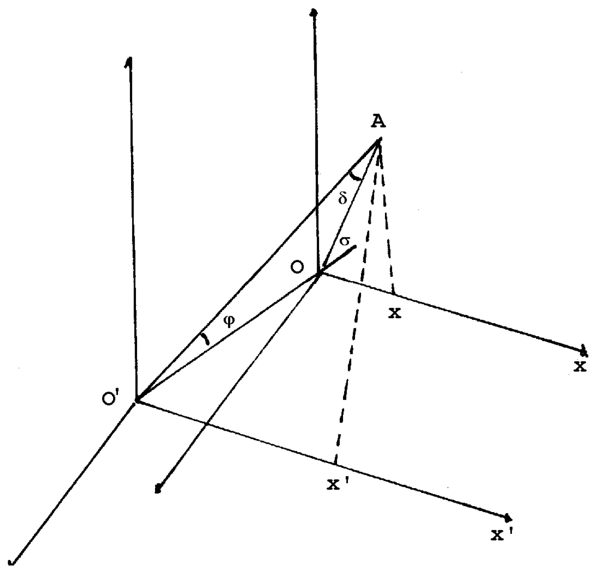
V. TRASLAZIONE ROTAZIONE NELLO SPAZIO

TRASLAZIONE



La nuova origine O ha coseni direttori
$(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0); OA(\alpha, \beta, \gamma); O'A(\alpha', \beta', \gamma')$

$$\overline{OA} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$
$$\overline{O'A} = x'\cos\alpha' + y'\cos\beta' + z'\cos\gamma'$$

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha = x \\ \overline{OA}\cos\beta = y \\ \overline{OA}\cos\gamma = z \end{cases}$$

$$x' = x + \overline{OO'}\cos\alpha_0$$
$$y' = y + \overline{OO'}\cos\beta_0$$
$$z' = z + \overline{OO'}\cos\gamma_0$$

$$\begin{cases} \overline{O'A}\cos\alpha' = y' = x + \overline{OO'}\cos\alpha_0 = \overline{OA}\cos\alpha + \overline{OO'}\cos\alpha_0 \\ \overline{O'A}\cos\beta' = y' = y + \overline{OO'}\cos\beta_0 = \overline{OA}\cos\beta + \overline{OO'}\cos\beta_0 \\ \overline{O'A}\cos\gamma' = z' = z + \overline{OO'}\cos\gamma_0 = \overline{OA}\cos\gamma + \overline{OO'}\cos\gamma_0 \end{cases}$$

$$\overline{O'A} = (OA\cos\alpha + OO'\cos\alpha_0)\cos\alpha' + (OA\cos\beta + OO'\cos\beta_0)\cos\beta' + (OA\cos\gamma + OO'\cos\gamma_0)\cos\gamma' =$$
$$= OA(\cos\alpha'\cos\alpha + \cos\beta'\cos\beta + \cos\gamma'\cos\gamma) + OO'(\cos\alpha'\cos\alpha_0 + \cos\beta'\cos\beta_0 + \cos\gamma'\cos\gamma_0)$$

$$*\,\overline{O'A} = OA\cos\delta + OO'\cos\varphi\,*$$

posto quindi: $\cos\sigma = \cos\alpha_0\cos\alpha + \cos\beta_0\cos\beta + \cos\gamma_0\cos\gamma$ per cui $\sigma = \varphi + \delta$
cioe' $\overline{O'A} = OA\cos(\sigma - \varphi) + OO'\cos(\sigma - \delta)$ che sviluppata con la regola del Parallelogramma che conosciamo darà:

