

## ALTEZZA, GITTATA E VELOCITA' DI FUGA.

(Dal Cap. XVII° - EQ. DI VAG SUL PIANO)

Supponiamo che il punto  $A_0$  si muova sulla circonferenza con moto sinistrorso e il punto  $P_0$  secondo la direzione del raggio  $R$  e tale che abbia una velocità parabolica. Come è mostrato nella **Fig.11** il punto  $P_0$  si muove secondo due movimenti: quello sinistrorso della circonferenza e quello perpendicolare ad essa.

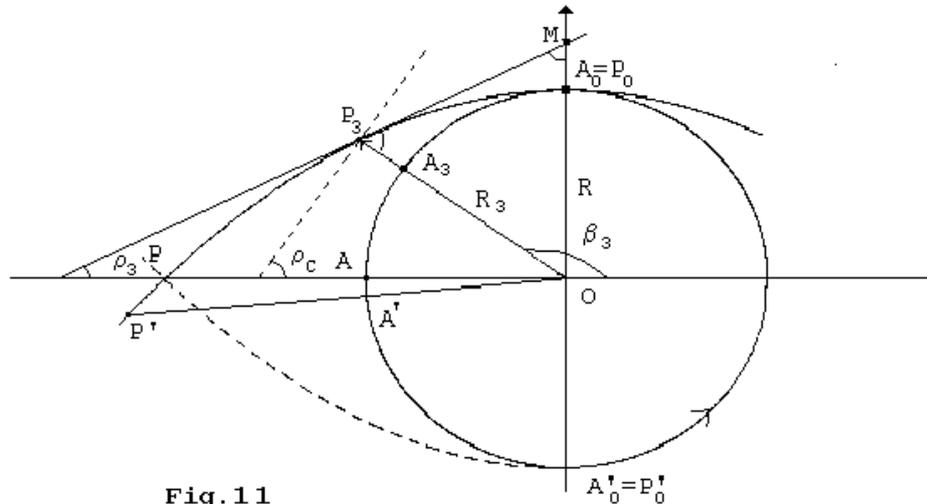


Fig.11

La **Fig.11** è la parabola tipo  $(p-y) = \frac{p}{1+\sin \beta_3}$  di cui qui diamo i valori per un punto  $P_3$ :

$$\tan \rho_3 = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{p} = -\frac{\cos \beta_3}{1+\sin \beta_3} = -\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{\cos \alpha}} \quad 1]$$

(dove  $\beta$  è l'angolo al centro, ed  $\alpha$  l'angolo di una circonferenza di riferimento)

sviluppiamo il primo e quarto membro:

$$-\sin \rho_3 = \cos(\beta_3 - \rho_3) \text{ ma } \cos(90 + \rho_3) = -\sin \rho_3 \text{ per cui } 90 + \rho_3 = \beta_3 - \rho_3 ;$$

$$\beta_3 - 90 = 2\rho_3 \text{ inoltre gli angoli } \hat{P}_3 = \hat{M} = 90 - \rho_3 \text{ quindi } \overline{OP}_3 = \overline{OM}$$

$$\overline{A_3P_3} = \overline{A_0M} .$$

Inoltre se in  $P_3$  il valore dell'angolo della tangente alla circonferenza in  $O$  di raggio  $R_3$  è  $\rho_c$  avremo  $\beta_3 = 90 + \rho_c$  quindi  $90 + 2\rho_3 = 90 + \rho_c$  e  $\rho_c = 2\rho_3$ .

Nella **Fig.11** sappiamo che nel punto  $P_3$  la parabola vale  $(p-y) = R_3$

1. il valore dell'ordinata  $y = R_3 \sin \beta_3 = R_3 \cos 2\rho_3$

2. la differenza o altezza  $h = \overline{A_3P_3} = \overline{A_0M} = R_3 - R$

3. il parametro della parabola:

$$p = \overline{OP} = 2R = y + R_3 = R_3(1 + \sin \beta_3) = R_3(1 + \sin(90 + 2\rho_3)) = R_3(1 + \cos 2\rho_3) = 2R_3 \cos^2 \rho_3$$

quindi da 3.  $R = R_3 \cos^2 \rho_3$  **A]** e da 2.  $h = R_3 - R = R_3 \sin^2 \rho_3$  **B]**

Semplificando **A]** e **B]** si avrà:  $h = R \tan^2 \rho_3$  **C]**

### RELAZIONE TRA LA GEOMETRIA PARAMETRICA E LA FISICA

Se nel caso **B]** visto poniamo  $R_3 = \frac{V_3^2}{2g}$  ( $g =$  gravità superficiale) avremo

$$h = \text{ALTEZZADIUNPUNTO} = \frac{V_3^2 \sin^2 \rho_3}{2g}$$

la formula classica per un generico punto  $P_3$  di tutti i libri di testo.

