VII. L’EQ. DI VAG E GLI ANGOLI NELLO SPAZIO

GLI ANGOLI NELLO SPAZIO

Come abbiamo visto nel piano analogamente nello spazio possiamo calcolare le distanze in funzione del loro angolo al centro.

Sappiamo di poter scrivere: $\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta_1 = x \\ \overline{OA}\cos\beta_2 = y \\ \overline{OA}\cos\beta_3 = z \end{cases}$ $\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1$

ma anche $\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 + \sin^2\beta_3 = 2$

Dalle formule di duplicazione degli angoli:

$$\begin{cases} \overline{OA}^2\cos 2\beta_1 = \overline{OA}^2(2\cos^2\beta_1 - 1) = \overline{OA}^2(\cos^2\beta_1 - \sin^2\beta_1) \\ \overline{OA}^2\cos 2\beta_2 = \overline{OA}^2(2\cos^2\beta_2 - 1) = \overline{OA}^2(\cos^2\beta_2 - \sin^2\beta_2) \\ \overline{OA}^2\cos 2\beta_3 = \overline{OA}^2(2\cos^2\beta_3 - 1) = \overline{OA}^2(\cos^2\beta_3 - \sin^2\beta_3) \end{cases}$$

$$*)\begin{cases} \overline{OA}^2\cos 2\beta_1 = 2x^2 - \overline{OA}^2 = 2x^2 - (x^2+y^2+z^2) = x^2 - (y^2+z^2) \\ \overline{OA}^2\cos 2\beta_2 = 2y^2 - \overline{OA}^2 = 2y^2 - (x^2+y^2+z^2) = y^2 - (x^2+z^2) \\ \overline{OA}^2\cos 2\beta_3 = 2z^2 - \overline{OA}^2 = 2z^2 - (x^2+y^2+z^2) = z^2 - (x^2+y^2) \end{cases}$$

l’ultima espressine tra parentesi è la proiezione di OA sui piani opposti all’angolo, vedi: CAPII Pag.2 punto 1c):

$$\begin{cases} \sqrt{(y^2+z^2)} = \overline{OA}\sin\beta_1 = \overline{OP}_{yOz} \\ \sqrt{(x^2+z^2)} = \overline{OA}\sin\beta_2 = \overline{OP}_{xOz} \\ \sqrt{(x^2+y^2)} = \overline{OA}\sin\beta_3 = \overline{OP}_{xOy} \end{cases} \quad \text{per cui:} \begin{cases} \overline{OA}^2\cos 2\beta_1 = x^2 - \overline{OP}^2_{yOz} \\ \overline{OA}^2\cos 2\beta_2 = y^2 - \overline{OP}^2_{xOz} \\ \overline{OA}^2\cos 2\beta_3 = z^2 - \overline{OP}^2_{xOy} \end{cases}$$

Se sommiamo l’espressine *) abbiamo:

$$\overline{OA}^2\left(\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3\right) = (x^2+y^2+z^2) - 2(x^2+y^2+z^2) = \overline{OA}^2 - 2\overline{OA}^2$$

questo vuol dire che $\cos 2\beta_1 + \cos 2\beta_2 + \cos 2\beta_3 = -1$

Verifichiamo quest’ultima affermazione con un ESEMPIO:

sia A(1,2,3) $\overline{OA}^2 = 1+4+9 = 14$ ecco i successivi passaggi:

$$\left\{\begin{matrix} \cos^2\beta_1 = \dfrac{1}{14} = 0{,}071428571 \\ \cos^2\beta_2 = \dfrac{4}{14} = 0{,}285714285 \\ \cos^2\beta_3 = \dfrac{9}{14} = 0{,}642857142 \end{matrix}\right\} = 1 \; ; \begin{cases} \cos\beta_1 = 0{,}267261248 \\ \cos\beta_2 = 0{,}534522483 \\ \cos\beta_3 = 0{,}801783725 \end{cases} ; \begin{cases} \beta_1 = 74{,}49864007 \\ \beta_2 = 57{,}68846682 \\ \beta_3 = 36{,}69922527 \end{cases} ; \begin{cases} 2\beta_1 = 148{,}9972801 \\ 2\beta_2 = 115{,}3769336 \\ 2\beta_3 = 73{,}39845053 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix} \cos 2\beta_1 = -0{,}85714285 \\ \cos 2\beta_2 = -0{,}428571429 \\ \cos 2\beta_3 = 0{,}28571483 \end{matrix}\right\} = -0{,}999999995 \; ; \quad \left\{\begin{matrix} \cos^2 2\beta_1 = 0{,}734693865 \\ \cos^2 2\beta_2 = 0{,}183673469 \\ \cos^2 2\beta_3 = 0{,}081632964 \end{matrix}\right\} = 1{,}00000000298$$