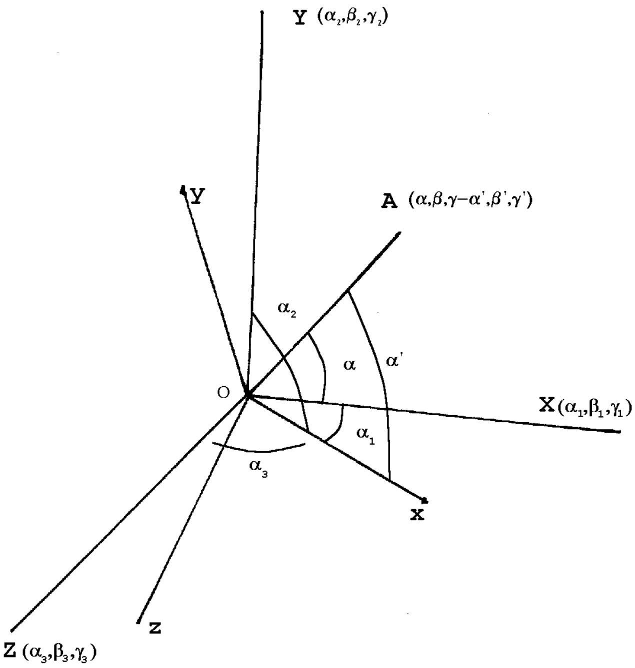
$$\begin{cases} \overline{O'A}\cos\sigma = OA\cos\varphi + OO'\cos\delta \\ \overline{O'A}sen\sigma = OAsen\varphi + OO'\,sen\delta \end{cases} \qquad \tan\sigma = \frac{OAsen\varphi + O'Osen\delta}{OA\cos\varphi + O'O\cos\delta}$$

Oppure applicando Carnot avrò:

$$\overline{O'A}^2 = \overline{O'O}^2 + \overline{OA}^2 + 2\overline{O'O}\,\overline{OA}\cos(\varphi + \delta) = \overline{O'O}^2 + \overline{OA}^2 + 2\overline{O'O}\,\overline{OA}\cos\sigma$$

ROTAZIONE

Dati i cos.dir. di X,Y,Z rispetto al riferimento Oxyz come da figura, sia:



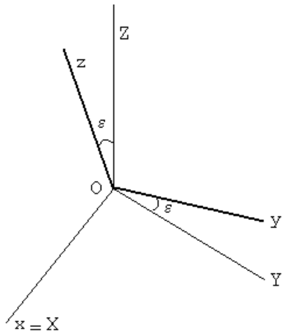
$$\overline{OA} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma \qquad \overline{OA} = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'$$

Sarà:

$$*]\quad \begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha' = x = X\cos\alpha_1 + Y\cos\alpha_2 + Z\cos\alpha_3 \\ \overline{OA}\cos\beta' = y = X\cos\beta_1 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\beta_3 \\ \overline{OA}\cos\gamma' = z = X\cos\gamma_1 + Y\cos\gamma_2 + Z\cos\gamma_3 \end{cases}$$

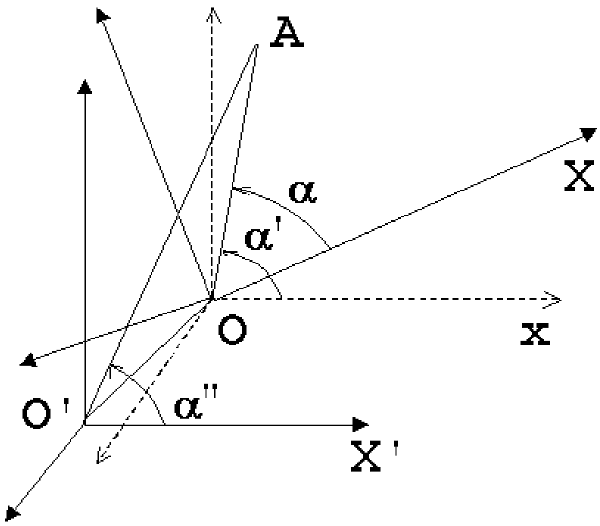
$$\begin{aligned} \overline{OA} = {} & X(\cos\alpha_1\cos\alpha' + \cos\beta_1\cos\beta' + \cos\gamma_1\cos\gamma') + \\ & + Y(\cos\alpha_2\cos\alpha' + \cos\beta_2\cos\beta' + \cos\gamma_2\cos\gamma') + \\ & + Z(\cos\alpha_3\cos\alpha' + \cos\beta_3\cos\beta' + \cos\gamma_3\cos\gamma') = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma \end{aligned}$$

