VI.BIS LE FIGURE NOTE SUPERFICI DI ROTAZIONE

SUPERFICI DI ROTAZIONE

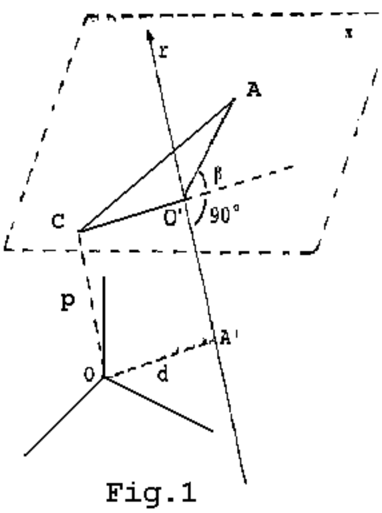


Fig.1

Sia la retta r) (α',β',γ') (Fig. 1) distante OA'=d dall'origine e un punto $A(x,y,z,;\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ distante O'A dalla retta r).Il piano per A e perpendicolare a r) intersecherà questa nel punto O' ed avrà distanza OC=p con cos.dir. di OC uguali a quelli della retta r) di conseguenza CO'=OA'=d.
Su questo stesso piano saranno i segmenti CA, CO', O'A. Sia β l'angolo sul piano tra O'A e il prolungamento di CO', per cui l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{O'A}\cos\beta = x \\ \overline{O'A}sen\beta = y \end{cases}$$

mentre $\overline{CA}^2 = \overline{O'A}^2 + d^2 + 2\overline{O'A}\ d\cos(180-\beta)$

$$\overline{CA} = \pm\sqrt{\overline{O'A}^2 + d^2 - 2\overline{O'A}\ d\cos\beta}$$

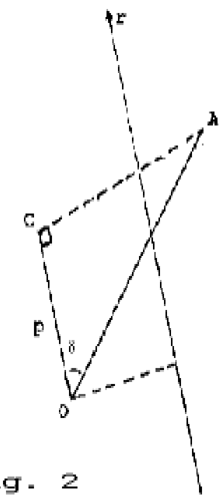


Fig. 2

Dalla Fig. 2 invece, che sintetizza la Fig. 1, nello spazio sara':

$$\begin{cases} OA\sin\delta = CA = \pm\sqrt{\overline{O'A}^2 + d^2 + 2\overline{O'A}\ d\cos\beta} \\ OA\cos\delta = p = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' \end{cases}$$

(avendo p gli stessi angoli direttori della retta r)).
Se facciamo ruotare il punto A intorno alla retta e sullo stesso piano π perpendicolare a r) e di distanza p avremo che A percorrera' una circonferenza di raggio O'A=R, ed r) diventa un asse di simmetria, O' centro della circonferenza governata dal valore di β.
Pertanto :

$$\begin{cases} OA\,\mathrm{sen}\,\delta = \pm\sqrt{R^2 + d^2 + 2Rd\cos\beta} \\ OA\cos\delta = p \end{cases}$$

$$\tan\delta = \frac{\pm\sqrt{R^2 + d^2 + 2Rd\cos\beta}}{p}$$

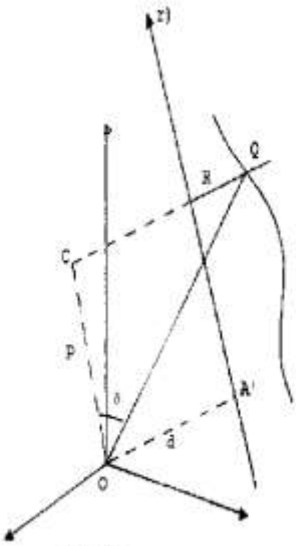


Fig.3

Se la retta r) è asse di simmetria di una figura ruotata (Fig. 3) di cui Q ($Q \equiv A$ delle fig. precedenti) e' un suo punto, possiamo intendere ogni suo punto Q che ruoti intorno all'asse r) con Eq. di Vag identica a quella vista per la Fig.1,2:

$$\begin{cases} OQ\cos\delta = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = p \\ OQ\,\text{sen}\delta = \sqrt{R^2 + d^2 + 2Rd\cos\beta} \end{cases}$$

$$\overline{OQ}^2 = p^2 + R^2 + d^2 + 2Rd\cos\beta$$

se la retta r) asse di rotazione (Fig. 4), passa per l'origine sarà d=0 O≡A' e se OC=p=z OA"=R proiezione di CA sul piano xOy. Pertanto:

$$\cos\delta = \cos\alpha_3 \quad z = p$$

$$\begin{cases} OQ\cos\delta = OQ\cos\alpha_3 = p \\ OQ\,\text{sen}\,\delta = OQ\,\text{sen}\,\alpha_3 = R \end{cases}$$

$$\begin{cases} OQ\cos\alpha_1 = R\cos\beta = x \\ OQ\cos\alpha_2 = R\,\text{sen}\beta = y \\ OQ\cos\alpha_3 = p = z \end{cases}$$

$$OQ = R\cos\beta\cos\alpha_1 + R\text{sen}\beta\cos\alpha_2 + p\cos\alpha_3$$

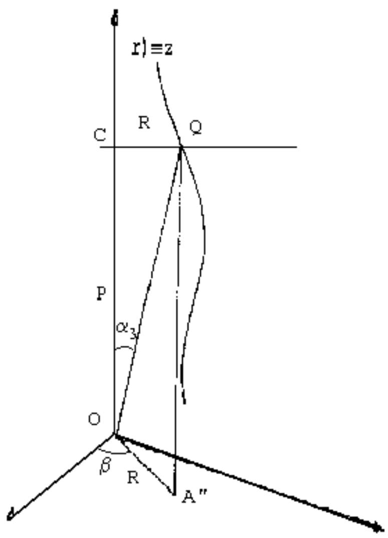


Fig. 4

ROTAZIONE DI UN PIANO CON FIGURA

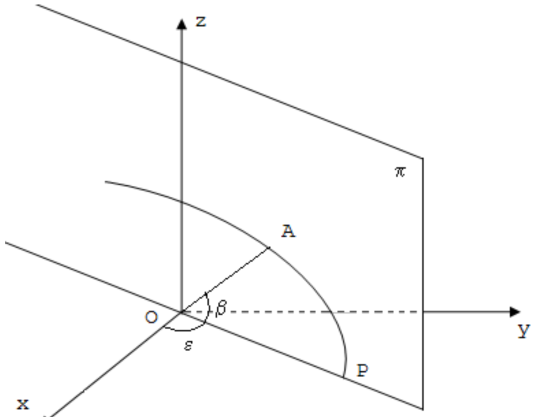


Fig.5

In un piano π perpendicolare a xOy sia una ellisse come da Fig.5 e un suo punto di valore $A(x_E, y_E)$ e come punto nello spazio i valori $A(x, y, z; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e l'angolo $x\hat{O}P = \varepsilon$.

Vediamo subito che, posti i valori parametrici:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = q\cos\alpha = x_E \\ \overline{OA}\sin\beta = m\sin\alpha = y_E = z \end{cases}$$

Dove x_E è la proiezione di OA sul piano xOY, quindi il punto A avrà nello spazio le coordinate:

$$x = x_E\cos\varepsilon \qquad y = x_E\sin\varepsilon \qquad z = y_E$$

Dando ad x_E e a y_E i relativi valori parametrici avremo:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha_1 = x = q\cos\alpha\cos\varepsilon \\ \overline{OA}\cos\alpha_2 = y = q\cos\alpha\sin\varepsilon \\ \overline{OA}\cos\alpha_3 = z = y_E = m\sin\alpha \end{cases}$$

Al variare dell'angolo ε il punto P percorrerà una circonferenza sul piano xOy e quindi anche il piano π.
Le variabili sono dunque ε per quanto riguarda il piano ed α per quanto riguarda l'ellisse.
Se la condizione è che ad ogni variazione di ε si abbia $0° \le \alpha \le 360°$ avremo un solido che sappiamo essere un Ellissoide circolare (vedi Cap VI "Le figure note nello spazio".

