

VI.BIS LE FIGURE NOTE SUPERFICI DI ROTAZIONE

SUPERFICI DI ROTAZIONE

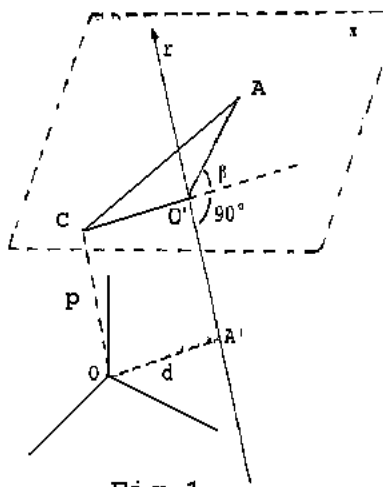


Fig. 1

Sia la retta r (α', β', γ') (Fig. 1) distante $OA' = d$ dall'origine e un punto $A(x, y, z; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ distante $O'A$ dalla retta r . Il piano per A e perpendicolare a r intersecherà questa nel punto O' ed avrà distanza $OC = p$ con *cos.dir.* di OC uguali a quelli della retta r di conseguenza $CO' = OA' = d$.

Su questo stesso piano saranno i segmenti $CA, CO', O'A$. Sia β l'angolo sul piano tra $O'A$ e il prolungamento di CO' , per cui l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{O'A} \cos \beta = x \\ \overline{O'A} \sin \beta = y \end{cases}$$

mentre $\overline{CA}^2 = \overline{O'A}^2 + d^2 + 2\overline{O'A} d \cos(180 - \beta)$

$$\overline{CA} = \pm \sqrt{\overline{O'A}^2 + d^2 - 2\overline{O'A} d \cos \beta}$$

Dalla Fig. 2 invece, che sintetizza la Fig. 1, nello spazio sarà:

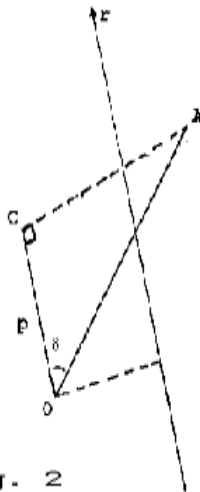


Fig. 2

$$\begin{cases} OA \sin \delta = CA = \pm \sqrt{\overline{O'A}^2 + d^2 + 2\overline{O'A} d \cos \beta} \\ OA \cos \delta = p = x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma' \end{cases}$$

(avendo p gli stessi angoli direttori della retta r)).

Se facciamo ruotare il punto A intorno alla retta e sullo stesso piano π perpendicolare a r e di distanza p avremo che A percorrerà una circonferenza di raggio $O'A = R$, ed r diventa un asse di simmetria, O' centro della

circonferenza governata dal valore di β .

Pertanto :

$$\begin{cases} OA \sin \delta = \pm \sqrt{R^2 + d^2 + 2Rd \cos \beta} \\ OA \cos \delta = p \end{cases}$$

$$\tan \delta = \frac{\pm \sqrt{R^2 + d^2 + 2Rd \cos \beta}}{p}$$

Se la retta $r)$ è asse di simmetria di una figura ruotata (Fig. 3) di cui Q ($Q \equiv A$ delle fig. precedenti) è un suo punto, possiamo intendere ogni suo punto Q che ruoti intorno all'asse $r)$ con Eq. di Vag identica a quella vista per la Fig.1,2:

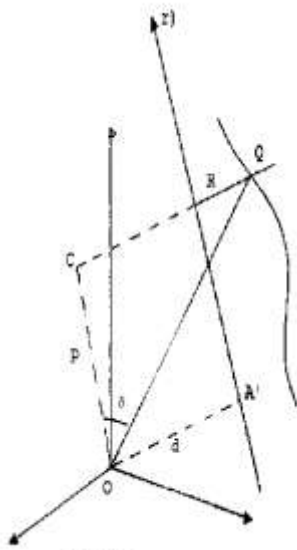


Fig. 3

$$\begin{cases} OQ \cos \delta = x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma' = p \\ OQ \sin \delta = \sqrt{R^2 + d^2 + 2Rd \cos \beta} \end{cases}$$

$$\overline{OQ}^2 = p^2 + R^2 + d^2 + 2Rd \cos \beta$$

se la retta $r)$ asse di rotazione (Fig. 4), passa per l'origine sarà $d=0$ $O \equiv A'$ e se $OC=p=z$ $OA''=R$ proiezione di CA sul piano xOy . Pertanto:

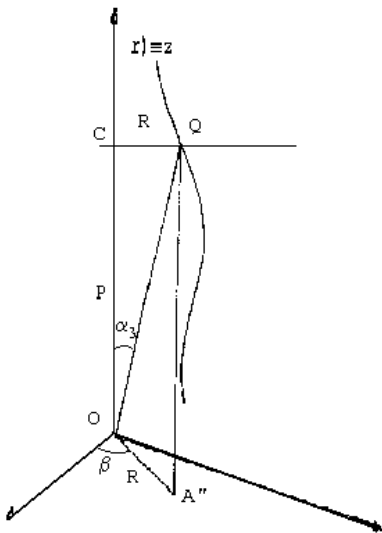


Fig. 4

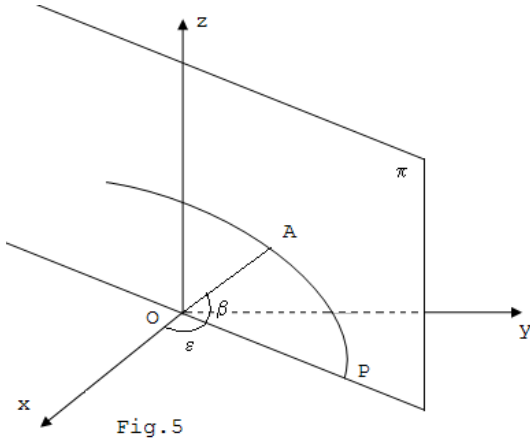
$$\cos \delta = \cos \alpha_3 \quad z = p$$

$$\begin{cases} OQ \cos \delta = OQ \cos \alpha_3 = p \\ OQ \sin \delta = OQ \sin \alpha_3 = R \end{cases}$$

$$\begin{cases} OQ \cos \alpha_1 = R \cos \beta = x \\ OQ \cos \alpha_2 = R \sin \beta = y \\ OQ \cos \alpha_3 = p = z \end{cases}$$

$$OQ = R \cos \beta \cos \alpha_1 + R \sin \beta \cos \alpha_2 + p \cos \alpha_3$$

ROTAZIONE DI UN PIANO CON FIGURA



In un piano π perpendicolare a xOy sia una ellisse come da Fig.5 e un suo punto di valore A(x_E, y_E) e come punto nello spazio i valori A(x, y, z; α₁, α₂, α₃) e l'angolo xÔP = ε.

Vediamo subito che, posti i valori parametrici:

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \beta = q \cos \alpha = x_E \\ \overline{OA} \sin \beta = m \sin \alpha = y_E = z \end{cases}$$

Dove x_E è la proiezione di OA sul piano xOy, quindi il punto A avrà nello spazio le coordinate:

$$x = x_E \cos \varepsilon \quad y = x_E \sin \varepsilon \quad z = y_E$$

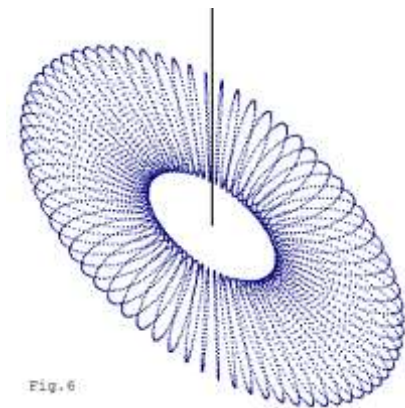
Dando ad x_E e a y_E i relativi valori parametrici avremo:

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \alpha_1 = x = q \cos \alpha \cos \varepsilon \\ \overline{OA} \cos \alpha_2 = y = q \cos \alpha \sin \varepsilon \\ \overline{OA} \cos \alpha_3 = z = y_E = m \sin \alpha \end{cases}$$

Al variare dell'angolo ε il punto P percorrerà una circonferenza sul piano xOy e quindi anche il piano π.

Le variabili sono dunque ε per quanto riguarda il piano ed α per quanto riguarda l'ellisse.

Se la condizione è che ad ogni variazione di ε si abbia 0° ≤ α ≤ 360° avremo un solido che sappiamo essere un Ellissoide circolare (vedi Cap VI "Le figure note nello spazio").



Se spostiamo il centro della ellisse nel punto C(C_x, 0) la figura ruoterà per intero intorno all'asse z: avremo così ottenuto la figura che è chiamata "toro", come in Fig.6 (in assonometria).