Nell’esempio di figura sotto (rotazione di un ε intorno all’asse x) utilizzando la *] di sopra abbiamo:



$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha' = x = X\cos 0° + Y\cos 90 + Z\cos 90 = X \\ \overline{OA}\cos\beta' = y = X\cos 90 + Y\cos\varepsilon + Z\cos(90-\varepsilon) = Y\cos\varepsilon + Z\operatorname{sen}\varepsilon \\ \overline{OA}\cos\gamma' = z = X\cos 90 + Y\cos(90+\varepsilon) + Z\cos\varepsilon = Z\cos\varepsilon - Y\operatorname{sen}\varepsilon \end{cases}$$

ROTO-TRASLAZIONE



Distanza OO' ($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$)

Punto A:

$$\begin{cases} \text{in O}:(X,Y,Z)\alpha,\beta,\gamma; \quad (x,y,z)\alpha',\beta',\gamma' \\ \text{in O'}:(X',Y',Z')\alpha'',\beta'',\gamma'' \end{cases}$$

In Figura è tracciato solo X,x,X' per semplicità.

$$OA = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$$
$$OA = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'$$
$$O'A = X'\cos\alpha'' + Y'\cos\beta'' + Z'\cos\gamma''$$

$$\begin{cases} \text{asse OX rispetto O'}(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1) \\ \text{"} \quad \text{OY} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2) \\ \text{"} \quad \text{OZ} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3) \end{cases}$$

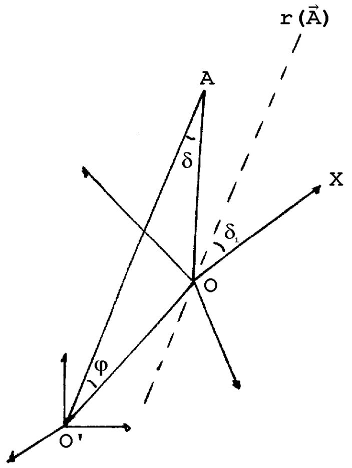
Oxyz e O'X'Y'Z' sono traslati tra loro per cui gli assi (X' e x),(Y' e y), (Z' e z) hanno rispettivamente gli stessi coseni direttori.

*) $$\begin{cases} O'A\cos\alpha'' = X' = OO'\cos\alpha_0 + (X\cos\alpha_1 + Y\cos\alpha_2 + Z\cos\alpha_3) \\ O'A\cos\beta'' = Y' = OO'\cos\beta_0 + (X\cos\beta_1 + Y\cos\beta_2 + Z\cos\beta_3) \\ O'A\cos\gamma'' = Z' = OO'\cos\gamma_0 + (X\cos\gamma_1 + Y\cos\gamma_2 + Z\cos\gamma_3) \end{cases} \qquad \text{Eq. di Vag}$$

Questa Eq. di Vag sviluppata:

a*) $$\begin{aligned} O'A = {} & OO'(\cos\alpha_0\cos\alpha'' + \cos\beta_0\cos\beta'' + \cos\gamma_0\cos\gamma'') + \\ & + X(\cos\alpha_1\cos\alpha'' + \cos\beta_1\cos\beta'' + \cos\gamma_1\cos\gamma'') + \\ & + Y(\cos\alpha_2\cos\alpha'' + \cos\beta_2\cos\beta'' + \cos\gamma_2\cos\gamma'') + \\ & + Z(\cos\alpha_3\cos\alpha'' + \cos\beta_3\cos\beta'' + \cos\gamma_3\cos\gamma'') \end{aligned}$$

ROTO-TRASLAZIONE (CONTINUA)



La retta r($\vec{A}$) per O e' la retta parallela al segmento $\overline{O'A}$.