La sua gittata sarà il valore dell'ascissa  $x_3$  ottenuta da **1]** di

**Fig. 11:**  $x_3 = -p \tan \rho_3$  ed essendo  $p = 2R_3 \cos^2 \rho_3$

$$x_3 = -2R_3 \cos \rho_3 \sin \rho_3 = -R_3 \sin 2\rho_3 \quad \text{ma} \quad R_3 = \frac{V_3^2}{2g}$$

avremo la  $2x_3 = \text{GITTATA} = -\frac{V_3^2 \sin 2\rho_3}{g} = -\frac{V_3^2 \sin \rho_c}{g}$

La gittata assume valori negativi perché nel nostro esempio esso va da  $O$  (origine) verso  $A$ , cioè le curve vanno da  $P_0$  a  $P$  e da  $A_0$  ad  $A$ .

Al solo scopo di una verifica delle formule dalla Fisica analizziamo la velocità di fuga (cioè la minima velocità iniziale perché un corpo sfugga all' attrazione gravitazionale):

$$v_F^2 = \frac{2GM}{R}$$

( $G =$  costante di gravit.;  $M =$  massa del pianeta;  $R =$  raggio del pianeta)

L'accelerazione di gravità alla superficie del pianeta in esame è data da  $g = \frac{GM}{R^2}$ ;  $2Rg = 2\frac{GM}{R}$ .

Dalle due formule avremo la velocità di fuga:

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2Rg} = \sqrt{pg} \quad (2R=p \text{ parametro parabola})$$

In altra parte, abbiamo visto geometricamente, che se il punto supera questa altezza, nel suo ritorno non incontra più la circonferenza di partenza, ed infatti tale distanza corrisponde al valore **PARAMETRICO** della parabola che esso percorre.

Da **A]** per  $R=R_x \cos^2 \rho_x$  più in generale la velocità parabolica lungo tutta la curva è:

$$V_p = \sqrt{2R_x g \cos^2 \rho_x}$$

- a) per  $\rho_x=0$  abbiamo la velocità di fuga in un qualunque punto  $P_x$ , che è una velocità parabolica.
- b) per  $\rho_x=45^\circ$  il punto  $P_x$  coincide con  $P$  per definizione di parabola per cui  $V = \sqrt{2R_x g \cos^2 45^\circ} = \sqrt{R_x g} = \sqrt{2R g}$ : in tal punto la velocità circolare di raggio  $OP$  e la velocità parabolica coincidono; inoltre il punto  $P$  è il punto di fuga del sistema di partenza (nella nostra ipotesi la Terra). Infatti per  $R=6378,099$  Km (raggio terrestre) avremo il punto di fuga della terra 10,18.

La formula che dà la Velocità Circolare alla distanza  $(R_T+h)$  sappiamo essere

$$V_c = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

e con  $h=R \tan^2 \rho_x$  come da **C)** sarà:

$$V_c = \sqrt{\frac{GM}{R} \frac{1}{1+\tan^2 \rho_x}} = \sqrt{Rg \cos^2 \rho_x} \quad *)$$

dove per  $\rho_x=0$  sarà  $h=0$  e  $V_{c_0} = \sqrt{Rg}$  (velocità al suolo).

**Esempio:** il satellite Oscar ruota alla distanza di 1450 Km con  $V_{c_0}=7,14$  (Km/sec) e  $V_F=10,09$  (Km/sec).

Verifichiamo le formule: applichiamo **C]**  $1450 = R_T \tan^2 \rho$  ( $R_T=6378,099$  Km raggio equator.;  $g=0,00981$  Km/s<sup>2</sup>) per cui  $\rho = \arctan \sqrt{\frac{1450}{6378,099}} = 25,491915$ .

Per **\*)**:  $V_{c_0} = \sqrt{R_T g \cos^2 25,491915} = 7,13999 = 7,14$  Km/sec ;  $V_F = V_{c_0} \sqrt{2} = 10,09$  Km/sec (velocità circolare e di fuga nel punto distante  $h=1450$  Km dalla terra).