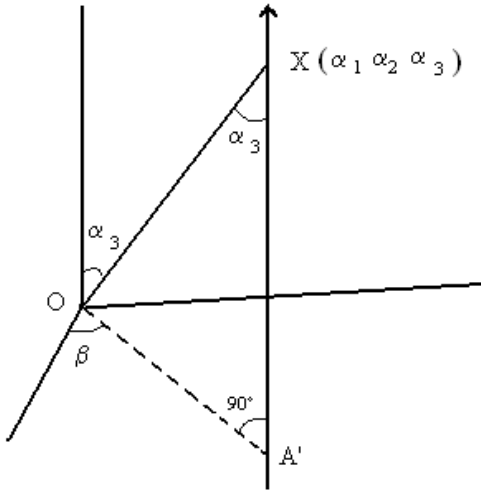
$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \alpha_1 = x = (q \cos \alpha + \overline{OC_x}) \cos \varepsilon \\ \overline{OA} \cos \alpha_2 = y = (q \cos \alpha + \overline{OC_x}) \sin \varepsilon \\ \overline{OA} \cos \alpha_3 = z = y_E = m \sin \alpha \end{cases}$$

La stessa formula si può usare per far ruotare una iperbole o una parabola con i propri valori.

(Vedi PROGRAMMI SULLO SPAZIO: Cap.VI° Bis Rotazione Ellisse; Rotazione Iperbole; Rotazione Parabola.)

CILINDRO

Sia l'Eq. di Vag di una retta (nella figura r) perpendicolare al piano xOy)



$$\begin{cases} OX \operatorname{sen} \alpha_3 = OA' & \text{distanza (raggio)} \\ OX \cos \alpha_3 = A'X & \text{altezza} \end{cases}$$

$$OX = A'X \cos \alpha_3 + OA' \operatorname{sen} \alpha_3$$

dove α_3 e' l' angolo del punto X.

Sara' :

$$A'X = \frac{OA'}{\tan \alpha_3} = z \quad \text{altezza}$$

$$*) \begin{cases} OX \cos \alpha_1 = x = OA' \cos \beta \\ OX \cos \alpha_2 = y = OA' \operatorname{sen} \beta \\ OX \cos \alpha_3 = z = OA' \frac{\cos \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_3} \end{cases} \quad \text{Eq. di Vag}$$

$$**) \begin{cases} \frac{OA'}{\operatorname{sen} \alpha_3} \cos \alpha_1 = OA' \cos \beta = x \\ \frac{OA'}{\operatorname{sen} \alpha_3} \cos \alpha_2 = OA' \operatorname{sen} \beta = y \\ \frac{OA'}{\operatorname{sen} \alpha_3} \cos \alpha_3 = OA' \frac{1}{\tan \alpha_3} = \overline{A'X} = z \end{cases}$$

Eq. di Vag di un Cilindro la cui altezza e' data dal valore dell'angolo α_{\max} cioe' $0 < \alpha_3 < \alpha_{\max}$ la cilindricita' da $0 < \beta < 360$ la **forma da OA'**.

Se ad ogni valore di α_3 calcoliamo tutto β si avra' il cilindro dato

da figure di OA' sovrapposte; se per ogni valore di β e quindi per ogni figura di OA' , calcoliamo tutti i valori di α_3 il cilindro sar'a rappresentato da infinite rette parallele all'asse (cilindro rigato).

Riducendo la **) riscriviamone la Eq. di Vag:

$$\begin{cases} 1 \cos \alpha_1 = \operatorname{sen} \alpha_3 \cos \beta \\ 1 \cos \alpha_2 = \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \beta \\ 1 \cos \alpha_3 = \cos \alpha_3 \end{cases} \quad \begin{aligned} 1 &= (\operatorname{sen} \alpha_3 \cos \beta) \cos \alpha_1 + (\operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \beta) \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 \cos \alpha_3 \\ (1 - \cos^2 \alpha_3) &= \operatorname{sen} \alpha_3 \cos \beta \cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \beta \cos \alpha_2 \end{aligned}$$

$$a) \operatorname{sen} \alpha_3 = \cos \beta \cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha_2$$

Espressione gia' vista nel Cap. II in " IL PUNTO NELLO SPAZIO "

Se moltiplichiamo l'espressione a) per OX , e aggiungiamo

$$OX \cos \alpha_3 = A'X \quad (\text{vedi fig.):}$$

$$\begin{cases} OX \operatorname{sen} \alpha_3 = OX \cos \alpha_1 \cos \beta + OX \cos \alpha_2 \operatorname{sen} \beta = x \cos \beta + y \operatorname{sen} \beta = OA' \\ OX \cos \alpha_3 = OA' \frac{1}{\tan \alpha_3} \end{cases}$$

Eq. implicita da cui siamo partiti.

