V° BIS. SOMMA DI SEGMENTI nello Spazio

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

Come sul piano, anche nello spazio e' possibile applicare la regola del parallelogramma. Il presupposto e' che due rette e quindi due segmenti avente un punto in comune, abbiamo un piano che le contenga. Sia:

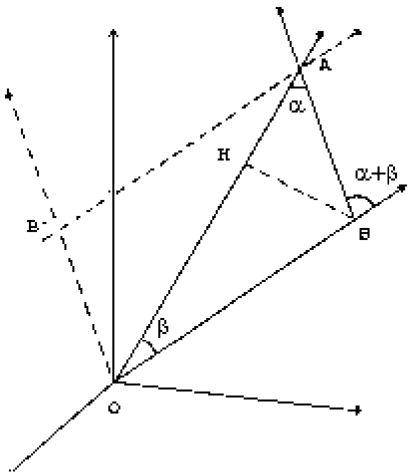

Fig. 1

$\overline{OA}(x, y, z - \cos x, \cos y, \cos z)$

$\overline{BA}(a_1, a_2, a_3 - \cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$

$\overline{OB}(b_1, b_2, b_3 - \cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3)$

Come nella Fig.1 siano due segmenti $\overline{OB}$ e $\overline{OB'} = \overline{BA}$:

$$\begin{cases} OB\cos\beta = OH \\ BA\cos\alpha = HA \end{cases} \quad OB\cos\beta + BA\cos\alpha = OH + HA = OA$$

$$OA = OB\cos\beta + BA\cos\alpha \text{ (teor.delle proiezioni)}$$

$$\begin{cases} OB\cos\beta = OB(\cos x\cos\beta_1 + \cos y\cos\beta_2 + \cos z\cos\beta_3) \\ BA\cos\alpha = BA(\cos x\cos\alpha_1 + \cos y\cos\alpha_2 + \cos z\cos\alpha_3) \end{cases}$$

Pertanto il Teorema delle proiezioni diventa:

$$OA = (BA\cos\alpha_1 + OB\cos\beta_1)\cos x + (BA\cos\alpha_2 + OB\cos\beta_2)\cos y + (BA\cos\alpha_3 + OB\cos\beta_3)\cos z =$$
$$= (a_1 + b_1)\cos x + (a_2 + b_2)\cos y + (a_3 + b_3)\cos z \quad *)$$

quest'ultima e'una Eq. di Vag perchè: $\overline{OA}^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2$
e quindi:

$$\overline{OA}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{BA}\,\overline{OB}(\cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3) =$$
$$= \overline{BA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{BA}\,\overline{OB}\cos(\beta + \alpha) \text{ (teorema di Carnot)}$$

moltiplicando i membri al quadrato per $(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$ e $(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$

$$\overline{OA}^2 = (BA^2\cos^2\alpha + OB^2\cos^2\beta + 2OB\,AB\cos\alpha\cos\beta) +$$
$$+ (BA^2 sen^2\alpha + OB^2 sen^2\beta - 2OB\,AB\,sen\alpha\,sen\beta) =$$
$$= (BA\cos\alpha + OB\cos\beta)^2 + (BA\,sen\alpha - OB\,sen\beta)^2$$

Dove la differenza dell'ultimo membro è nulla in quanto differenza di uno stesso segmento (vedi figura).

La *) sappiamo essere:

$$\begin{cases} OA\cos x = x = (a_1 + b_1) = BA\cos\alpha_1 + OB\cos\beta_1 \\ OA\cos y = y = (a_2 + b_2) = BA\cos\alpha_2 + OB\cos\beta_2 \quad \text{Eq.di Vag} \\ OA\cos z = z = (a_3 + b_3) = BA\cos\alpha_3 + OB\cos\beta_3 \end{cases}$$

$$OA = (BA\cos\alpha_1 + OB\cos\beta_1)\cos x + (BA\cos\alpha_2 + OB\cos\beta_2)\cos y + (BA\cos\alpha_3 + OB\cos\beta_3)\cos z =$$
$$= BA(\cos\alpha_1 \cos x + \cos\alpha_2 \cos y + \cos\alpha_3 \cos z) + OB(\cos\beta_1 \cos x + \cos\beta_2 \cos y + \cos\beta_3 \cos z) =$$
$$= BA\cos\alpha + OB\cos\beta$$

Tale e' la regola del parallelogramma per due segmenti, dove OA e' il valore assoluto del segmento somma, il secondo e terzo membro la somma dei segmenti origine in un riferimento cartesiano nello spazio, il quarto la somma dei segmenti origine come vettori (applicazione del Teorema delle Proiezioni, pagina precedente).

