IL MOTO DEGLI ASTEROIDI COME MOTO DI UN PUNTO

PARTE SECONDA: IL MOTO DI UN PUNTO

Ipotizziamo il caso 1)A′ di **FIGURA2** (Vedi PRIMA PARTE)

Supponiamo che il punto A_0 si muova sulla circonferenza con moto sinistrorso e il punto P_0 secondo la direzione del raggio R e tale che abbia una velocità parabolica. Come è mostrato nella **Fig.11** il punto P_0 si muove secondo due movimenti: quello sinistrorso della circonferenza e quello perpendicolare ad essa.

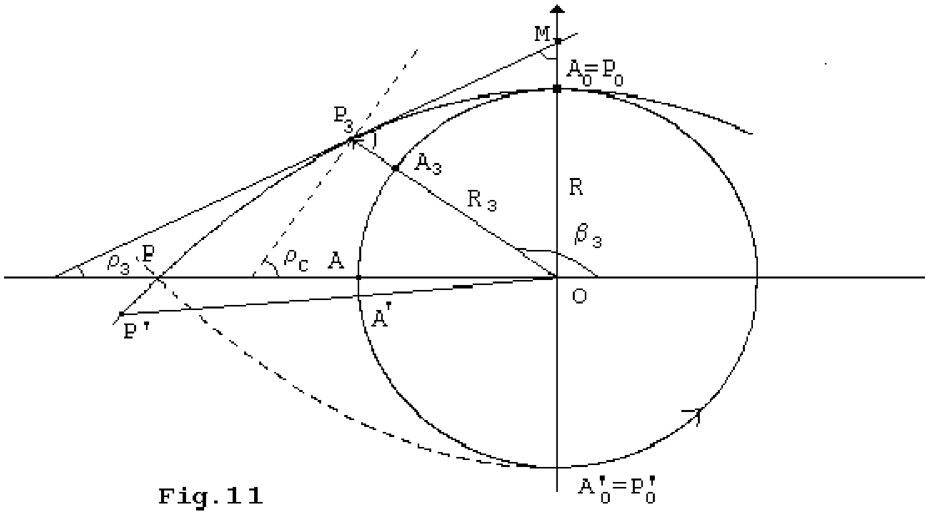

Fig.11

La **Fig.11** è la parabola tipo $(p-y)=\dfrac{p}{1+\sin\beta_3}$ di cui qui diamo i valori per un punto P_3:

$$\tan\rho_3=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{p}=-\frac{\cos\beta_3}{1+\sin\beta_3}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \textbf{1]}$$

sviluppiamo il primo e quarto membro:

$-\sin\rho_3=\cos(\beta_3-\rho_3)$ ma $\cos(90+\rho_3)=-\sin\rho_3$ per cui $90+\rho_3=\beta_3-\rho_3$; $\beta_3-90=2\rho_3$ inoltre gli angoli $\hat{P}_3=\hat{M}=90-\rho_3$ quindi $\overline{OP_3}=\overline{OM}$ $\overline{A_3P_3}=\overline{A_0M}$.

Inoltre se in P_3 il valore dell′ angolo della tangente alla circonferenza in O di raggio R è ρ_C avremo $\beta_3=90+\rho_C$ quindi $90+2\rho_3=90+\rho_C$ e $\rho_C=2\rho_3$.

Nella **Fig.11** sappiamo che nel punto P_3 la parabola vale (p-y)=R_3

1. il valore dell′ordinata $y=R_3\sin\beta_3=R_3\cos 2\rho_3$
2. la differenza o altezza $h=\overline{A_3P_3}=\overline{A_0M}=R_3-R$
3. il parametro della parabola:

$$p=\overline{OP}=2R=y+R_3=R_3(1+\sin\beta_3)=R_3(1+\sin(90+2\rho_3))=R_3(1+\cos 2\rho_3)=2R_3\cos^2\rho_3$$

quindi $R = R_3 \cos^2 \rho_3$ **A]** $\mathrm{h} = \mathrm{R}_3 \sin^2 \rho_3$ **B]**

Semplificando **A]** e **B]** si avrà: $h = R \tan^2 \rho_3$ **C]**

Vediamo ora alcune applicazione delle formule trovate!