Tenendo sempre presente le formule di duplicazioni analogamente possiamo considerare:

$$\begin{cases} \overline{OA}^3 \cos 3\beta_1 = \overline{OA}^3 (4\cos^3\beta_1 - 3\cos\beta_1) = 4x^3 - 3x\,\overline{OA}^2 = 4x^3 - 3x(x^2+y^2+z^2) = x\left[x^2 - 3(y^2+z^2)\right] \\ \overline{OA}^3 \cos 3\beta_2 = \overline{OA}^3 (4\cos^3\beta_2 - 3\cos\beta_2) = 4y^3 - 3y\overline{OA}^2 = 4y^3 - 3y(x^2+y^2+z^2) = y\left[y^2 - 3(x^2+z^2)\right] \\ \overline{OA}^3 \cos 3\beta_3 = \overline{OA}^3 (4\cos^3\beta_3 - 3\cos\beta_3) = 4z^3 - 3z\overline{OA}^2 = 4z^3 - 3z(x^2+y^2+z^2) = z\left[z^2 - 3(y^2+x^2)\right] \end{cases}$$

non dimenticando che:

$$\begin{cases} \cos^2 3\beta_2 + \cos^2 3\beta_3 = \sin^2 3\beta_1 = 3\sin\beta_1 - 4\sin^3\beta_1 \\ \cos^2 3\beta_1 + \cos^2 3\beta_3 = \sin^2 3\beta_2 = 3\sin\beta_2 - 4\sin^3\beta_2 \\ \cos^2 3\beta_2 + \cos^2 3\beta_1 = \sin^2 3\beta_3 = 3\sin\beta_3 - 4\sin^3\beta_3 \end{cases}$$

importante perché $\overline{OA}^2 \sin^2\beta$ rappresenta la proiezione OP del vettore OA sul piano opposto all’angolo delle coordinate cartesiane ,vedi CAPII Pag.2 punto 1c):

$$\begin{cases} \overline{OA}^3 \cos 3\beta_1 = x\left[x^2 - 3(y^2+z^2)\right] = x^3 - 3x\,\overline{OP}^2_{yOz} \\ \overline{OA}^3 \cos 3\beta_2 = y\left[y^2 - 3(x^2+z^2)\right] = y^3 - 3y\,\overline{OP}^2_{xOz} \\ \overline{OA}^3 \cos 3\beta_3 = z\left[z^2 - 3(y^2+x^2)\right] = z^3 - 3z\,\overline{OP}^2_{xOy} \end{cases}$$

In modo simile a come fatto sul piano procediamo anche nello spazio con la **somma e sottrazione degli angoli**:

$$\begin{cases} \overline{OB}\cos(\alpha_1 \pm \beta_1) = \overline{OA_1}\;\overline{OA_2}\,(\cos\alpha_1\cos\beta_1 \mp \sin\alpha_1\sin\beta_1) = x \\ \overline{OB}\cos(\alpha_2 \pm \beta_2) = \overline{OA_1}\;\overline{OA_2}\,(\cos\alpha_2\cos\beta_2 \mp \sin\alpha_2\sin\beta_2) = y \\ \overline{OB}\cos(\alpha_3 \pm \beta_3) = \overline{OA_1}\;\overline{OA_2}\,(\cos\alpha_3\cos\beta_3 \mp \sin\alpha_3\sin\beta_3) = z \end{cases}$$

dove $\overline{OB} = \overline{OA_1}\;\overline{OA_2}$ e i valori OA_1 e OA_2 sono vettori dell’Eq. Parametrica di Vag. di angoli rispettivamente α *e* β e le loro proiezioni OP^1 e OP^2 secondo quanto già visto.

$$\begin{cases} \overline{OB}\cos(\alpha_1 \pm \beta_1) = x_1x_2 \mp \sqrt{y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{y_2^2+z_2^2} = x_1x_2 \mp \overline{OP}^1_{yOz}\cdot\overline{OP}^2_{yOz} \\ \overline{OB}\cos(\alpha_2 \pm \beta_2) = y_1y_2 \mp \sqrt{x_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+z_2^2} = y_1y_2 \mp \overline{OP}^1_{xOz}\cdot\overline{OP}^2_{xOz} \\ \overline{OB}\cos(\alpha_3 \pm \beta_3) = z_1z_2 \mp \sqrt{y_1^2+x_1^2}\cdot\sqrt{y_2^2+x_2^2} = z_1z_2 \mp \overline{OP}^1_{yOx}\cdot\overline{OP}^2_{yOx} \end{cases}$$