Per esempio in *) se OA' rappresenta una ellisse avremo un cilindro a base ellittica di altezza p₃:

$$\begin{cases} OX \cos \alpha_1 = OA' \cos \beta = q \cos \alpha & OA' = \sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha} \\ OX \cos \alpha_2 = OA' \sin \beta = m \sin \alpha \\ OX \cos \alpha_3 = p_3 = z & \overline{OX}^2 = q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha + z^2 \end{cases}$$

(ad ogni valore di α₃ corrisponderanno tutti i valori di α per 0 < α < 360°)

Se è dato il valore p = altezza totale del cilindro, l'altezza relativa può sempre essere interpretata come P₃ = p sin μ₃ cioè è data per un opportuno μ per cui l'espressione diventa:

$$\begin{cases} OX \cos \alpha_1 = OA' \cos \beta = q \cos \alpha & OA' = \sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha} \\ OX \cos \alpha_2 = OA' \sin \beta = m \sin \alpha \\ OX \cos \alpha_3 = z = p \sin \mu & \overline{OX}^2 = q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha + p^2 \sin^2 \mu \end{cases}$$

Dove per ogni valore di μ è data una figura OA' per il cilindro sovrapposto e viceversa per il cilindro rigato.

2OA'π = 2π OX senα₃ perimetro circonferenza base OA' = R raggio

perimetro ellisse base 2OA' = q + m assi

2π $\frac{\overline{OA'}}{\overline{A'X}}$ = 2π $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA'}} \frac{1}{\tan \alpha_3}$ = 2π $\frac{\overline{OX}^2}{\overline{OA'}} \cos \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_3$ perim. lat. cilindro

π $\frac{\overline{OA'}^2}{\overline{A'X}}$ = π $\frac{\overline{OA'}^3}{\tan \alpha_3}$ = π $\overline{OX}^3 \cos \alpha_3 \operatorname{sen}^2 \alpha_3$ volume cilindro

CILINDRO A BASE CIRCOLARE

$$\overline{OA} = R \begin{cases} OX \cos \alpha_1 = R \cos \beta = x \\ OX \cos \alpha_2 = R \sin \beta = y \\ OX \cos \alpha_3 = \frac{R}{\tan \alpha_3} = z = p \sin \mu \end{cases} \quad \overline{OX}^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \alpha_3}$$

CILINDRO A BASE ELLITTICA

$$\overline{OA'} = \sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha} \begin{cases} OX \cos \alpha_1 = q \cos \alpha = x \\ OX \cos \alpha_2 = m \sin \alpha = y \\ OX \cos \alpha_3 = \frac{\overline{OA'}}{\tan \alpha_3} = z = p \sin \mu \end{cases} \quad \overline{OX}^2 = \frac{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_3}$$

CONO

Sia un cono di altezza $OC=p$, per un qualunque valore di μ , compreso $0 < \mu < 90^\circ$, si avrà

$$OC' = p \operatorname{sen} \mu \quad CC' = p(1 - \operatorname{sen} \mu)$$

Per $X(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ avremo

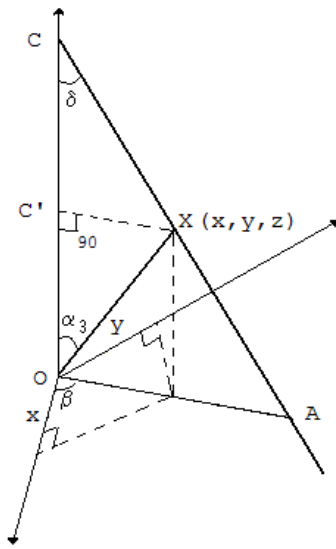
$$C' \hat{O} X = \alpha_3 \quad \tan \delta = \frac{OA}{p} = \frac{C'X}{CC'} \quad C'X = \overline{OA} \frac{CC'}{p}$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{C'X}{OC'} \quad OC' = \frac{OA(1 - \sin \mu)}{\tan \alpha_3}$$

$$C'X = OA \frac{CC'}{p} = OA(1 - \operatorname{sen} \mu)$$

$$\begin{cases} C'X \cos \beta = OA(1 - \operatorname{sen} \mu) \cos \beta = x \\ C'X \operatorname{sen} \beta = OA(1 - \operatorname{sen} \mu) \operatorname{sen} \beta = y \end{cases}$$

