VI. LE FIGURE NOTE NELLO SPAZIO

LA FIGURA NELLO SPAZIO

Da IL PUNTO nello Spazio abbiamo visto che il punto, raffigurato come estremo della distanza dall'origine sia rappresentabile sia direttamente con gli assi coordinati sia con la propria proiezione sui piani coordinati.
Analogamente una figura geometrica considerata in un riferimento cartesiano, ha sui piani di questo una propria proiezione, vogliamo vedere come avendo le relative proiezioni quale siano le regole e i rapporti tra tali proiezioni e la figura geometrica.
Rappresentiamo un punto A(x,y,z; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) e la distanza OA vettore di una eventuale figura e le sue proiezioni sui piano coordinati OA_x, OA_y, OA_z:

$$1)\begin{cases} OA\cos\alpha_1 = x \\ OA\cos\alpha_2 = y \\ OA\cos\alpha_3 = z \end{cases} \text{Eq. } di\ Vag \qquad 2)\begin{cases} OA\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 = OA_y \\ OA\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = OA_z \\ OA\,\mathrm{sen}\,\alpha_3 = OA_x \end{cases} \qquad \overline{OA}^2 = \frac{\overline{OA_x}^2 + \overline{OA_y}^2 + \overline{OA_z}^2}{2} \quad \textbf{Ug.}$$

Come indicato nel Cap.II "Il Punto nello Spazio" avremo similmente le equazioni di Vag. delle proiezioni relative ad una distanza OA, a cui diamo dei valori parametrici $x=q\cos\rho_1, y=m\cos\rho_2, z=p\cos\rho_3$:

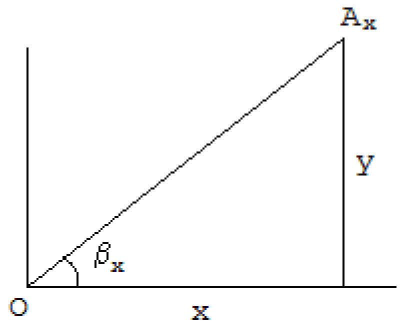


Fig.1a

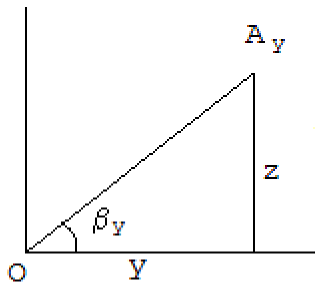


Fig.1b

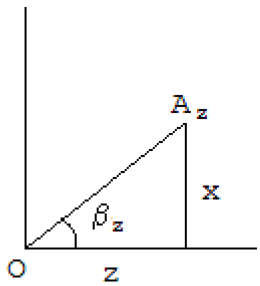


Fig.1c

$$3)\begin{cases} OA_x\cos\beta_x = x = q\cos\rho_1 \\ OA_x sen\beta_x = y = m\cos\rho_2 \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} OA_y\cos\beta_y = y = m\cos\rho_2 \\ OA_y sen\beta_y = z = p\cos\rho_3 \end{cases} \qquad 5)\begin{cases} OA_z\cos\beta_z = z = p\cos\rho_3 \\ OA_z sen\beta_z = x = q\cos\rho_1 \end{cases}$$

$$\overline{OA_x}^2 = x^2 + y^2 \qquad \overline{OA_y}^2 = y^2 + z^2 \qquad \overline{OA_z}^2 = z^2 + x^2$$

Ponendo la condizione: $\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = 1$ avremo:

in Fig.1a $\cos^2\rho_3 = 0$ cioè $\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_2 = 1$ quindi OA_x è una ellisse
in Fig.1b $\cos^2\rho_2 = 0$ $\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_3 = 1$ OA_y è una ellisse
in Fig.1c $\cos^2\rho_1 = 0$ $\cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = 1$ OA_z è una ellisse

Se prendiamo dalla 3),4),5) la prima riga e confrontiamo le relative incognite con la 1) abbiamo:

$$6)\begin{cases} OA_x \cos\beta_x = x = q\cos\rho_1 = OA\cos\alpha_1 \\ OA_y \cos\beta_y = y = m\cos\rho_2 = OA\cos\alpha_2 \\ OA_z \cos\beta_z = z = p\cos\rho_3 = OA\cos\alpha_3 \end{cases}$$ quindi una figura di vettore OA.

Abbiamo così creato una figura partendo dalle sue proiezione che nel seguito vedremo essere una ellissoide.

