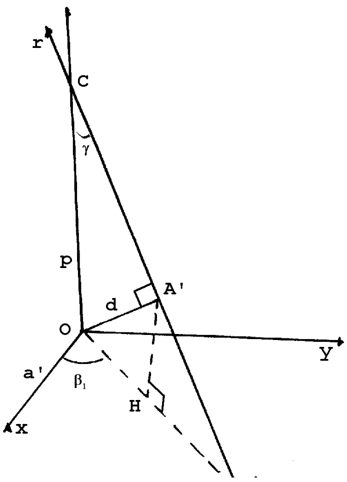
$$\overline{OX} = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 = x(\text{sen}\,\alpha_3\cos\beta) + y(\text{sen}\,\alpha_3\,\text{sen}\,\beta) + z\cos\alpha_3 \qquad \text{Eq. di Vag}$$

infatti è:

$$\alpha_3 = \delta; \qquad \cos\alpha_1 = \text{sen}\,\alpha_3\cos\beta; \qquad \cos\alpha_2 = \text{sen}\,\alpha_3\,\text{sen}\,\beta$$

$$\begin{cases} \cos^2\alpha_3 + (\text{sen}\,\alpha_3\cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha_3\,\text{sen}\,\beta)^2 = \cos^2\alpha_3 + \text{sen}^2\,\alpha_3 = 1 \\ \overline{OX}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

ESEMPIO 2



La retta r)(α,β,γ) interseca l'asse z in C(0,0,p), quindi OC = p, A’(a’,b’,c’;$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) $O\hat{C}A' = \gamma$.

$$\begin{cases} p\cos\gamma = \overline{CA'} \\ p\,\text{sen}\,\gamma = \overline{OA'} = d \end{cases} \qquad \text{Eq.di Vag}$$

$$\begin{cases} d\cos\alpha_1 = (p\,\text{sen}\,\gamma)\cos\alpha_1 = a' \\ d\cos\alpha_2 = (p\,\text{sen}\,\gamma)\cos\alpha_2 = b' \\ d\cos\alpha_3 = (p\,\text{sen}\,\gamma)\cos\alpha_3 = c' \end{cases} \qquad \text{Eq.di Vag}$$

$H\hat{O}A' = \gamma$ $\qquad H\hat{A}'O = 90 - \gamma$

OA'cos γ = d cos γ =
= (p sen γ)cos γ =
= CA'sen γ = OH

$$\begin{cases} \overline{OH}\cos\beta_1 = (p\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma)\cos\beta_1 = a' \\ \;\text{"}\;\; \text{sen}\,\beta_1 = \quad \text{"} \qquad\quad \text{sen}\,\beta_1 = b' \end{cases}$$

Tenuto conto che $C\hat{O}A' = 90 - \gamma = \alpha_3$; quindi $\cos\alpha_3 = \text{sen}\,\gamma$:

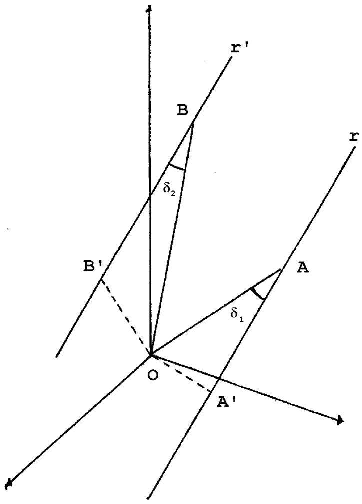
$$\begin{cases} (p\,\text{sen}\,\gamma)\cos\alpha_1 = p\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma\cos\beta_1 = a' \\ (p\,\text{sen}\,\gamma)\cos\alpha_2 = p\,\text{sen}\,\gamma\cos\gamma\,\text{sen}\,\beta_2 = b' \\ (p\,\text{sen}\,\gamma)\cos\alpha_3 = p\,\text{sen}\,\gamma\,\text{sen}\,\gamma = c' \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \cos\gamma\cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 = \cos\gamma\,\text{sen}\,\beta_1 \\ \cos\alpha_3 = \text{sen}\,\gamma \end{cases}$$

$\overline{OA'} = d = a'\cos\alpha'_1 + b'\cos\alpha'_2 + c'\cos\alpha'_3 = (a'\cos\beta_1 + b'\,\text{sen}\,\beta_1)\cos\gamma + c'\,\text{sen}\,\gamma$ Eq.di Vag