Eq.di Vag



$$\overline{OX}^2 = \overline{C'X}^2 + \overline{OC'}^2 = \overline{OA}^2 (1 - \sin \mu)^2 + p^2 \sin^2 \mu$$

$$\begin{cases} OX \cos \alpha_3 = OC' = p \operatorname{sen} \mu \\ OX \operatorname{sen} \alpha_3 = C'X = OA(1 - \operatorname{sen} \mu) \end{cases} \quad \text{Eq. di Vag .}$$

$$\begin{cases} OX \cos \alpha_1 = x = OA(1 - \operatorname{sen} \mu) \cos \beta \\ OX \cos \alpha_2 = y = OA(1 - \operatorname{sen} \mu) \operatorname{sen} \beta \\ OX \cos \alpha_3 = z = \frac{OA(1 - \operatorname{sen} \mu)}{\tan \alpha_3} = p \operatorname{sen} \mu \end{cases}$$

$$OX^2 (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) = OX^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_3 = OA^2 (1 - \operatorname{sen} \mu)^2$$

$$\begin{cases} OX \sin \alpha_3 = OA(1 - \sin \mu) \\ OX \cos \alpha_3 = \frac{OA(1 - \sin \mu)}{\tan \alpha_3} = p \sin \mu \end{cases}$$

se anziché $(\operatorname{sen} \mu)$ avessimo posto $(\cos \mu)$ il cono avrebbe avuto il vertice nell'origine.

Per ogni valore di $0 \leq \mu \leq 90^\circ$ dobbiamo fare $0 \leq \beta \leq 360^\circ$ creando una pila di figure una sopra l'altra partendo dalla più grande fino alla più piccola o viceversa. Se per ogni valori di $0 \leq \beta \leq 360^\circ$ facciamo $0 \leq \mu \leq 90^\circ$ avremo delle righe (generatrici) una accanto all'altra.

Ponendo μ compreso tra un valore massimo minore di 90° si avrà un cono tronco.

CONO (CONTINUA)

I valori di OA determinano la figura:

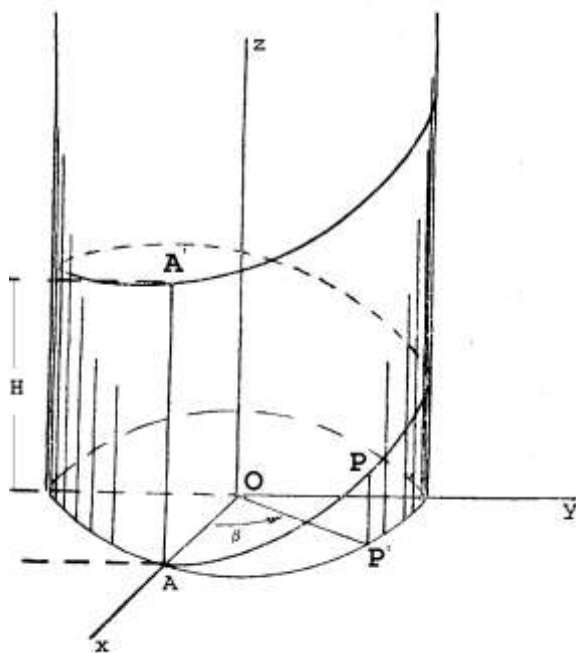
CONO CIRCOLARE

$$\begin{cases} R(1 - \operatorname{sen}\mu) \cos \beta = x & 0 \leq \beta \leq 360^\circ \text{ per ogni valore di } \mu \\ R(1 - \operatorname{sen}\mu) \operatorname{sen}\beta = y & 0 \leq \mu \leq 90^\circ \\ p \operatorname{sen}\mu = z \end{cases}$$

CONO ELLITTICO

$$\begin{cases} q \cos \alpha (1 - \operatorname{sen}\mu) = x & 0 \leq \alpha \leq 360^\circ \text{ per ogni valore di } \mu \\ m \operatorname{sen}\alpha (1 - \operatorname{sen}\mu) = y & 0 \leq \mu \leq 90^\circ \\ p \operatorname{sen}\mu = z \end{cases}$$

ELICA



Dato un cilindro o un cono, un punto che si muova sulla sua superficie con movimento rotatorio e traslatorio lungo l'asse z (cioè che la sua traiettoria ne incontri le generatrici sotto un angolo costante) forma una Elica.