Procedendo nel ragionamento precedente, vediamo come si applichi la regola del parallelogramma in generale. Si abbia oltre ai segmenti $\vec{B}A \; e \; \vec{O}B$ anche il segmento:

$$\vec{A}D(d_1, d_2, d_3 - \cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \cos\gamma_3)$$

e si voglia il segmento risultante dalla somma di questi tre.

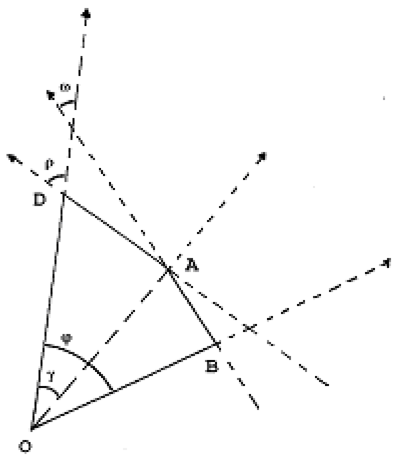

Fig. 2

Precedentemente abbiamo visto come dai due segmenti BA e OB si sia ottenuto il segmento OA: da questo più il segmento AD si otterrà il segmento OD, somma dei tre segmenti dati.

Prendendo in considerazione i segmenti OA e AD, per quanto detto si potra' scrivere:

$$\begin{cases} OD\cos x' = OA\cos x + AD\cos\gamma_1 = BA\cos\alpha_1 + OB\cos\beta_1 + AD\cos\gamma_1 \\ OD\cos y' = OA\cos y + AD\cos\gamma_2 = BA\cos\alpha_2 + OB\cos\beta_2 + AD\cos\gamma_2 \\ OD\cos z' = OA\cos z + AD\cos\gamma_3 = BA\cos\alpha_3 + OB\cos\beta_3 + AD\cos\gamma_3 \end{cases}$$

Rifacendo tutti i passaggi visti e tenendo presente i valori degli angoli trovati abbiamo:

$$OD = OA\cos\gamma + AD\cos\rho = BA(\cos\alpha_1\cos x' + \cos\alpha_2\cos y' + \cos\alpha_3\cos z') +$$
$$+ OB(\cos\beta_1\cos x' + \cos\beta_2\cos y' + \cos\beta_3\cos z' + AD(\cos\gamma_1\cos x' + \cos\gamma_2\cos y' + \cos\gamma_3\cos z') =$$
$$= BA\cos\omega + OB\cos\varphi + AD\cos\rho$$
$$(\cos x\cos\gamma_1 + \cos y\cos\gamma_2 + \cos z\cos\gamma_3) = \cos\gamma$$
$$(\cos x'\cos\gamma_1 + \cos y'\cos\gamma_2 + \cos z'\cos\gamma_3) = \cos\rho$$
$$(\cos\alpha_1\cos x' + \cos\alpha_2\cos y' + \cos\alpha_3\cos z') = \cos\beta\cos\gamma = \cos\varphi$$
$$(\cos\beta_1\cos x' + \cos\beta_2\cos y' + \cos\beta_3\cos z') = \cos\alpha\cos\gamma = \cos\omega$$
$$OA\cos\gamma = (OB\cos\beta + BA\cos\alpha)\cos\gamma = OB\cos\beta\cos\gamma + BA\cos\alpha\cos\gamma = OB\cos\varphi + BA\cos\omega$$

E' ovvio che i segmenti OB, BA, AD non debbono essere necessariamente sullo stesso piano.