Possiamo aggiungere che se dalle indicate 3),4),5) prendiamo le seconde righe le quadriamo e sommiamo:

$$\overline{OA_x}^2 + \overline{OA_y}^2 + \overline{OA_z}^2 = (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) = 2((x^2 + y^2 + z^2) = 2\overline{OA}^2$$

Che abbiamo già visto nel capitolo indicato.

Esiste dunque un legame ben preciso tra OA vettore di una figura e le sue proiezioni $\overline{OA}_x, \overline{OA}_y, \overline{OA}_z$ che passa per le loro Eq. di Vag 3),4),5) ma ciò che importa notare è che le incognite x,y,z di OA dipendono dai valori che diamo a $\overline{OA}_x, \overline{OA}_y, \overline{OA}_z$ con tutte quelle condizioni che abbiamo fatto vedere nel Cap.II "IL PUNTO NELLO SPAZIO".

INSIEME DEI PUNTI

Sia:

$$\begin{cases} q\cos\rho_1 = x \\ m\cos\rho_2 = y \\ p\cos\rho_3 = z \end{cases} \quad \text{sara'} \ \overline{OA}^2 = q^2\cos^2\rho_1 + m^2\cos^2\rho_2 + p^2\cos^2\rho_3$$

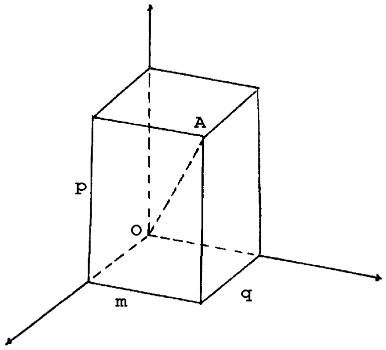
per q,m,p positivi e ρ_1, ρ_2, ρ_3 *compresi tra 0° e 90°*

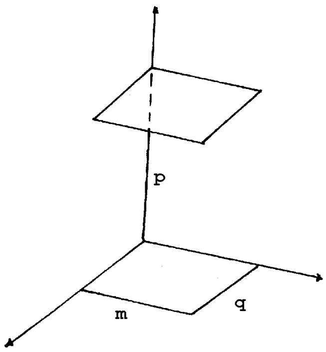
La grandezza massima e' $\overline{OA}^2 = q^2 + m^2 + p^2$ e tutti i punti di OA saranno contenuti nel parallelepipedo di lato q,m,p; essi verranno a costituire, insomma, il suo volume.

Se noi per cos ρ_3=0 e cos ρ_3=1 poi, facciamo variare gli altri due coseni avremo i punti dei rettangoli (q*m) sul piano yOx e sul parallelo a questo, distante p: Operando egualmente su cos ρ_1 e cos ρ_2 avremo gli altri lati del parallelepipedo, cioè la sua superficie.

Come si vede, in questa operazione non abbiamo posto nessun limite al valore della somma dei quadrati dei coseni, compresa quindi tra:

$$0 \le (\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3) \le 3$$





Sia:

$$\begin{cases} \dfrac{q}{\cos\rho_1} = x \\ \dfrac{m}{\cos\rho_2} = y \\ \dfrac{p}{\cos\rho_3} = z \end{cases} \quad \text{sara'} \quad \overline{OA}^2 = \left(\frac{q}{\cos\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{\cos\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{\cos\rho_3}\right)^2$$

(Vedi Fig. all'inizio)
Sempre per q,m,p positivi e ρ_1, ρ_2, ρ_3 *compresi tra 0° e 90°*
il valore minimo di $\overline{OA}^2$ è $\overline{OA}^2 = q^2 + m^2 + p^2$ ed i punti saranno tutti quelli esterni al parallelepipedo di lati q,m,p. Sara' ancora

$$0 \le (\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3) \le 3$$

dove 3 e' il valore minimo di $\overline{OA}^2$ e 0 quello massimo.

Nelle figure che seguiranno porremo come condizione che le costanti siano $(q,m,p) \in R_0^+$, il valore dei coseni direttori $\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = 1$ e le x,y,z siano funzioni dei coseni direttori.
Si osservi che imponendo ai Coseni Direttori il valore =1 posso scrivere la sua forma semplificata (come fatto nel piano dove $\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_2 = 1 = \cos^2\rho_1 + \sin^2\rho_1 = \cos^2\rho_2 + \sin^2\rho_2$ possiamo fare:

$$\begin{cases} \cos\rho_1 = \sin\rho_3\cos\rho_2 \\ \cos\rho_2 = \sin\rho_3\sin\rho_2 \\ \cos\rho_3 = \cos\rho_3 \end{cases} \quad \text{quadrando e sommando}$$

$$\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = \sin^2\rho_3\cos^2\rho_2 + \sin^2\rho_3\sin^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = 1$$

riducendo quindi la ricerca a due soli angoli ρ_2 ρ_3.