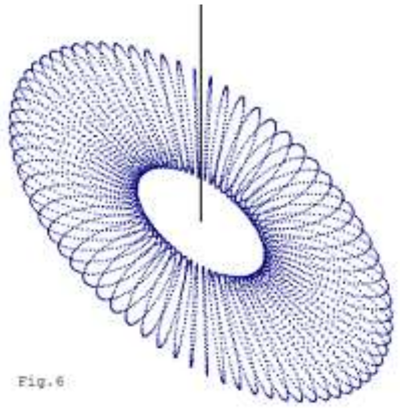


Fig.6

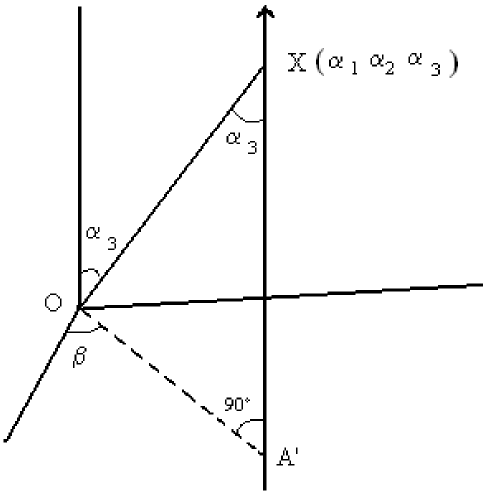
Se spostiamo il centro della ellisse nel punto $C(C_x, 0)$ la figura ruoterà per intero intorno all'asse z: avremo così ottenuto la figura che è chiamata "toro", come in Fig.6 (in assonometria).

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\alpha_1 = x = (q\cos\alpha + \overline{OC_x})\cos\varepsilon \\ \overline{OA}\cos\alpha_2 = y = (q\cos\alpha + \overline{OC_x})\sin\varepsilon \\ \overline{OA}\cos\alpha_3 = z = y_E = m\sin\alpha \end{cases}$$

La stessa formula si può usare per far ruotare una iperbole o una parabola con i propri valori.
(Vedi PROGRAMMI SULLO SPAZIO: Cap.VI° Bis Rotazione Ellisse; Rotazione Iperbole; Rotazione Parabola.)

CILINDRO

Sia l'Eq. di Vag di una retta (nella figura r) perpendicolare al piano xOy)



$$\begin{cases} OX sen\alpha_3 = OA' & \text{distanza (raggio)} \\ OX\cos\alpha_3 = A'X & \text{altezza} \end{cases}$$

$$OX = A'X\cos\alpha_3 + OA' sen\alpha_3$$

dove α_3 e' l' angolo del punto X.

Sara':

$$A'X = \frac{OA'}{tan\,\alpha_3} = z \quad \text{altezza}$$

$$*)\ \begin{cases} OX\cos\alpha_1 = x = OA'\cos\beta \\ OX\cos\alpha_2 = y = OA'\,sen\beta \qquad \text{Eq.di Vag} \\ OX\cos\alpha_3 = z = OA'\,\dfrac{\cos\alpha_3}{sen\alpha_3} \end{cases}$$

$$**)\ \begin{cases} \dfrac{\overline{OA'}}{sen\alpha_3}\cos\alpha_1 = OA'\cos\beta = x \\ \dfrac{\overline{OA'}}{sen\alpha_3}\cos\alpha_2 = OA'\,sen\beta = y \\ \dfrac{\overline{OA'}}{sen\alpha_3}\cos\alpha_3 = OA'\,\dfrac{1}{\tan\alpha_3} = \overline{A'X} = z \end{cases}$$

Eq. di Vag di un Cilindro la cui altezza e' data dal valore dell'angolo α_{max} cioè $0 < \alpha_3 < \alpha_{max}$ la cilindricita' da $0 < \beta < 360$ la **forma da OA'**.