I cos.dir.di $\overline{O'A}$ nel sistema di riferimento OXYZ sono dati dagli stessi angoli di ciascun asse X,Y,Z con r($\vec{A}$).

Nel sistema O' abbiamo che i cos.dir. di O'A e quindi di r($\vec{A}$) e di X,Y,Z sono:

$(\cos\alpha_0 \cos\alpha'' + \cos\beta_0 \cos\beta'' + \cos\gamma_0 \cos\gamma'') = \cos\varphi$ (angolo tra O'O e O'A)

$(\cos\alpha_1 \cos\alpha'' + \cos\beta_1 \cos\beta'' + \cos\gamma_1 \cos\gamma'') = \cos\delta_1$ (δ_1 angolo tra asse X e O'A = r($\vec{A}$))

$(\cos\alpha_2 \cos\alpha'' + \cos\beta_2 \cos\beta'' + \cos\gamma_2 \cos\gamma'') = \cos\delta_2$ (δ_2 " " " Y " " ")

$(\cos\alpha_3 \cos\alpha'' + \cos\beta_3 \cos\beta'' + \cos\gamma_3 \cos\gamma'') = \cos\delta_3$ (δ_3 " " " Z " " ")

quindi $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sono cos.dir di O'A rispetto al riferimento O.
Possiamo allora scrivere la a*) precedentemente vista:

$$*O'A = OO'\cos\varphi + (X\cos\delta_1 + Y\cos\delta_2 + Z\cos\delta_3)*$$

Sostituendo nel secondo membro tra parentesi

$X = OA\cos\alpha, Y = OA\cos\beta, Z = OA\cos\gamma$ si avrà:

$OA(\cos\alpha\cos\delta_1 + \cos\beta\cos\delta_2 + \cos\gamma\cos\delta_3) = OA\cos\delta$ (angolo tra OA e O'A = r($\vec{A}$))

$$*\ O'A = OO'\cos\varphi + OA\cos\delta\ * \quad Ug.$$

(Lo sviluppo di questa Ug. in Eq. di Vag l’abbiamo visto prima nel capitolo TRASLAZIONE)

ROTO-TRASLAZIONE (CONTINUA)

Si osservi che l'ultima Uguaglianza vista e' identica a quella relativa alla TRASLAZIONE ,dove al posto di cosα' e' posto cosδ_1, di cosβ' cosδ_2, di cosγ' cosδ_3. Che le due espressioni siano uguali e' logico ove si consideri che in effetti i triangoli O'AO di entrambe, sono risolti mediante il teorema delle proiezioni.

La loro diversità e' a monte; che nella TRASLAZIONE gli assi dei due sistemi sono paralleli, mentre nella ROTO-TRASLAZIONE no, e tale fatto implica un passaggio in più, per arrivare alla stessa formula. Diciamo che la loro differenza non e' nella espressione finale ma nella loro "storia".

Interpretiamo dunque l'espressione:

$$\overline{O'A} = \overline{OO'}\cos\varphi + \overline{OA}\cos\delta$$

per $O'A \equiv OA$

ROTAZIONE se i cos.dir. di OA sono diversi nei due sistemi di riferimento.

fatto $\overline{O'A}$ non coincidente con $\overline{OA}$

TRASLAZIONE se i cos.dir. di OA e O'A sono uguali in entrambi i sistemi di riferimento.

ROTO-TRASLAZIONE se i cos.dir. di OA e O'A sono diversi in entrambi i sistemi di riferimento.