ELLISSOIDE ELLITTICO

Sia $\overline{OA}$ un segmento con angoli $\beta_1;\beta_2;\beta_3$ con le coordinate x,y,z.

$$\begin{cases} |\overline{OA}|\cos\beta_1 = q\cos\rho_1 = x \\ |\overline{OA}|\cos\beta_2 = m\cos\rho_2 = y \\ |\overline{OA}|\cos\beta_3 = p\cos\rho_3 = z \end{cases} \qquad (q,m,p)\in R_0^+ \qquad \cos^2\rho_1+\cos^2\rho_2+\cos^2\rho_3=1$$

$$\frac{x^2}{q^2}+\frac{y^2}{m^2}+\frac{z^2}{p^2}=1 \qquad \overline{mpx}^2+\overline{qpy}^2+\overline{mqz}^2=\overline{qmp}^2$$

$$\frac{x}{q}\cos\rho_1+\frac{y}{m}\cos\rho_2+\frac{z}{p}\cos\rho_3=1; \quad mpx\cos\rho_1+qpy\cos\rho_2+mqz\cos\rho_3=qmp$$

$$|\overline{OA}| = x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_3=\sqrt{q^2\cos^2\rho_1+m^2\cos^2\rho_2+p^2\cos^2\rho_3} \text{ Eq.di Vag}$$

Per x=0 si ha cos ρ_1=0 $\cos^2\rho_2 = \text{sen}^2\rho_3$ per cui sul piano yOz avremo $\sqrt{m^2\,\text{sen}^2\rho_3+p^2\cos^2\rho_3}$ che e' una Ellisse.
Analogamente accade per gli altri piani coordinati.

Inoltre per $\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3=\sin^2\beta_1$ possiamo scrivere:

$$\begin{cases} |\overline{OA}|\cos\beta_1 = q\cos\rho_1 \\ |\overline{OA}|\sin\beta_1 = \sqrt{m^2\cos^2\rho_2+p^2\cos^2\rho_3} \end{cases} \qquad \tan\beta_1=\frac{\sqrt{m^2\cos^2\rho_2+p^2\cos^2\rho_3}}{q\cos\rho_1}=\frac{\overline{OA_y}}{x}$$

In modo analogo avremo $\tan\beta_2$ *e* $\tan\beta_3$. Nel Cap.II "IL PUNTO NELLO SPAZIO" nell'esempio IV°) abbiamo visto che il piano relativo a ciascuna tangente non sono i piani coordinati.

Nel caso fosse q=m=p=R si avrebbe il caso della SFERA:

$$x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_3=R$$

ELLISSOIDE CIRCOLARE

$\begin{cases} q\cos\rho_1 = x \\ m\cos\rho_2 = y \\ m\cos\rho_3 = z \end{cases}$ come quello Ellittico ma con p = m

Infatti come nella pagina precedente avremo:

$$x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 = \sqrt{q^2\cos^2\rho_1 + m^2(\cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3)} = \overline{OA} \quad \text{Eq. di Vag}$$

ma

$$\cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = 1 - \cos^2\rho_1 = sen^2\rho_1$$

$$\left|\overline{OA}\right| = \sqrt{q^2\cos^2\rho_1 + m^2 sen^2\rho_1} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

dove $y^2 + z^2 = m^2 sen^2\rho_1$

Se sul piano yOz facciamo x=0 abbiamo $\cos^2\rho_1 = 0 \text{ quindi } sen^2\rho_1 = 1$ che mi darà $\overline{OA}^2 = y^2 + z^2 = m^2 \quad \cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = sen^2\rho_1 = 1 \quad \begin{cases} \cos\rho_2 = sen\rho_3 \\ \cos\rho_3 = sen\rho_2 \end{cases}$

da cui $\overline{OA} = m = y\,sen\rho_3 + z\cos\rho_3$ che e' una CIRCONFERENZA di raggio m. Mentre sugli altri piani coord. abbiamo ancora una Ellisse.