Se ad ogni valore di α_3 calcoliamo tutto β si avrà il cilindro dato da figure di OA' sovrapposte; se per ogni valore di β e quindi per ogni figura di OA', calcoliamo tutti i valori di α_3 il cilindro sarà rappresentato da infinite rette parallele all'asse (cilindro rigato).

Riducendo la **) riscriviamone la Eq. di Vag:

$$\begin{cases} 1\cos\alpha_1 = sen\alpha_3\cos\beta \\ 1\cos\alpha_2 = sen\alpha_3 sen\beta \\ 1\cos\alpha_3 = \cos\alpha_3 \end{cases}$$

$$1 = (sen\alpha_3\cos\beta)\cos\alpha_1 + (sen\alpha_3 sen\beta)\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3\cos\alpha_3$$

$$(1-\cos^2\alpha_3) = sen\alpha_3\cos\beta\cos\alpha_1 + sen\alpha_3 sen\beta\cos\alpha_2$$

$$a)\quad sen\alpha_3 = \cos\beta\cos\alpha_1 + sen\beta\cos\alpha_2$$

Espressione già vista nel Cap. II in " IL PUNTO NELLO SPAZIO"

Se moltiplichiamo l'espressione a) per OX, e aggiungiamo $OX\cos\alpha_3 = A'X$ (vedi fig.):

$$\begin{cases} OX\, sen\alpha_3 = OX\cos\alpha_1\cos\beta + OX\cos\alpha_2 sen\beta = x\cos\beta + y sen\beta = OA' \\ OX\cos\alpha_3 = OA'\dfrac{1}{\tan\alpha_3} \end{cases}$$

Eq. implicita da cui siamo partiti.

Per esempio in *) se OA' rappresenta una ellisse avremo un cilindro a base ellittica di altezza p_3:

$$\begin{cases} OX\cos\alpha_1 = OA'\cos\beta = q\cos\alpha & OA' = \sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2\sin^2\alpha} \\ OX\cos\alpha_2 = OA'\sin\beta = m\sin\alpha & \\ OX\cos\alpha_3 = p_3 = z & \overline{OX}^2 = q^2\cos^2\alpha + m^2\sin^2\alpha + z^2 \end{cases}$$

(ad ogni valore di α_3 corrisponderanno tutti i valori di α per $0 < \alpha < 360°$)

Se è dato il valore p = altezza totale del cilindro, l'altezza relativa può sempre essere interpretata come $P_3 = p\sin\mu_3$ cioè è data per un opportuno μ per cui l'espressione diventa:

$$\begin{cases} OX\cos\alpha_1 = OA'\cos\beta = q\cos\alpha & OA' = \sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2\sin^2\alpha} \\ OX\cos\alpha_2 = OA'\sin\beta = m\sin\alpha & \\ OX\cos\alpha_3 = z = p\sin\mu & \overline{OX}^2 = q^2\cos^2\alpha + m^2\sin^2\alpha + p^2\sin^2\mu \end{cases}$$

Dove per ogni valore di μ è data una figura OA' per il cilindro sovrapposto e viceversa per il cilindro rigato.