Dall'Eq. di Vag già vista per il cilindro:

$$\begin{cases} OX \cos \alpha_1 = x = OA \cos \beta \\ OX \cos \alpha_2 = y = OA \sin \beta \\ OX \cos \alpha_3 = z = p \sin \mu \end{cases}$$

se H rappresenta la distanza di due punti A e A', H=AA', dopo che β abbia compiuto un intero giro e sia tornato sulla stessa generatrice di partenza, avremo che la loro posizione sarà:

$z = H$; $2\pi = \beta$ (β in radianti) moltiplicando queste due uguaglianze

$$z = \beta \frac{H}{2\pi} \quad H = \text{passo} \quad z = \beta h \quad h = \frac{H}{2\pi} = \text{passoridotto}$$

ELICA CILINDRICA CIRCOLARE: $\overline{OA} = R$

ELICA CILINDRICA ELLITTICA:

$$\overline{OA} = \sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha} \quad q \cos \alpha = x \quad m \sin \alpha = y$$

$$\begin{cases} OX \cos \alpha_1 = x = OA \cos \beta = q \cos \alpha \\ OX \cos \alpha_2 = y = OA \sin \beta = m \sin \alpha \\ OX \cos \alpha_3 = z = \beta h \end{cases} \quad \overline{OX}^2 = \overline{OA}^2 + (\beta h)^2$$

$$\begin{cases} OX \sin \alpha_3 = \sqrt{x^2 + y^2} = OA & \overline{OX}^2 = \overline{OA}^2 + (\beta h)^2 \\ OX \cos \alpha_3 = z = \beta h & \tan \alpha_3 = \frac{OA}{\beta h} \end{cases}$$

Dall'Eq. di Vag già vista per il CONO:

$$\begin{cases} OX \cos \alpha_1 = x = OA(1 - \sin \mu) \cos \beta \\ OX \cos \alpha_2 = y = OA(1 - \sin \mu) \sin \beta \\ OX \cos \alpha_3 = z = \frac{OA(1 - \sin \mu)}{\tan \alpha_3} = p \sin \mu \end{cases}$$

e con lo stesso significato visto per l' Elica cilindrica per H e h e $z = \frac{\beta H}{2\pi} = \beta h$ abbiamo l' equazione:

ELICA CONICA ELLITTICA: $\overline{OA} = \sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha}$

$$\begin{cases} OX \cos \alpha_1 = x = \left(OA - \frac{\beta H}{2\pi}\right) \cos \beta = \left(q - \frac{\beta H}{2\pi}\right) \cos \alpha & \overline{OX}^2 = \overline{OA}^2 \left(OA - \frac{\beta H}{2\pi}\right)^2 + (\beta h)^2 \\ OX \cos \alpha_2 = y = \left(OA - \frac{\beta H}{2\pi}\right) \sin \beta = \left(m - \frac{\beta H}{2\pi}\right) \sin \alpha & \tan \alpha_3 = \frac{\left(OA - \frac{\beta H}{2\pi}\right)}{\beta h} \\ OX \cos \alpha_3 = z = \frac{\left(OA - \frac{\beta H}{2\pi}\right)}{\tan \alpha_3} = \beta h \end{cases}$$

L'aver cambiato $OA(1 - \sin \mu)$ con $\left(OA - \frac{\beta H}{2\pi}\right)$ sta a significare che ad ogni valore di β o α il vettore-elica salendo verso la sommità del cono deve restringersi: resta inteso che $OA > \frac{\beta H}{2\pi}$ ed anche

$$(q, m) > \frac{\beta H}{2\pi} .$$

ELICA CONICA CIRCOLARE: $\overline{OA} = R \quad (q = m)$

LA CHIOCCIOLA

Prendendo spunto dall'elica e dalle spirali piane possiamo ottenere una chiocciola partendo dalla sfera:

$$\left. \begin{aligned} R \cos \alpha_1 = x = q\beta \cos \beta \\ R \cos \alpha_2 = y = m\beta \sin \beta \end{aligned} \right\} \text{Spirale Ellittica - Circolare (Spirale di Archimede)}$$

$$R \cos \alpha_3 = z = \beta \frac{H}{2\pi} \quad \text{Valore del passo}$$

Il valore H rappresenta il valore dello spostamento lungo l'asse della $z = \beta \frac{H}{2\pi}$:

Volendo si può procedere analogamente per le altre spire.