Pertanto un qualunque punto X apparterrà alla retta r) intersecante l'asse z, se, la sua Eq.di Vag già vista è:

$$\begin{cases} OX\,\cos\delta' = A'X = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \\ OX\,\text{sen}\,\delta' = d = (x\cos\beta_1 + y\,\text{sen}\,\beta_1)\cos\gamma + z\,\text{sen}\,\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{implicita: } OX = A'X\cos\delta' + d\,\text{sen}\,\delta' \\ \text{esplicita: } OX = (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\delta' + (x\cos\gamma\cos\beta_1 + y\cos\gamma\,\text{sen}\,\beta_1 + z\,\text{sen}\,\gamma)\,\text{sen}\,\delta' \end{cases}$$



Le rette r) e r') abbiano uguali cos.dir. $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
Sia il punto A(a,b,c,) di r) e il punto B(a_1, b_1, c_1) $(\cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3)$ appartenente alla retta r').

Si avranno le due equazioni:

$$\begin{cases} OA = AA'\cos\delta_1 + OA'\,\mathrm{sen}\,\delta_1 \\ OB = BA'\cos\delta_2 + OB'\,\mathrm{sen}\,\delta_2 \end{cases}$$

In quanto i coseni direttori delle rette r) e r') sono uguali posso affermare che le due rette sono parallele se distinte, altrimenti coincidenti.

Esse sono parallele e distinte se $OB' \neq OA'$

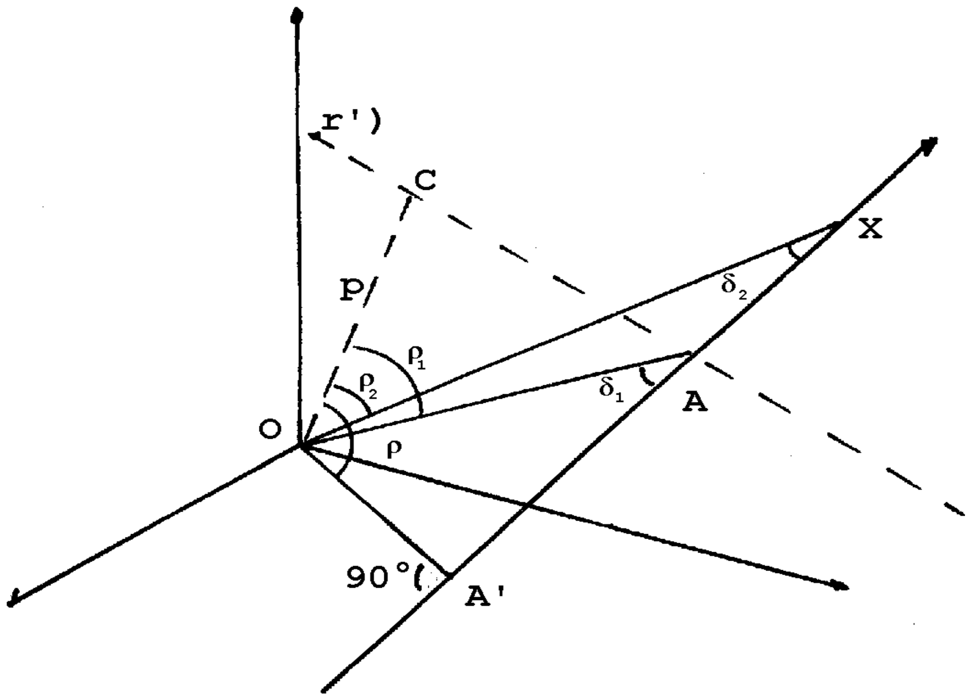
Se supponiamo invece: $|OB'| = |OA'|$ tali rette saranno:

PARALLELE E DISTINTE:
se i cos.dir. di OB' sono diversi dai cos.dir di OA'

COINCIDENTI:
se i cos.dir. di OB' sono uguali a quelli di OA'

RIEPILOGO

Data una retta r) di cos.dir. $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\delta)$
il punto A(a,b,c) $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$
" A'(a',b',c') $(\cos\alpha'_1, \cos\alpha'_2, \cos\alpha'_3)$
" C(c_1,c_2,c_3) $(\cos c_1 \cos c_2, \cos c_3)$
retta per CA=r' di cos.dir. $(\cos\alpha_c, \cos\beta_c, \cos\delta_c)$