LA DISTANZA $\overline{O'A}^2$

Da ROTO-TRASLAZIONE *) Pag. 3 si faccia i quadrati di:

1) $\left[OO'\cos\alpha_0+(X\cos\alpha_1+Y\cos\alpha_2+Z\cos\alpha_3)\right]^2=$

$=(OO'\cos\alpha_0)^2+(X\cos\alpha_1+Y\cos\alpha_2+Z\cos\alpha_3)^2+2\overline{OO'}\cos\alpha_0(X\cos\alpha_1+Y\cos\alpha_2+Z\cos\alpha_3)$

2) $\left[OO'\cos\beta_0+(X\cos\beta_1+Y\cos\beta_2+Z\cos\beta_3)\right]^2=$

$=(OO'\cos\beta_0)^2+(X\cos\beta_1+Y\cos\beta_2+Z\cos\beta_3)^2+2\overline{OO'}\cos\beta_0(X\cos\beta_1+Y\cos\beta_2+Z\cos\beta_3)$

3) $\left[OO'\cos\gamma_0+(X\cos\gamma_1,+Y\cos\gamma_2+Z\cos\gamma_3)\right]^2=$

$=(OO'\cos\gamma_0)^2+(X\cos\gamma_1+Y\cos\gamma_2+Z\cos\gamma_3)^2+2\overline{OO'}\cos\gamma_0(X\cos\gamma_1+Y\cos\gamma_2+Z\cos\gamma_3)$

Prendendo il secondo membro di ciascun binomio che è al quadrato:
$(X\cos\alpha_1+Y\cos\alpha_2+Z\cos\alpha_3)^2+(X\cos\beta_1+Y\cos\beta_2+Z\cos\beta_3)^2+(X\cos\gamma_1+Y\cos\gamma_2+Z\cos\gamma_3)^2$
sommando e raccogliendo i fattori comuni e semplificando

$$X^2+Y^2+Z^2+2XY(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)+$$
$$+2XZ(\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3)+$$
$$+2YZ(\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3)$$

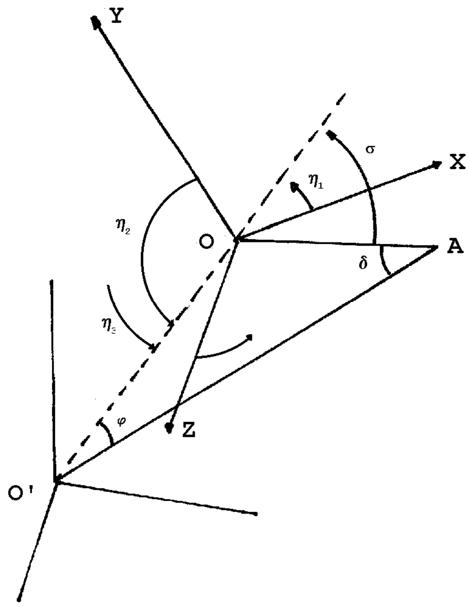
poichè i prodotti dei coseni direttori non sono che il coseno degli angoli formati dagli assi che sappiamo essere uguale a 90°, essi sono uguali a zero, per cui l'espressione sopra si riduce a:

$$X^2+Y^2+Z^2+2XY\cos 90°+2XY\cos 90°+2YZ\cos 90°=X^2+Y^2+Z^2$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\overline{O'A}^2=\overline{O'O}^2+X^2+Y^2+Z^2+2\overline{O'O}\left[(X(\cos\alpha_1\cos\alpha_0+\cos\beta_1\cos\beta_0+\cos\gamma_1\cos\gamma_0)+\right.$$
$$\left.+Y(\cos\alpha_2\cos\alpha_0+\cos\beta_2\cos\beta_0+\cos\gamma_2\cos\gamma_0+Z(\cos\alpha_3\cos\alpha_0+\cos\beta_3\cos\beta_0+\cos\gamma_3\cos\gamma_0)\right]$$

E sostituendo i coseni degli angoli (vedi figura):
$$\overline{O'A}^2=OO'^2+X^2+Y^2+Z^2+2\overline{O'O}(X\cos\eta_1+Y\cos\eta_2+Z\cos\eta_3)$$



Dunque i cos.dir. di O'O rispetto al riferimento OXYZ sono:

$\cos\eta_1 \; \cos\eta_2 \; \cos\eta_3$

Possiamo pertanto scrivere:

$$\overline{O'A}^2 = OO'^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 + 2\overline{OO'}\;\overline{OA}(\cos\alpha\cos\eta_1 + \cos\beta\cos\eta_2 + \cos\gamma\cos\eta_3) =$$

$$= \overline{OO'}^2 + \overline{OA}^2 + 2\overline{OO'}\;\overline{OA}\cos\sigma$$

che e' la stessa formula vista in TRASLAZIONE essendo σ l'angolo tra $\vec{O}A\, e\, \vec{O}O'$.