****

$2OA'\pi = 2\pi OX\, sen\alpha_3$ perimetro circonferenza base OA'=R raggio

perimetro ellisse base $2\overline{OA'} = q + m$ assi

$2\pi\,\overline{OA'}\,\overline{A'X} = 2\pi\,\overline{OA'}\,\overline{OA'}\dfrac{1}{\tan\alpha_3} = 2\pi\,\overline{OX}^2\cos\alpha_3\, sen\alpha_3$ perim. lat. cilindro

$\pi\,\overline{OA'}^2\,\overline{A'X} = \pi\,\overline{OA'}^3\dfrac{1}{\tan\alpha_3} = \pi\,\overline{OX}^3\cos\alpha_3\, sen^2\alpha_3$ volume cilindro

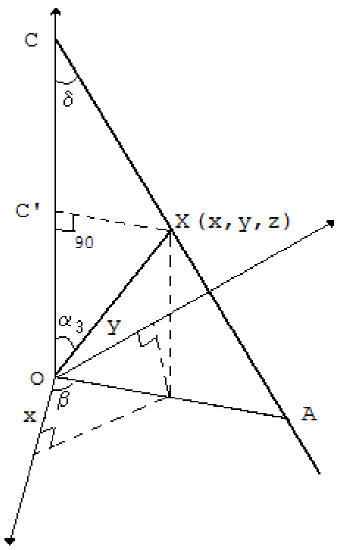
CILINDRO A BASE CIRCOLARE

$$\overline{OA'} = R \begin{cases} OX\cos\alpha_1 = R\cos\beta = x \\ OX\cos\alpha_2 = Rsen\beta = y \\ OX\cos\alpha_3 = \dfrac{R}{\tan\alpha_3} = z = p\sin\mu \end{cases} \qquad \overline{OX}^2 = \frac{R^2}{sen^2\alpha_3}$$

CILINDRO A BASE ELLITTICA

$$\overline{OA'} = \sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2 sen^2\alpha} \begin{cases} OX\cos\alpha_1 = q\cos\alpha = x \\ OX\cos\alpha_2 = msen\alpha = y \\ OX\cos\alpha_3 = \dfrac{\overline{OA'}}{\tan\alpha_3} = z = p\sin\mu \end{cases} \qquad \overline{OX}^2 = \frac{q^2\cos^2\alpha + m^2 sen^2\alpha}{sen^2\alpha_3}$$

CONO



Sia un cono di altezza OC=p , per un qualunque valore di μ , compreso 0 < μ < 90°, si avrà

$OC' = p\,sen\mu \qquad CC' = p(1 - sen\mu)$

Per X(α_1,α_2,α_3) avremo

$$C'\hat{O}X = \alpha_3 \qquad \tan\delta = \frac{OA}{p} = \frac{C'X}{CC'} \qquad C'X = \overline{OA}\frac{CC'}{p}$$

$$\tan\alpha_3 = \frac{C'X}{OC'} \qquad OC' = \frac{OA(1-\sin\mu)}{\tan\alpha_3}$$

$$C'X = OA\frac{CC'}{p} = OA(1 - sen\mu)$$

$$\begin{cases} C'X\cos\beta = OA(1-sen\mu)\cos\beta = x \\ C'X\,sen\beta = OA(1-sen\mu)\;\;sen\beta = y \end{cases} \qquad \text{Eq.di Vag}$$

$$\overline{OX}^2 = \overline{C'X}^2 + \overline{OC'}^2 = \overline{OA}^2(1-\sin\mu)^2 + p^2\sin^2\mu$$

$$\begin{cases} OX\cos\alpha_3 = OC' = p\,sen\mu \\ OX\,sen\alpha_3 = C'X = OA(1-sen\mu) \end{cases}$$ Eq.di Vag .