IPERBOLOIDE A DUE FALDE ELLITTICO

$$\begin{cases} x\cos\rho_1 = q \\ m\cos\rho_2 = y\cos\rho_1 \\ p\cos\rho_3 = z\cos\rho_1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x\cos\rho_1 = q \\ mx\cos\rho_2 = qy \\ px\cos\rho_3 = qz \end{matrix} \qquad \begin{matrix} mpx\cos\rho_1 = qmp \\ \text{"}\ \cos\rho_2 = qpy \\ \text{"}\ \cos\rho_3 = qmz \end{matrix}$$

$$\cos^2\rho_1 + \cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = 1 \qquad \overline{mpx}^2 = \overline{qmp}^2 + \overline{qpy}^2 + \overline{qmz}^2$$

$$\frac{x^2}{q^2} = 1 + \frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{p^2} \qquad \frac{x^2}{q^2} - \frac{y^2}{m^2} - \frac{z^2}{p^2} = 1$$

$$qmp\cos\rho_1 + qpy\cos\rho_2 + qmz\cos\rho_3 = mpx$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{\cos^2\rho_1} + \frac{m^2\cos^2\rho_2}{\cos^2\rho_1} + \frac{p^2\cos^2\rho_3}{\cos^2\rho_1}$$

$$x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 = \sqrt{\frac{q^2 + m^2\cos^2\rho_2 + p^2\cos^2\rho_3}{\cos^2\rho_1}} \quad \textit{Eq. di Vag}$$

VERTICI: per $\cos^2\rho_1 = 1$ avremo $\cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = 0$ vera solo per

$$\cos\rho_2 = \cos\rho_3 = 0 \text{ cioe' } y = 0\ z = 0 \qquad \sqrt{\frac{q^2}{\cos^2\rho_1}} = \frac{q}{\cos\rho_1}$$

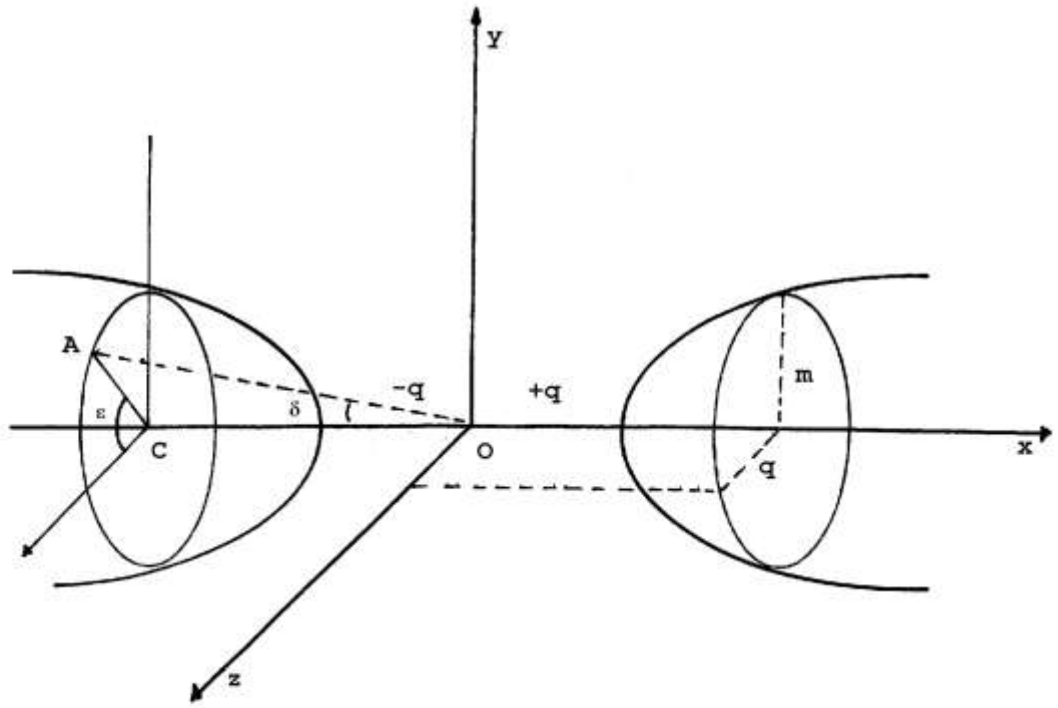
$$\text{per } \rho_1 = 0° \qquad x = q$$