Ma nella traslazione avevamo che $\sigma = \varphi + \delta$;

mentre ora $\cos\sigma = (\cos\alpha\cos\eta_1 + \cos\beta\cos\eta_2 + \cos\gamma\cos\eta_3)$ e diventa una TRASLAZIONE se $\eta_1 = \alpha_0 \; \eta_2 = \beta_0 \; \eta_3 = \gamma_0$ per effetto del parallelismo degli assi.

ANGOLI DEI COSENI DIRETTORI (RIASSUNTO)

assi	OX	OY	OZ	
O'x	α_1	α_2	α_3	
O'y	β_1	β_2	β_3	$\Leftarrow$ rispetto ad O
O'z	γ_1	γ_2	γ_3	
		$\Uparrow$		rispetto ad O'

ES.: cos.dir. dell'asse OX nel riferimento O': $OX(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$
di O'x rispetto ad O: $O'x(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$

	riferito ad O	riferito ad O'
OA	$\alpha,\ \beta,\ \gamma$	$\alpha',\ \beta',\ \gamma'$
O'A=r(A)	$\delta_1, \delta_2, \delta_3$	$\alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$
OO'	η_1, η_2, η_3	$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0$

$$\text{Angolo tra } \left.\begin{matrix} \overline{OO'}\, e\, \overline{O'A} & \varphi \\ \overline{OO'}\, e\, \overline{OA} & \varepsilon \\ \overline{OA}\ e\ \overline{O'A} & \delta \end{matrix}\right\}$$

ciascuno di questi angoli e' dato per cos.dir. di uno stesso riferimento cartesiano

riferimento O' riferimento O

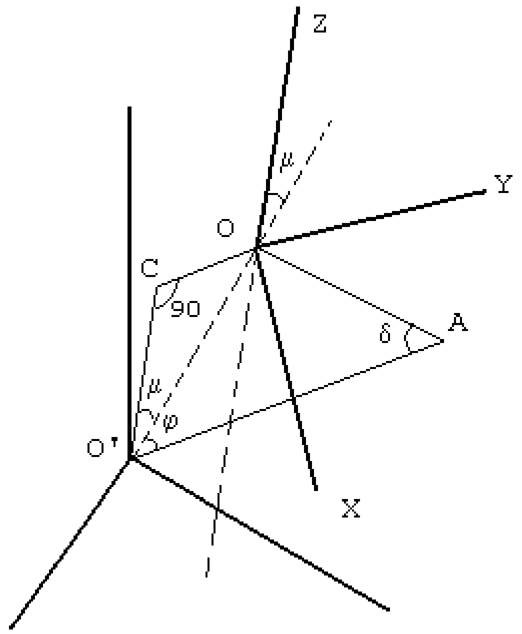
$$\cos\varphi = \cos\alpha_0 \cos\alpha'' + \cos\beta_0 \cos\beta'' + \cos\gamma_0 \cos\gamma'' = \cos\eta_1 \cos\delta_1 + \cos\eta_2 \cos\delta_2 + \cos\eta_3 \cos\delta_3$$

$$\cos\sigma = \cos\alpha_0 \cos\alpha' + \cos\beta_0 \cos\beta' + \cos\gamma_0 \cos\gamma' = \cos\eta_1 \cos\alpha + \cos\eta_2 \cos\beta + \cos\eta_3 \cos\gamma$$

$$\cos\delta = \cos\alpha'' \cos\alpha' + \cos\beta'' \cos\beta' + \cos\gamma'' \cos\gamma' = \cos\delta_1 \cos\alpha + \cos\delta_2 \cos\beta + \cos\delta_3 \cos\gamma$$