	Con A si trova OA'o OC	Con OA' o OC possiamo scri- vere	Eq. di Vag generica di un punto X
RETTA Distanza dall'origine O: OA'=d	$\begin{cases} OA\cos\delta_1 = AA' \\ OA\,\text{sen}\,\delta_1 = OA' \end{cases}$	$\begin{cases} OA'\cos 90 = 0 \\ OA'\,\text{sen}\,90 = OA' \\ OA' = d \end{cases}$	$\begin{cases} OX\cos\delta_2 = XA' \\ OX\,\text{sen}\,\delta_2 = OA' \end{cases}$
PIANO Distanza dall'origine O: OC=p	$\begin{cases} OA\cos\rho_1 = OC \\ OA\,\text{sen}\,\rho_1 = CA \end{cases}$	$\begin{cases} OA'\cos\rho = OC \\ OA'\,\text{sen}\,\rho = CA' \\ OC = p \end{cases}$	$\begin{cases} OX\cos\rho_2 = OC \\ OX\,\text{sen}\,\rho_2 = CX \end{cases}$

Le Eq. di Vag generiche che tramite la loro distanza dall'origine, sia del piano sia della retta, sono simili (e divengono uguali se $OA' \equiv OC$ e $CA' \equiv r$ e quindi $\cos\rho_2 = \operatorname{sen}\delta_2,\ \operatorname{sen}\rho_2 = \cos\delta_2$) ove si pensi che ciascun punto della retta è punto del piano e che quest'ultimo non è che l'insieme di tali punti.

RETTA:

$$\begin{cases} OA\cos\delta_1 = AA' & \begin{cases} AA' = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma \quad (a'\cos\alpha + b'\cos\beta + c'\cos\gamma = 0) \\ \cos\delta_1 = \cos\alpha_1\cos\alpha + \cos\alpha_2\cos\beta + \cos\alpha_3\cos\gamma \end{cases} \\ OA\operatorname{sen}\delta_1 = OA' = d & \begin{cases} OA' = a'\cos\alpha'_1 + b'\cos\alpha'_2 + c'\cos\alpha'_3 = a\cos\alpha'_1 + b\cos\alpha'_2 + c\cos\alpha'_3 \\ \operatorname{sen}\delta_1 = \cos(90-\delta_1) = \cos\alpha_1\cos\alpha'_1 + \cos\alpha_2\cos\alpha'_2 + \cos\alpha_3\cos\alpha'_3 \end{cases} \end{cases}$$

$$OA = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\delta_1 + (a\cos\alpha'_1 + b\cos\alpha'_2 + c\cos\alpha'_3)\operatorname{sen}\delta_1$$

$$OA = \sqrt{(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)^2 + (a\cos\alpha'_1 + b\cos\alpha'_2 + c\cos\alpha'_3)^2} = AA'\cos\delta_1 + d\operatorname{sen}\delta_1$$

PIANO:

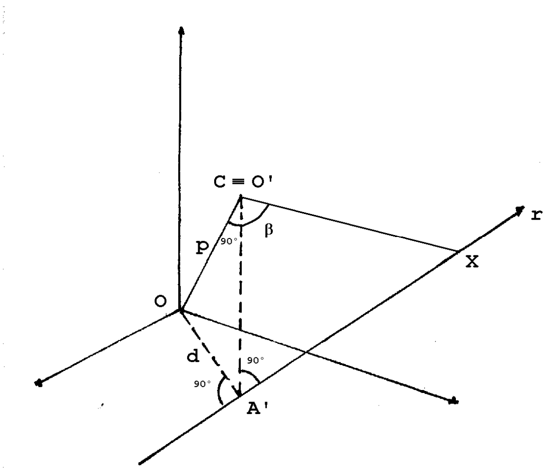
$$\begin{cases} OA\cos\rho_1 = OC = p & \begin{cases} OC = c_1\cos c_1 + c_2\cos c_2 + c_3\cos c_3 = a\cos c_1 + b\cos c_2 + c\cos c_3 \\ \cos\rho_1 = \cos\alpha_1\cos c_1 + \cos\alpha_2\cos c_2 + \cos\alpha_3\cos c_3 \end{cases} \\ OA\operatorname{sen}\rho_1 = CA & \begin{cases} CA = a\cos\alpha_c + b\cos\beta_c + c\cos\gamma_c;\ (c_1\cos\alpha_c + c_2\cos\beta_c + c_3\cos\gamma_c = 0) \\ \operatorname{sen}\rho_1 = \cos(90-\rho_1) = \cos\alpha_1\cos\alpha_c + \cos\alpha_2\cos\beta_c + \cos\alpha_3\cos\gamma_c \end{cases} \end{cases}$$