$$\text{per } \rho_1 = 180° \qquad x = -q$$

Tale Iperboloide e' detto Ellittico perche' tagliandolo con un opportuno piano si ottiene un Ellisse.
Come da figura (a pag. seguente) si abbia un piano perpendicolare all'asse x distante x=d (>q) per cui avremo che $d\cos\rho_1 = q$ diventa $\cos\rho_1 = \frac{q}{d} < 1$ .Tutti i punti A(x_n=d; y_n; z_n)oltre che appartenere all' Iperboloide dovranno appartenere al piano. Si avrà il sistema:

$$\begin{cases} OA = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 = \sqrt{\dfrac{q^2 + m^2\cos^2\rho_2 + p^2\cos\rho_3}{\cos^2\rho_1}} & \text{iperboloide} \\ OA = d\cos\delta + CA\,\text{sen}\,\delta & \text{piano distante d} \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA\cos\delta = d \\ OAsen\delta = CA \end{cases} \quad \begin{cases} CAsen\varepsilon = y_n = \dfrac{m\cos\rho_2}{\cos\rho_1} = \dfrac{md}{q}\cos\rho_2 \\ CA\cos\varepsilon = z_n = \dfrac{p\cos\rho_3}{\cos\rho_1} = \dfrac{pd}{q}\cos\rho_3 \end{cases} \quad \text{Eq. di Vag}$$



ma: $\left(\frac{q}{d}\right)^2 + \cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3 = 1 \qquad \cos^2\rho_2 = \operatorname{sen}^2\rho_3 - \left(\frac{q}{d}\right)^2$

per cui:

$$\overline{CA}^2 = \left(\frac{pd}{q}\right)^2 \cos^2\rho_3 + \left(\frac{md}{q}\right)^2 \operatorname{sen}^2\rho_3 - m^2 = \left(\frac{pd}{q}\right)^2 \cos^2\rho_3 + \left(\frac{md}{q}\right)^2 \operatorname{sen}^2\rho_3 - (m^2\cos^2\rho_3 + m^2\operatorname{sen}^2\rho_3) =$$

$$= \left[\left(\frac{pd}{q}\right)^2 - m^2\right]\cos^2\rho_3 + \left[\left(\frac{md}{q}\right)^2 - m^2\right]\operatorname{sen}^2\rho_3 \qquad \text{(ellisse)}$$

$$OA = d\cos\beta_1 + y_n\cos\beta_2 + z_n\cos\beta_3 = \sqrt{\left[\left(\frac{pd}{q}\right)^2 - m^2\right]\cos^2\rho_3 + \left[\left(\frac{md}{q}\right)^2 - m^2\right]\operatorname{sen}^2\rho_3 + d^2}$$

CA rappresenta dunque una Ellisse sul piano distante **d** e di assi $\left[\left(\frac{pd}{q}\right)^2 - m^2\right]$ e $\left[\left(\frac{md}{q}\right)^2 - m^2\right]$ mentre OA rappresenta tale Ellisse nell’ iperboloide.

IPERBOLOIDE A DUE FALDE CIRCOLARE

$$\begin{cases} x\cos\rho_1 = q \\ m\cos\rho_2 = y\cos\rho_1 \\ m\cos\rho_3 = z\cos\rho_1 \end{cases}$$ (come quello Ellittico ma con m = p)

$$x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3 = \sqrt{\frac{q^2 + m^2(\cos^2\rho_2 + \cos^2\rho_3)}{\cos^2\rho_1}} = \overline{OA} \ \textit{Eq. di Vag}$$

$$\overline{OA}^2 = \frac{q^2 + m^2 \operatorname{sen}^2 \rho_1}{\cos^2 \rho_1} = x^2 + y^2 + z^2$$

Preso un piano distante x=d>p (cioè parallelo ad yOz) avremo:

$$\cos^2\rho_1 = \frac{q^2}{d^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2\rho_1 = (1 - \frac{q^2}{d^2}) \quad \textit{per cui}$$

$$\overline{OA}^2 = d^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2 + m^2(1 - \frac{q^2}{d^2})}{\frac{q^2}{d^2}} = d^2 + m^2(\frac{d^2}{q^2} - 1)$$