IL PIANO NELLO SPAZIO (COME ROTO-TRASLAZIONE)

Sia la roto-traslazione di O rispetto ad O' (come da figura). Posto Z=0 il sistema O si riduce ad un riferimento cartesiano su un piano e poichè l'asse Z e' perpendicolare a tale piano i suoi cos.dir. sono gli stessi cos.dir. della distanza di tale piano dall'origine O'.



$$O'C = p = c_1 \cos\alpha_c + c_2 \cos\beta_c + c_3 \cos\gamma_c \text{ Eq. di Vag}$$

$$O'A = x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'' \qquad OA = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$$

Essendo Z=0, il punto A e' nel piano XoY dato dalla distanza p=O'C e si riduce:

$$*\overline{OA} = X\cos\alpha + Y\operatorname{sen}\alpha = X\operatorname{sen}\beta + Y\cos\beta* \qquad (\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta) \qquad O'\hat{C}O = C\hat{O}Z = 90°$$

L'Eq. di O'A da quanto visto nella roto-traslazione di Pag. 4 *, con Z=0 e':

$$O'A = OO'\cos\varphi + X\cos\delta_1 + Y\cos\delta_2 = OO'\cos\varphi + OA(\cos\alpha\cos\delta_1 + sen\alpha\cos\delta_2) =$$
$$= OO'\cos\varphi + OA\cos\delta$$

Se OA rappresenta una figura di centro O, in un piano nello spazio, essa avrà valori X e Y sul piano XOY che la determinano. Se per esempio OA e' la distanza di una Ellisse avremo sul piano X= qcosα (cos. dir. α_1 β_1 γ_1 rispetto a O’) Y= msenα (cos. dir. α_2 β_2 γ_2 rispetto a O’) e XOY = 90° e le uguaglianze, essendo OZ=0(zero):

$$\overline{O'A} = OO'\cos\varphi + \left[(q\cos\alpha)\cos\delta_1 + (m\operatorname{sen}\alpha)\cos\delta_2\right] \text{ oppure}$$

$$\overline{O'A} = OO'\cos\varphi + \sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2\operatorname{sen}^2\alpha}\,\cos\delta \quad (\text{* di Pag. 4})$$

Mentre in forma esplicita:

$$\begin{cases} \overline{O'A}\cos\alpha''=OO'\cos\alpha_0+(q\cos\alpha\cos\alpha_1+m\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha_2) \\ \overline{O'A}\cos\beta''=OO'\cos\beta_0+(q\cos\alpha\cos\beta_1+m\operatorname{sen}\alpha\cos\beta_2) \\ \overline{O'A}\cos\gamma''=OO'\cos\gamma_0+(q\cos\alpha\cos\gamma_1+m\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma_2) \end{cases} \quad \text{Eq. di Vag}$$

Se consideriamo: $\begin{cases} OO'\cos\mu=O'C=p \\ OO'\operatorname{sen}\mu=CO \end{cases}$ $\quad \overline{OO'}=\dfrac{p}{\cos\mu}$

con $\cos\mu=\cos\alpha_C\cos\alpha_0+\cos\beta_C\cos\beta_0+\cos\gamma_C\cos\gamma_0$ cioè l’angolo tra O’O e O’C nella nostra Eq. di Vag possiamo sostituire OO' in funzione della distanza del piano dall'origine.
Se indichiamo l'Eq. di Vag con

$$\overline{O'A}=OO'\cos\varphi+OA\cos\delta=\frac{p}{\cos\mu}\cos\varphi+OA\cos\delta \text{ per } \mu=0 \quad C\equiv O$$

l'Equazione diventa (per $\cos\delta=\cos(90-\omega)=\operatorname{sen}\varphi$)

$$\overline{O'A}=p\cos\varphi+OA\operatorname{sen}\varphi$$

già vista nel capitolo "il piano nello spazio”.