ALTEZZA,GITTATA E VELOCITA' DI FUGA.

(Dal Cap.XVII°- EQ. DI VAG SUL PIANO)

Supponiamo che il punto A_0 si muova sulla circonferenza con moto sinistrorso e il punto P_0 secondo la direzione del raggio R e tale che abbia una velocità parabolica. Come è mostrato nella **Fig.11** il punto P_0 si muove secondo due movimenti: quello sinistrorso della circonferenza e quello perpendicolare ad essa.

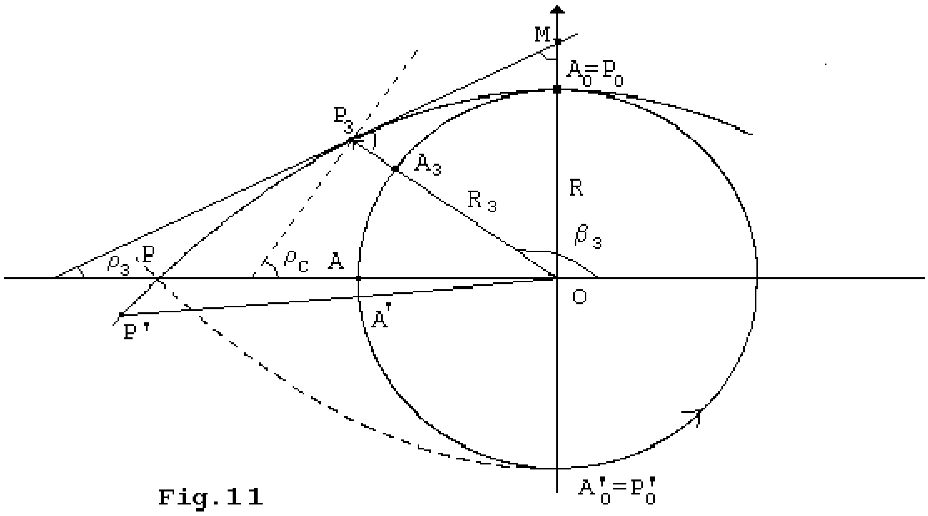

Fig.11

La **Fig.11** è la parabola tipo $(p-y)=\dfrac{p}{1+\sin\beta_3}$ di cui qui diamo i valori per un punto P_3:

$$\tan\rho_3=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{p}=-\frac{\cos\beta_3}{1+\sin\beta_3}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \textbf{1]}$$

(dove β è l'angolo al centro, ed α l'angolo di una circonferenza di riferimento)

sviluppiamo il primo e quarto membro:

$-\sin\rho_3=\cos(\beta_3-\rho_3)$ ma $\cos(90+\rho_3)=-\sin\rho_3$ per cui $90+\rho_3=\beta_3-\rho_3$;

$\beta_3-90=2\rho_3$ inoltre gli angoli $\hat{P}_3=\hat{M}=90-\rho_3$ quindi $\overline{OP_3}=\overline{OM}$ $\overline{A_3P_3}=\overline{A_0M}$.

Inoltre se in P_3 il valore dell' angolo della tangente alla circonferenza in O di raggio R_3 è ρ_C avremo $\beta_3=90+\rho_C$ quindi $90+2\rho_3=90+\rho_C$ e $\rho_C=2\rho_3$.

Nella **Fig.11** sappiamo che nel punto P_3 la parabola vale $(p-y)=R_3$

1. il valore dell'ordinata $y=R_3\sin\beta_3=R_3\cos2\rho_3$
2. la differenza o altezza $h=\overline{A_3P_3}=\overline{A_0M}=R_3-R$
3. il parametro della parabola:

$$p=\overline{OP}=2R=y+R_3=R_3(1+\sin\beta_3)=R_3(1+\sin(90+2\rho_3))=R_3(1+\cos2\rho_3)=2R_3\cos^2\rho_3$$

quindi da 3. $R = R_3 \cos^2 \rho_3$ **A]** e da 2. $h = R_3 - R = R_3 \sin^2 \rho_3$ **B]**

Semplificando **A]** e **B]** si avrà: $h = R \tan^2 \rho_3$ **C]**

RELAZIONE TRA LA GEOMETRIA PARAMETRICA E LA FISICA

*Se nel caso **B]** visto poniamo* $R_3 = \dfrac{V_3^2}{2g}$ *(g = gravità superficiale)*

avremo

$$h = \text{ALTEZZA DI UN PUNTO} = \frac{V_3^2 \sin^2 \rho_3}{2g}$$

la formula classica per un generico punto P_3 di tutti i libri di testo.