$$\begin{cases} OX\cos\alpha_1 = x = OA(1-sen\mu)\cos\beta \\ OX\cos\alpha_2 = y = OA(1-sen\mu)\;\;sen\beta \\ OX\cos\alpha_3 = z = \dfrac{OA(1-sen\mu)}{\tan\alpha_3} = p\,sen\mu \end{cases}$$

$$OX^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2) = OX^2 sen^2\alpha_3 = OA^2(1-sen\mu)^2$$

$$\begin{cases} OX\sin\alpha_3 = OA(1-\sin\mu) \\ OX\cos\alpha_3 = \dfrac{OA(1-\sin\mu)}{\tan\alpha_3} = p\sin\mu \end{cases}$$

se anziché (sen μ) avessimo posto (cos μ) il cono avrebbe avuto il vertice nell'origine.
Per ogni valore di $0 \le \mu \le 90°$ dobbiamo fare $0 \le \beta \le 360°$ creando una pila di figure una sopra l'altra partendo dalla più grande fino alla più piccola o viceversa. Se per ogni valori di $0 \le \beta \le 360°$ facciamo $0 \le \mu \le 90°$ avremo delle righe (generatrici) una accanto all'altra.
Ponendo μ compreso tra un valore massimo minore di 90° si avrà un cono tronco.

CONO (CONTINUA)

I valori di OA determinano la figura:

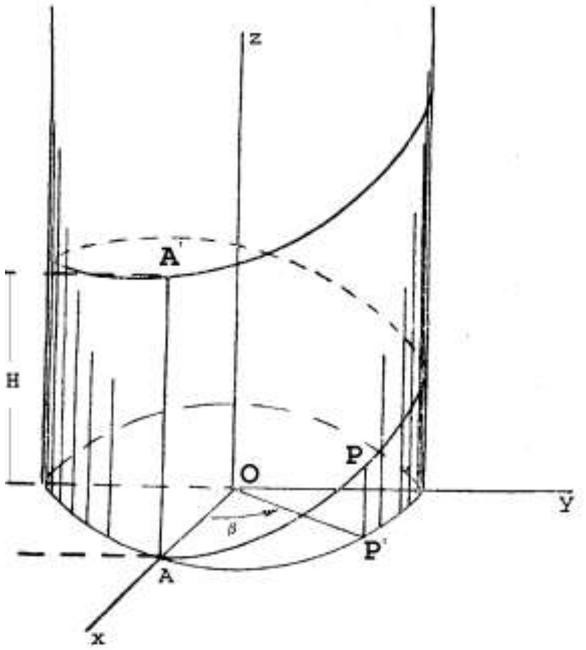
CONO CIRCOLARE

$$\begin{cases} R(1-sen\mu)\cos\beta = x & 0 \leq \beta \leq 360° \text{ per ogni valore di} \\ R(1-sen\mu)sen\beta = y & 0 \leq \mu \leq 90° \\ psen\mu = z & \end{cases}$$

CONO ELLITTICO

$$\begin{cases} q\cos\alpha(1-sen\mu) = x & 0 \leq \alpha \leq 360° \text{ per ogni valore di} \\ m\,sen\alpha(1-sen\mu) = y & 0 \leq \mu \leq 90° \\ psen\mu = z & \end{cases}$$

ELICA



Dato un cilindro o un cono, un punto che si muova sulla sua superficie con movimento rotatorio e traslatorio lungo l'asse z (cioè che la sua traiettoria ne incontri le generatrici sotto un angolo costante) forma una Elica.

Dall'Eq. di Vag già vista per il cilindro:

$$\begin{cases} OX\cos\alpha_1 = x = OA\cos\beta \\ OX\cos\alpha_2 = y = OA\,\mathrm{sen}\,\beta \\ OX\cos\alpha_3 = z = p\,\mathrm{sen}\,\mu \end{cases}$$

se H rappresenta la distanza di due punti A e A', H=AA', dopo che β abbia compiuto un intero giro e sia tornato sulla stessa generatrice di partenza, avremo che la loro posizione sarà:

$z = H;$ $\quad 2\pi = \beta$ (β in radianti) moltiplicando queste due uguaglianze

$z = \beta\dfrac{H}{2\pi}$ $\quad H = \text{passo}$ $\quad z = \beta h$ $\quad h = \dfrac{H}{2\pi} = \text{passo ridotto}$