DISTANZA DI DUE PUNTI

Allo stesso modo che sul piano anche qui possiamo prendere in esame la distanza dei punti $BA(\cos x_1, \cos x_2, \cos x_3)$ Fig.3 dove:

$$\begin{cases} OB\cos\beta_1 + BA\cos x_1 = OA\cos\alpha_1 \\ OB\cos\beta_2 + BA\cos x_2 = OA\cos\alpha_2 \\ OB\cos\beta_3 + BA\cos x_3 = OA\cos\alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} BA\cos x_1 = (a_1 - b_1) = OA\cos\alpha_1 - OB\cos\beta_1 \\ BA\cos x_2 = (a_2 - b_2) = OA\cos\alpha_2 - OB\cos\beta_2 \\ BA\cos x_3 = (a_3 - b_3) = OA\cos\alpha_3 - OB\cos\beta_3 \end{cases}$$

$$\overline{BA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,\overline{OA}\,\overline{OB}\cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

moltiplicando i membri al quadrato per $\left(\cos^2\varepsilon_1 + \sin^2\varepsilon_1\right)$ e $\left(\cos^2\varepsilon_2 + \sin^2\varepsilon_2\right)$ abbiamo:

$$\overline{BA}^2 = (OA\cos\varepsilon_1 - OB\cos\varepsilon_2)^2 + (OA\,sen\varepsilon_1 - OB\,sen\varepsilon_2)^2$$

Dove l'ultimo membro dell'uguaglianza è uguale a zero vedi Fig.3.

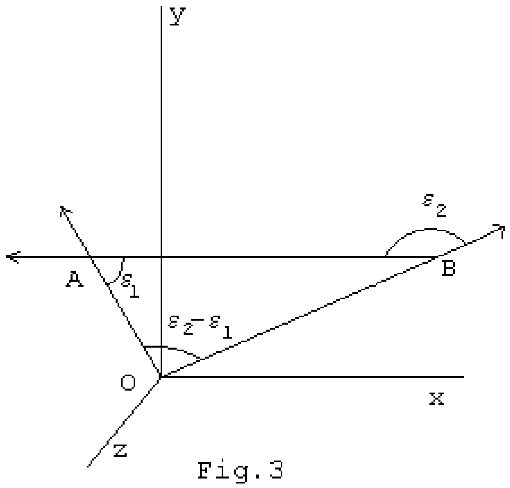

Fig.3

Si può anche scrivere :

$$\overline{BA} = (OA\cos\alpha_1 - OB\cos\beta_1)\cos x_1 + (OA\cos\alpha_2 - OB\cos\beta_2)\cos x_2 + (OA\cos\alpha_3 - OB\cos\beta_3)\cos x_3 =$$
$$= \overline{OA}(\cos\alpha_1\cos x_1 + \cos\alpha_2\cos x_2 + \cos\alpha_3\cos x_3) - \overline{OB}(\cos\beta_1\cos x_1 + \cos\beta_2\cos x_2 + \cos\beta_3\cos x_3) =$$
$$= \overline{OA}\cos\varepsilon_1 - \overline{OB}\cos\varepsilon_2$$

PRODOTTO SCALARE E PRODOTTO VETTORIALE

Siano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha_x = a_x \\ \overline{OA}\cos\alpha_y = a_y \\ \overline{OA}\cos\alpha_z = a_z \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{OB}\cos\beta_x = b_x \\ \overline{OB}\cos\beta_y = b_y \\ \overline{OB}\cos\beta_z = b_z \end{cases} \qquad \overline{OC} = \overline{OA}\,\overline{OB}$$

$$\cos\mu = \cos\alpha_x\cos\beta_x + \cos\alpha_y\cos\beta_y + \cos\alpha_z\cos\beta_z$$

$$\left(\overline{OC}\cos\mu\right)^2 = \left[\overline{OA}\ \overline{OB}\left(\cos\alpha_x\cos\beta_x + \cos\alpha_y\cos\beta_y + \cos\alpha_z\cos\beta_z\right)\right]^2 = \qquad \textbf{1]}$$