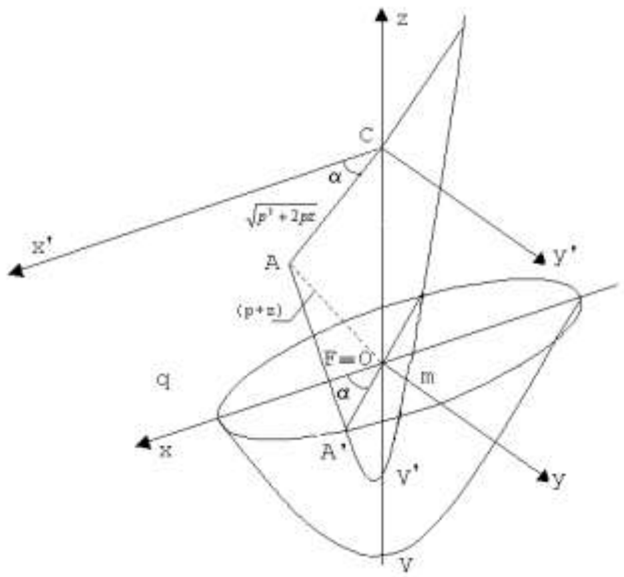
che rappresenta una circonferenza in quanto $\overline{CA}^2 = m^2(\frac{d^2}{q^2} - 1) = \textit{costante}$

cioè il raggio che si può anche vedere nell'esempio precedente dove fatto

$$m = p \quad \left[\left(\frac{mp}{q}\right)^2 - m^2\right] = R$$

$$\overline{OA} = d\cos\beta_1 + y_n\cos\beta_2 + z_n\cos\beta_3 = \sqrt{R^2 + d^2}$$

PARABOLOIDE CON ORIGINE NEL FUOCO



Dalle espressioni viste sul piano possiamo trarre da una delle parabole (Es.:quella del tipo (p+z)) come luogo geometrico della distanza tra il Fuoco (Origine) e punto delle parabole aventi come asse di simmetria l'asse z. Scriviamone l'Eq. di Vag:

$$1^*]\quad \begin{cases}(p+z)\cos\beta_1 = x\\(p+z)\cos\beta_2 = y\\(p+z)\cos\beta_3 = z\end{cases}$$

$$p^2+2pz = x^2+y^2$$

a) La 1*] per x=0 oppure y=0 sappiamo essere l'equazione di una parabola con il fuoco nell'origine.

b)Un piano generico passante per l'asse z e angolo α con l'asse delle x, taglia la figura secondo parabole (tutte con il fuoco nell'Origine)ma con la distanza di ogni suo punto sempre OA=p+z.

c)Per z=0 il piano xOy conterrà l'Origine coincidente con tutti i Fuochi,per definizione di parabola, e la linea FA'=p, di una qualunque parabola, è il valore del suo parametro.

d)Se, sul piano xOy per α=0° e α = 90° il valore del parametro è rispettivamente **p=q** e **p=m** cioè che il parametro vari **q ≥ p ≥ m** possiamo allora considerare tale parametro varabile secondo una Eq. di Vag e per un opportuno angolo di riferimento δ:

$$\begin{cases}p\cos\alpha = x = q\cos\delta \\ p\,sen\alpha = y = m\,sen\delta\end{cases}\qquad \begin{matrix}p^2 = q^2\cos^2\delta + m^2 sen^2\delta\\ \tan\alpha = \dfrac{m}{q}\tan\delta\end{matrix}$$

Eq.di Vag di una Ellisse di angolo al centro α.

Pertanto la 1*], sul piano xOy $z=0$ cioè $\cos\beta_3 = 0$, diventa l'Ellisse:

$$2^*]\quad \begin{cases}(\sqrt{q^2\cos^2\delta + m^2\sin^2\delta})\cos\beta_1 = x\\(\sqrt{q^2\cos^2\delta + m^2\sin^2\delta})\cos\beta_2 = y\end{cases}\qquad \cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2 = 1$$

e)Poiché il piano xOy in cui tutti i Fuochi di tutte le parabole coincidono è il piano su cui giacciono i parametri p (variabili nel nostro caso) di ciascuna parabola, i vertici di conseguenza risulteranno avere una differente distanza p/2 (FV' ≠ FV ≠.....),come da definizione di parabola.

f)Se consideriamo un piano x'Cy' per z>0 (parallelo a xOy e distante z da questi) il cui riferimento cartesiano è solo traslato, avremo che $\overline{CA} = \sqrt{p^2+2pz}$ e sul piano x'Cy' per α=0° $x' = \sqrt{q^2+2qz}$ e per α=90° $y' = \sqrt{m^2+2mz}$.