ELICA CILINDRICA CIRCOLARE: $\overline{OA} = R$

ELICA CILINDRICA ELLITTICA:

$\overline{OA} = \sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}$ $\quad q\cos\alpha = x$ $\quad m\sin\alpha = y$

$$\begin{cases} OX\cos\alpha_1 = x = OA\cos\beta = q\cos\alpha \\ OX\cos\alpha_2 = y = OA\,sen\beta = m\sin\alpha \\ OX\cos\alpha_3 = z = \beta h \end{cases} \qquad \overline{OX}^2 = \overline{OA}^2 + (\beta h)^2$$

$$\begin{cases} OX\sin\alpha_3 = \sqrt{x^2+y^2} = OA \\ OX\cos\alpha_3 = z = \beta h \end{cases} \qquad \overline{OX}^2 = \overline{OA}^2 + (\beta h)^2 \qquad \tan\alpha_3 = \frac{OA}{\beta h}$$

* *

Dall'Eq. di Vag già vista per il CONO:

$$\begin{cases} OX\cos\alpha_1 = x = OA(1-\operatorname{sen}\mu)\cos\beta \\ OX\cos\alpha_2 = y = OA(1-\operatorname{sen}\mu)\ \operatorname{sen}\beta \\ OX\cos\alpha_3 = z = \dfrac{OA(1-\operatorname{sen}\mu)}{\tan\alpha_3} = p\operatorname{sen}\mu \end{cases}$$

e con lo stesso significato visto per l' Elica cilindrica per H e h e $z = \frac{\beta H}{2\pi} = \beta h$ abbiamo l' equazione:

ELICA CONICA ELLITTICA: $\overline{OA} = \sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2\operatorname{sen}^2\alpha}$

$$\begin{cases} OX\cos\alpha_1 = x = \left(OA - \dfrac{\beta H}{2\pi}\right)\cos\beta = \left(q - \dfrac{\beta H}{2\pi}\right)\cos\alpha \\ OX\cos\alpha_2 = y = \left(OA - \dfrac{\beta H}{2\pi}\right)\ sen\beta = \left(m - \dfrac{\beta H}{2\pi}\right)\sin\alpha \\ OX\cos\alpha_3 = z = \dfrac{\left(OA - \dfrac{\beta H}{2\pi}\right)}{\tan\alpha_3} = \beta h \end{cases} \qquad \overline{OX}^2 = \overline{OA}^2\left(OA - \frac{\beta H}{2\pi}\right)^2 + (\beta h)^2 \qquad \tan\alpha_3 = \frac{\left(OA - \dfrac{\beta H}{2\pi}\right)}{\beta h}$$

L'aver cambiato $OA\,(1-Sin\mu)$ con $\left(OA - \frac{\beta H}{2\pi}\right)$ sta a significare che ad ogni valore di β o α il vettore-elica salendo verso la sommità del cono deve restringersi: resta inteso che $OA > \frac{\beta H}{2\pi}$ ed anche $(q,m) > \frac{\beta H}{2\pi}$.

ELICA CONICA CIRCOLARE: $\overline{OA} = R$ (q = m)

LA CHIOCCIOLA

Prendendo spunto dall'elica e dalle spirali piane possiamo ottenere una chiocciola partendo dalla sfera:

$$\left.\begin{array}{l} R\cos\alpha_1 = x = q\beta\cos\beta \\ R\cos\alpha_2 = y = m\beta\sin\beta \end{array}\right\} \text{Spirale Ellittica - Circolare} \quad \text{(Spirale di Archimede)}$$

$$R\cos\alpha_3 = z = \beta\frac{H}{2\pi} \qquad \text{Valore del passo}$$

Il valore H rappresenta il valore dello spostamento lungo l'asse della $z = \beta\frac{H}{2\pi}$:

Volendo si può procedere analogamente per le altre spire.