*La sua gittata sarà il valore dell'ascissa x_3 ottenuta da **1]** di **Fig.11:*** $x_3 = -p \tan \rho_3$ *ed essendo* $p = 2R_3 \cos^2 \rho_3$

$x_3 = -2R_3 \cos \rho_3 \sin \rho_3 = -R_3 \sin 2\rho_3$ *ma* $R_3 = \dfrac{V_3^2}{2g}$

avremo la $$2x_3 = \text{GITTATA} = -\frac{V_3^2 \sin 2\rho_3}{g} = -\frac{V_3^2 \sin \rho_C}{g}$$

La gittata assume valori negativi perché nel nostro esempio esso va da O (origine) verso A, cioè le curve vanno da P_0 a P e da A_0 ad A.

Al solo scopo di una verifica delle formule dalla Fisica analizziamo la velocità di fuga (cioè la minima velocità iniziale perché un corpo sfugga all' attrazione gravitazionale):

$$\mathrm{v}_F^2 = \frac{2GM}{R}$$

*(G=costante di gravit.; M=massa del pianeta; **R**=raggio del pianeta)*

L'accelerazione di gravità alla superficie del pianeta in esame è data da $g = \dfrac{GM}{R^2}$ *;* $2Rg = 2\dfrac{GM}{R}$ *.*

Dalle due formule avremo la velocità di fuga:

$$\mathrm{v}_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2Rg} = \sqrt{pg} \qquad \text{(2R=p parametro parabola)}$$

*In altra parte, abbiamo visto geometricamente, che se il punto supera questa altezza, nel suo ritorno non incontra più la circonferenza di partenza, ed infatti tale distanza corrisponde al valore **PARAMETRICO** della parabola che esso percorre.*

Da **A]** per $R = R_x \cos^2 \rho_x$ *più in generale la velocità parabolica lungo tutta la curva è:*

$$V_P = \sqrt{2R_x g \cos^2 \rho_x}$$

a) *per ρ_x=0 abbiamo la velocità di fuga in un qualunque punto P_x, che è una velocità parabolica.*
b) *per ρ_x=45° il punto P_x coincide con P per definizione di parabola per cui $V = \sqrt{2R_x g\ 0{,}5} = \sqrt{R_x g} = \sqrt{2R g}$ **:** in tal punto la velocità circolare di raggio OP e la velocità parabolica coincidono; inoltre il punto P è il punto di fuga del sistema di partenza (nella nostra ipotesi la Terra). Infatti per R=6378,099 Km (raggio terrestre) avremo il punto di fuga della terra 10,18.*

La formula che dà la Velocità Circolare alla distanza (R_T+h) sappiamo essere

$$V_C = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

*e con $h = R\tan^2 \rho_x$ come da **C)** sarà:*

$$V_C = \sqrt{\frac{GM}{R}\frac{1}{1+\tan^2 \rho_x}} = \sqrt{Rg\cos^2 \rho_x} \quad \textbf{*)}$$

dove per ρ_x=0 sarà h=0 e $V_{Co} = \sqrt{Rg}$ (velocità al suolo).

***Esempio**: il satellite Oscar ruota alla distanza di 1450 Km con V_{Co}=7,14 (Km/sec) e V_F=10,09 (Km/sec).*

*Verificichiamo le formule: applichiamo **C]** $1450 = \mathrm{R_T} \tan^2 \rho$ (R_T=6378,099 Km raggio equator.; g=0,00981 Km/s²) per cui $\rho = \arctan\sqrt{\frac{1450}{6378{,}099}} = 25{,}491915$.*

*Per ***) :** $V_{Co} = \sqrt{R_T g \cos^2 25{,}491915} = 7{,}13999 = 7{,}14\, Km/\sec$; $V_{F_o} = V_{Co}\sqrt{2} = 10{,}09\, Km/\sec$ (velocità circolare e di fuga nel punto distante h=1450Km dalla terra).*