g) pertanto,per le stesse considerazione del punto d) su tale piano si ha una Ellisse di semiassi x’ e y’, e possiamo scrivere l’EQ. di Vag per un opportuno valore di δ

$$\begin{cases} \overline{CA}\cos\alpha = \sqrt{p^2+2pz}\cos\alpha = x' = \sqrt{q^2+2qz}\cos\delta \\ \overline{CA}\,\text{sen}\alpha = \sqrt{p^2+2pz}\,\text{sen}\alpha = y' = \sqrt{m^2+2mz}\,\text{sen}\delta \end{cases} \qquad tan\,\alpha = \frac{\sqrt{m^2+2mz}}{\sqrt{q^2+2qz}}\,tan\,\delta$$

$$\left(\sqrt{p^2+2pz}\right)^2 = \left(\sqrt{q^2+2qz}\right)^2\cos^2\delta + \left(\sqrt{m^2+2mz}\right)^2\sin^2\delta$$

per z=0 si riavrebbe l’Ellisse del piano xOy.
Tale *Paraboloide è* detto *Ellittico* in quanto su un qualunque piano x’Oy’ (vedi figura) è rappresentato da una Ellisse. Tuttavia la figura risulta deformata per α=90° in quanto(come si vede nella figura) i **vertici non coincidono**.

h)Per p=q=m (cioè il parametro p costante) si avrebbe un Paraboloide Circolare, e su un qualunque piano x’Cy’ una circonferenza.Inoltre in tale Paraboloide tutte le parabole avrebbe i **vertici coincidente**, sarebbe quindi un Paraboloide di rotazione.

Similmente alle Parabole viste sul piano possiamo anche fare:

$$(p+z)\cos\beta_3 = z; \quad p\cos\beta_3 = z(1-\cos\beta_3); \qquad z = \frac{p\cos\beta_3}{(1-\cos\beta_3)};$$

$$OA = (p+z) = \frac{p}{1-\cos\beta_3}; \qquad \begin{cases} \dfrac{p}{1-\cos\beta_3}\cos\beta_1 = x \\ \dfrac{p}{1-\cos\beta_3}\cos\beta_2 = y \\ \dfrac{p}{1-\cos\beta_3}\cos\beta_3 = z \end{cases}$$

cioè ottenere un Paraboloide in forma polare con z asse di simmetria e che useremo come formula per il grafico del relativo programma.
Avendo posto $\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3 = 1$ anche qui potrò utilizzare la formula ridotta già vista

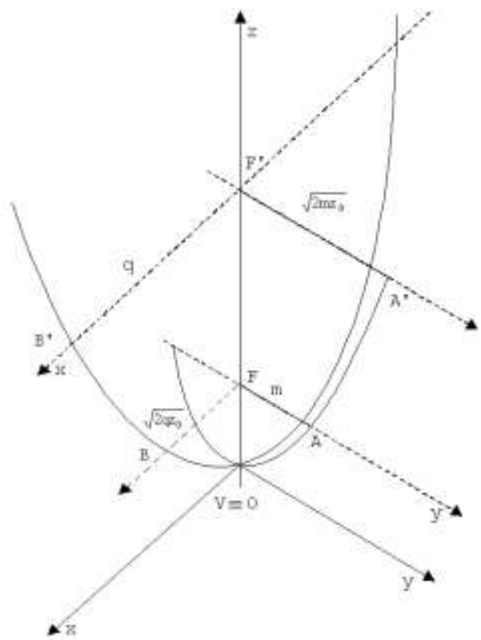
$$\begin{cases} \cos\beta_1 = \sin\beta_3\cos\beta_2 = \sin u\cos v \\ \cos\beta_2 = \sin\beta_3\sin\beta_2 = \sin u\sin v \\ \cos\beta_3 = \cos\beta_3 = \cos u \end{cases}$$ quadrando e sommando:

$$\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3 = \sin^2 u\,\cos^2 v + \sin^2 u\,\sin^2\sin v + \cos^2 u = 1$$

Nel Paraboloide, al posto del solo parametro p possiamo per ogni coordinato porre q,m,p; dove per q=m=p si riavrebbe la formula indicata di una parabola circolare.