$$= \left(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\right)^2 = \left(a_xb_x\right)^2 + \left(a_yb_y\right)^2 + \left(a_zb_z\right)^2 + 2a_xb_xa_yb_y + 2a_xb_xa_zb_z + 2a_yb_ya_zb_z$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2\,\overline{OB}^2 = \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right) = \qquad \textbf{2]}$$

$$= \left(a_xb_x\right)^2 + \left(a_xb_y\right)^2 + \left(a_xb_z\right)^2 + \left(a_yb_x\right)^2 + \left(a_yb_y\right)^2 + \left(a_yb_z\right)^2 + \left(a_zb_x\right)^2 + \left(a_zb_y\right)^2 + \left(a_zb_z\right)^2$$

Poiché $\overline{OC}^2 sen^2\mu = \overline{OC}^2 - \overline{OC}^2\cos^2\mu$ sarà **2]-1]= 3]** cioè

$$\begin{aligned} \overline{OC}^2 sen^2\mu &= \left(a_xb_y\right)^2 + \left(a_xb_z\right)^2 + \left(a_yb_x\right)^2 + \left(a_yb_z\right)^2 + \left(a_zb_x\right)^2 + \left(a_zb_y\right)^2 + \\ &\quad - \left[2\left(a_xb_y\right)\left(a_yb_x\right) + 2\left(a_xb_z\right)\left(a_zb_x\right) + 2\left(a_yb_z\right)\left(a_zb_y\right)\right] \qquad \textbf{3]} \\ &= \left(a_xb_y - a_yb_x\right)^2 + \left(a_zb_x - a_xb_z\right)^2 + \left(a_yb_z - a_zb_y\right)^2 \end{aligned}$$

essendo $\overline{OC}^2 sen^2\mu$ somma di tre quadrati (come fosse $X^2+Y^2+Z^2$) posso sempre scrivere la Eq di Vag:

$$\begin{cases} \left(\overline{OC}\,sen\mu\right)\cos u_x = \left(a_xb_y - a_yb_x\right) \\ \left(\overline{OC}\,sen\mu\right)\cos u_y = \left(a_zb_x - a_xb_z\right) \\ \left(\overline{OC}\,sen\mu\right)\cos u_z = \left(a_yb_z - a_zb_y\right) \end{cases} \qquad \text{con } \cos^2 u_x + \cos^2 u_y + \cos^2 u_z = 1$$

$$\overline{OC}\,sen\mu = \left(a_xb_y - a_yb_x\right)\cos u_x + \left(a_zb_x - a_xb_z\right)\cos u_y + \left(a_yb_z - a_zb_y\right)\cos u_z =$$
$$\sqrt{\left(a_xb_y - a_yb_x\right)^2 + \left(a_zb_x - a_xb_z\right)^2 + \left(a_yb_z - a_zb_y\right)^2}$$

Possiamo,quindi, dire che essendo μ l'angolo dei due segmenti OA e OB, ed essendo $\overline{OC} = \overline{OA}\ \overline{OB}$ avrò che:

$\overline{OC}\cos\mu = \text{Prodotto Scalare}$ $\qquad$ $\overline{OC}\,sen\mu = \text{Prodotto Vettoriale}$

ma avrò anche l'Eq di Vag:

$$\begin{cases} \overline{OC}\cos\mu = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right) \\ \overline{OC}\,sen\mu = \sqrt{\left(a_x b_y - a_y b_x\right)^2 + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)^2 + \left(a_y b_z - a_z b_y\right)^2} = \\ \qquad = \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\cos u_x + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\cos u_y + \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\cos u_z \end{cases}$$

Infatti $\cos^2\mu + sen^2\mu = 1$ mentre la somma dei quadrati dei suoi secondi membri dà proprio $\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2\,\overline{OB}^2 = \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right)$ già visto sopra, infatti **3]+1]= 2]**.

Come si è osservato sul piano, per $0° \le \vec{\mu} \le 90°$ il prodotto scalare tende a zero ed il prodotto vettoriale a OC, mentre per $\overleftarrow{\mu}$ sarà il prodotto scalare a tendere a OC ed il vettoriale a zero.