$$CA = (a-c_1)\cos\alpha_c + (b-c_2)\cos\beta_c + (c-c_3)\cos\gamma_c$$

$$OA = (a\cos c_1 + b\cos c_2 + c\cos c_3)\cos\rho_1 + (a\cos\alpha_c + b\cos\beta_c + c\cos\gamma_c)\operatorname{sen}\rho_1$$

$$OA = \sqrt{(a\cos c_1 + b\cos c_2 + c\cos c_3)^2 + (a\cos\alpha_c + b\cos\beta_c + c\cos\gamma_c)^2} = p\cos\rho_1 + CA\operatorname{sen}\rho_1$$

RETTA SU UN PIANO E SUOI PUNTI



Sia il piano distante OC=p con $C(c_1,c_2,c_3;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ e contenente la retta r)($\alpha_r,\beta_r,\gamma_r$) di distanza OA'=d con $A'(a',b',c';\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ e un suo punto $X(x,y,z;\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$
Poiché se la retta giace sul piano, anche il punto X giace su esso posso scrivere l'Eq. di Vag:

*] $$\begin{cases} CX\cos\beta = CA' \\ CX\text{ sen }\beta = XA' \end{cases}$$

$$CX = CA'\cos\beta + XA'\text{ sen }\beta$$

e (vedi Pag. 2) anche l'uguaglianza:

$$A'X = (x\cos\alpha_r + y\cos\beta_r + z\cos\gamma_r) \qquad \text{Ug.}$$

CA' e' la distanza della retta r) (sul piano distante OC) dal punto C considerato come origine di un sistema cartesiano piano, quindi positivo.

$$\vec{C}A' = \sqrt{OA'^2 - OC^2} = \sqrt{d^2 - p^2} = \sqrt{d^2 - d^2\cos^2 C\hat{O}A'} = d\text{ sen }C\hat{O}A'$$

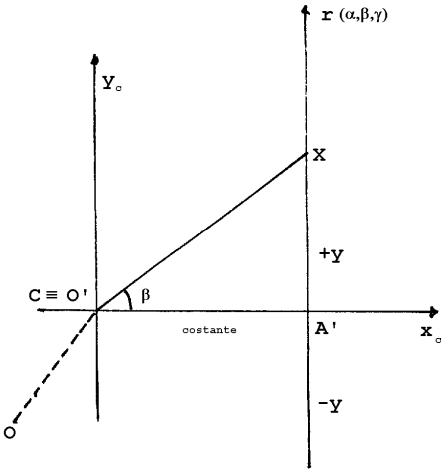
$$OA' = d = (a'\cos\alpha'_1 + b'\cos'_2 + c'\cos\alpha'_3) = (x\cos\alpha'_1 + y\cos'_2 + z\cos\alpha'_3)$$

$$OC = p = (c_1\cos\sigma_1 + c_2\cos\sigma_2 + c_3\cos\sigma_3) = (x\cos\sigma_1 + y\cos\sigma_2 + z\cos\sigma_3)$$

$$\cos C\hat{O}A' = \cos\alpha'_1\cos\sigma_1 + \cos\alpha'_2\cos\sigma_2 + \cos\alpha'_3\cos\sigma_3$$

Si ricordi inoltre che essendo C ≡ O' punto origine, avrò:

$$\left|\vec{C}A'\right| = \sqrt{(a'-c_1)^2 + (b'-c_2)^2 + (c'-c_3)^2} \quad \text{e i suoi cos. dir.} \quad \begin{cases} \left|\vec{C}A'\right|\cos\alpha' = a'-c_1 \\ \text{"} \quad \cos\beta' = b'-c_2 \\ \text{"} \quad \cos\gamma' = c'-c_3 \end{cases}$$



Quello che e' importante notare e' che il segmento CA' nel piano C e' una costante per quella tale retta e piano.

Pertanto al variare opportuno di β in *] avrò tutti i punti della retta r) su quel piano, una volta stabilito CA'.