PARABOLOIDE CON ORIGINE NEL VERTICE

Sia il Paraboloide con z asse di simmetria:



$$1*]\quad \begin{cases} \sqrt{z^2+2pz}\cos\beta_1 = x \\ \sqrt{z^2+2pz}\cos\beta_2 = y \\ \sqrt{z^2+2pz}\cos\beta_3 = z \end{cases} \qquad 2pz = x^2+y^2$$

a) La 1*] per x=0 o y=0 sappiamo essere l'equazione di una parabola con l'Origine nel Vertice.

b) Se tagliamo una tale parabola con un piano per il suo Fuoco, perpendicolare all'asse z e distante $z=z_0$ dal Vertice esso taglierà la parabola in un punto la cui distanza dall'asse z è $\sqrt{2pz_0}$; e se p è il parametro della parabola e z asse di simmetria per definizione sarà $z_0 = p/2$

c) Posta la condizione di variabilità del Parametro p, (**q ≥ p ≥ m**) per le stesse considerazioni viste nel paragrafo precedente possiamo,per un qualunque angolo δ di riferimento, scrivere una Eq. di Vag, che darà:

$$2*)\quad \begin{cases} p\cos\alpha = x = q\cos\delta & p^2 = q^2\cos^2\delta + m^2 sen^2\delta \\ p\, sen\alpha = y = m sen\delta & \tan\alpha = \dfrac{m}{q}\tan\delta \end{cases} \qquad p = \sqrt{q^2\cos^2\delta + m^2 sen^2\delta}$$

essendo α l'angolo tra il piano per l'asse z e l'asse delle x.

Dalla 2*) per $2z_0$: $2pz_0 = 2z_0\sqrt{q^2\cos^2\delta + m^2 sen^2\delta} = x^2+y^2$

che per $z_0=p/2$ diventa $p^2 = \left(q^2\cos^2\delta + m^2\sin^2\delta\right) = x^2+y^2$

d) Dunque il parametro p varierà per i valori di una Ellisse di semi assi positivi q ed m, ma varierà anche $z_0=p/2$, e al suo aumentare il punto F (nel nostro esempio il Fuoco della parabola) si sposterà verso l'alto, rispetto al Vertice (Origine).

e) Se tracciamo due piani per i Fuochi F e F',come in figura, per α=90° sarà FA=m e $F'A' = \sqrt{2mz_0}$ e per α=0° sarà F'B'=q e $FB = \sqrt{2qz_0}$ mentre le distanze relative saranno:

$$\overline{VA} = \sqrt{z^2+2mz} = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + m^2} = \frac{m}{2}\sqrt{5}\ ; \qquad \overline{VB} = \sqrt{z^2+2qz} = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + mq} = \frac{m}{2}\sqrt{1+4\frac{q}{m}}$$

$$\overline{VA'} = \sqrt{z^2+2mz} = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + mq} = \frac{q}{2}\sqrt{1+4\frac{m}{q}}\ ; \qquad \overline{VB'} = \sqrt{z^2+2qz} = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + q^2} = \frac{q}{2}\sqrt{5}$$

Tale Paraboloide con asse di simmetria z, ha per ogni piano perpendicolare a z una ellisse e perciò è detto Ellittico.

Per q=m=p (cioè p costante) avremo un Paraboloide, con i rispettivi Fuochi coincidenti, e per ogni piano perpendicolare a z una circonferenza anziché una ellisse ed è detto Circolare.

Anche in questo caso la formula grafica risolutiva,con zeta asse di simmetria, è dalla 1*):

$$z^2\cos^2\beta_3 + 2pz\cos^2\beta_3 = z^2 \qquad z = \frac{2p\cos\beta_3}{(1-\cos^2\beta_3)}\cos\beta_3$$

$$\overline{OA} = \frac{2p\cos\beta_3}{(\sin^2\beta_3)} = \frac{2p\cos\beta_3}{(\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{2p\cos\beta_3}{(\sin^2\beta_3)}\cos\beta_1 = x \\ \dfrac{2p\cos\beta_3}{(\sin^2\beta_3)}\cos\beta_2 = y \\ \dfrac{2p\cos\beta_3}{(\sin^2\beta_3)}\cos\beta_3 = z \end{cases}$$

Nel successivo capitolo "L'EQ. DI VAG E GLI ANGOLI NELLO SPAZIO" vedremo un Paraboloide ottenuto direttamente da ellissi sovrapposti. Analogamente a quanto fatto nel Cap. precedente possiamo usare la formula riduttiva $\begin{cases} \cos\beta_1 = \sin u\cos v \\ \cos\beta_2 = \sin u\sin v \\ \cos\beta_3 = \cos u \end{cases}$ e dare anzichè un solo parametro p per ogni coordinato tre parametri q,p,m con le stesse modalità e considerazione fatte.