PARABOLOIDE ELLITTICO E IPERBOLICO

I°) Sia la quadrica detta PARABOLOIDE:

$$\left(\frac{x}{q}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{m}\right)^2 = 2z \qquad m^2x^2 \pm q^2y^2 = 2z\,m^2q^2$$

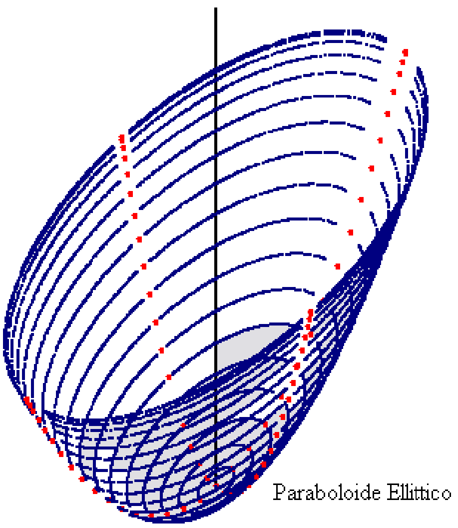
sviluppiamola secondo quanto appreso:

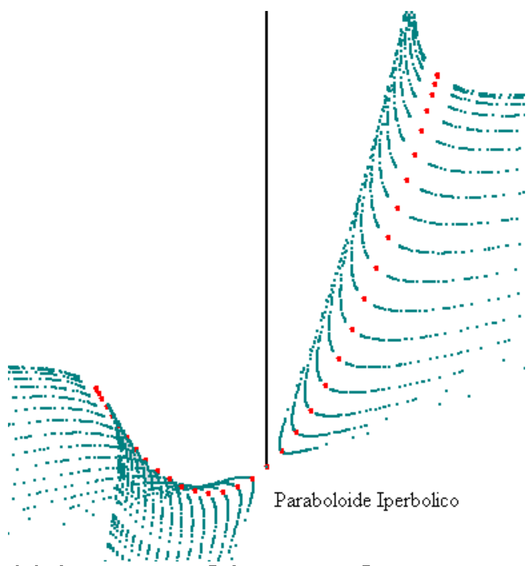
$$\overline{OA}^2(m^2\cos^2\beta_1 \pm q^2\cos^2\beta_2) = 2\,m^2q^2z \qquad \overline{OA}^2 = \frac{m^2q^2}{(m^2\cos^2\beta_1 \pm q^2\cos^2\beta_2)}\,2z$$

ed infine ***)** $\overline{OA} = \frac{mq}{\sqrt{(m^2\cos^2\beta_1 \pm q^2\cos^2\beta_2)}}\sqrt{2z}$

Si noti che nel Cap. XIII° sul piano nell’ esempio III° dell’argomento “APPLICAZIONE DELL’EQ. DI VAG ALL’EQ. PER PUNTI” avevamo ottenuto che $\overline{OA}_{EI} = \frac{mq}{\sqrt{(m^2\cos^2\beta_1 \pm q^2\cos^2\beta_2)}}$ rappresentava l’ ELLISSE con + e l’IPERBOLE con il -; cioè una Eq. Polare in forma Parametrica.

La Quadrica *) è chiamata Paraboloide ellittico se il denominatore ha + e iperbolico se – e variando il valore di z ovvero variando la posizione del piano orizzontale che contiene $\overline{OA}_{EI}$ si ottengono Ellissi o Iperboli di diversa dimensione e su piano sovrapposti, e dalle figure si può vedere come il Paraboloide si innalza lungo l’asse z ampliandosi: il valore z è dato da una costante p per il proprio coseno $z = p\cos\beta_3$.





Si tenga presente che nel Cap. VI noi abbiamo analizzato la formula di un paraboloide ricavato dalle parabole con Origine nel Fuoco e nel Vertice.

Dalla espressione iniziale facendo y=0 o x=0 si hanno le Parabole $x^2 = 2zq^2$ o $y^2 = 2zm^2$ con il vertice nell’Origine e con z asse di simmetria, e i cui punti distano dall’origine:

$\overline{OA} = \frac{q}{\cos\beta_1}\sqrt{2z}$ $\overline{OA} = \frac{m}{\cos\beta_2}\sqrt{2z}$ dove q ed m rappresentano il parametro delle Parabole rispettivamente nei punti in cui $\cos\beta_2 = 0$ e $\cos\beta_1 = 0$: nelle figure, in rosso sono tracciate le Parabole relative. Il Parametro di tutte le Parabole sarà quindi un valore compreso tra q ed m come è stato visto nel Cap. VI citato.