Nella pagina precedente abbiamo visto che il punto X da':

$$d = x\cos\alpha'_1 + y\cos\alpha'_2 + z\cos\alpha'_3$$
$$p = x\cos\sigma_1 + y\cos\sigma_2 + z\cos\sigma_3$$

E' ovvio che se il punto C passa per l'origine O sarà p=0; e se e' la retta r) a passare per l'origine sarà p=0 d=0; l'uguaglianza tuttavia deve sussistere

$$CX = CA'\cos\beta + XA'\text{sen}\,\beta = \left|\sqrt{d^2 - p^2}\right|\cos\beta + (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\text{sen}\,\beta \qquad \text{Eq.di Vag} \ .$$

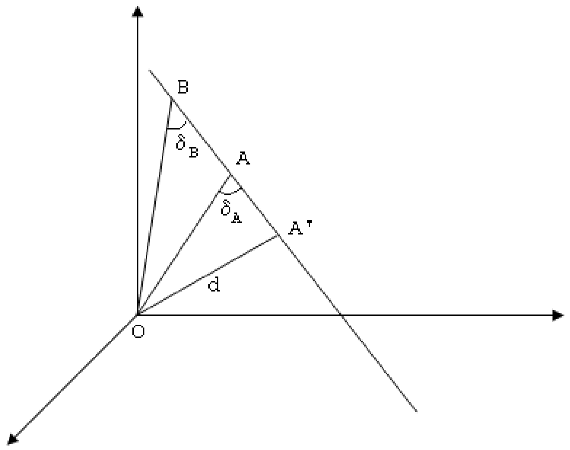
Si osservi che :

$$\left.\begin{array}{l} p^2 = xc_1 + yc_2 + zc_3 \\ d^2 = xa' + yb' + zc' \end{array}\right\} \ d^2 - p^2 = CA'^2 = x(a' - c_1) + y(b' - c_2) + z(c' - c_3)$$

Ed inoltre che dei tre dati OA'=d, OC=p, e i cos. dir.($\alpha_r,\beta_r,\gamma_r$) ne sono necessari almeno due. Solo nel caso che r) passi per C ≡ O' (d=p) e' necessario conoscere ($\alpha_r,\beta_r,\gamma_r$) per la eventuale risoluzione del problema.

RETTA PER DUE PUNTI ESEMPIO 3

Siano i due punti A(1,3,1;$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) B(2,0,0;$\beta_1,\beta_2,\beta_3$).
Avremo che $\overrightarrow{AB}(1,-3,-1)$ $\left|AB\right| = \sqrt{11}$; i coseni direttori di tale segmento della retta r(α,β,γ saranno:



$$\begin{cases} \overline{AB}\cos\alpha = 1 \\ \overline{AB}\cos\beta = -3 \\ \overline{AB}\cos\gamma = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{11}} = 0{,}301511344 \\ \cos\beta = \dfrac{-3}{\sqrt{11}} = -0{,}904534033 \\ \cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{11}} = -0{,}301511344 \end{cases}$$

L’angolo tra la retta e la distanza OA sarà

$$\cos\delta_A = \cos\alpha_1\cos\alpha + \cos\alpha_2\cos\beta + \cos\alpha_3\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}}\cdot\frac{-3}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{11}} =$$

$$= -\frac{9}{11} = -081818181; \qquad \delta_A = 144{,}9031988$$

$$\sin\delta_A = \sin 144{,}9031988 = 0{,}574959574$$

La distanza della retta sarà dunque:

$$d = \overline{OA}\sin\delta_A = \sqrt{11}\sin 144{,}9031988 = 1{,}906925177 .$$

Allo stesso modo possiamo trovare –d- tramite il punto B e la sua distanza $\overline{OB}^2 = 2^2$ $\overline{OB} = 2$: l’angolo tra OB e la retta è:

$$\cos\delta_B = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{11}} = 0{,}301511344 \qquad \delta_B = 72{,}45159942 \qquad d = 2\cdot\sin 72{,}45159942 = 1{,}906925177.$$

Le coordinate del punto A’(a’,b’,c’) possono essere ricavate dalla distanza $\overline{A'X}$ di un qualunque punto con la formula:

$$\begin{cases} a' = x - \overline{A'X}\cos\alpha \\ b' = y - \overline{A'X}\cos\beta \\ c' = z - \overline{A'X}\cos\gamma \end{cases}$$

Nel nostro caso fatto $AA' = \sqrt{\overline{OA}^2 - d^2}$ e $BA' = \sqrt{\overline{OB}^2 - d^2}$ e noti $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ si ha la soluzione del sistema.