Se nel caso **B]** poniamo $R_3 = \dfrac{V_3^2}{2g}$ avremo $h = \dfrac{V_3^2 \sin^2 \rho_3}{2g}$ la formula classica (altezza di un generico punto P_3) di tutti i libri di testo.
La sua gittata sarà il valore dell'ascissa x_3 ottenuta da **1]** di **Fig.11**: $x_3 = -p \tan \rho_3$ ed essendo $p = 2R_3 \cos^2 \rho_3$

$$x_3 = -2R_3 \cos \rho_3 \sin \rho_3 = -R_3 \sin 2\rho_3 \qquad \text{ma} \quad R_3 = \frac{V_3^2}{2g}$$

avremo la
$$2x_3 = \text{GITTATA} = -\frac{V_3^2 \sin 2\rho_3}{g} = -\frac{V_3^2 \sin \rho_C}{g}$$

La gittata assume valori negativi perché nel nostro esempio esso va da O (origine) verso A, cioè la curva va da P_0 a P e da A_0 ad A.

LA VELOCITA' DI FUGA.

Dalla Fisica sappiamo la velocità di fuga (cioè la minima velocità iniziale perché un corpo sfugga all' attrazione gravitazionale di un pianeta):

$$v_F^2 = \frac{2GM}{R}$$

(G=costante di gravit.; M=massa del pianeta; R=raggio del pianeta)
Mentre l'accelerazione di gravità alla superficie del pianeta in esame è data da $g = \dfrac{GM}{R^2}$; $2Rg = 2\dfrac{GM}{R}$.
Dalle due formule riavremo la velocità di fuga:

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2Rg} = \sqrt{pg}$$ *(2R=p parametro parabola)*

E da **A] per** $R = R_x \cos^2 \rho_x$ *più in generale la velocità parabolica lungo tutta la curva:*

$$V_P = \sqrt{2R_x g \cos^2 \rho_x}$$

a) *per ρ_x=0 abbiamo la velocità di fuga nel punto P_x, che è una velocità parabolica.*
b) *per ρ_x=45° il punto P_x coincide con P per definizione di parabola per cui $V = \sqrt{2R_x g\ 0{,}5} = \sqrt{R_x g} = \sqrt{2R\,g}$: in tal punto la velocità circolare di raggio OP e la velocità parabolica coincidono; inoltre il punto P è il punto di fuga del*

sistema (infatti il punto P' non incontra più la circonferenza, vedi ***Fig.11****).*
Infatti per R=6378,099 Km (raggio terrestre) avremo il punto di fuga della terra a velocità=11,18.

La formula che dà la Velocità Circolare alla distanza (R_T+h) sappiamo essere

$$V_C = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

e con $h = R\tan^2\rho_x$ *come da* ***C)*** *sarà:*

$$V_C = \sqrt{\frac{GM}{R}\frac{1}{1+\tan^2\rho_x}} = \sqrt{Rg\cos^2\rho_x} \quad \text{*)}$$

dove per ρ_x=0 sarà h=0 e $V_{Co} = \sqrt{Rg}$ *(velocità al suolo).*

Esempio*: il satellite Oscar ruota alla distanza di 1450 Km con V_{Co}=7,14 (Km/sec) e V_F=10,09 (Km/sec).*

Verifichiamo le formule: applichiamo ***C]*** $1450 = \mathrm{R_T}\tan^2\rho$ *(R_T=6378,099 Km raggio equator.; g=0,00981 Km/s^2) per cui* $\rho = \arctan\sqrt{\frac{1450}{6378{,}099}} = 25{,}491915$*.*

Per ****):*** $V_{Co} = \sqrt{R_T\, g\cos^2 25{,}491915} = 7{,}13999 = 7{,}14\, Km/\sec$ *;* $V_{F_o} = V_{Co}\sqrt{2} = 10{,}09\, Km/\sec$
(velocità circolare e di fuga nel punto distante h=1450Km dalla terra).

IL MOTO NON PERPENDICOLARE

ANALISI DALLA **Fig.7** (Vedi PRIMA PARTE).

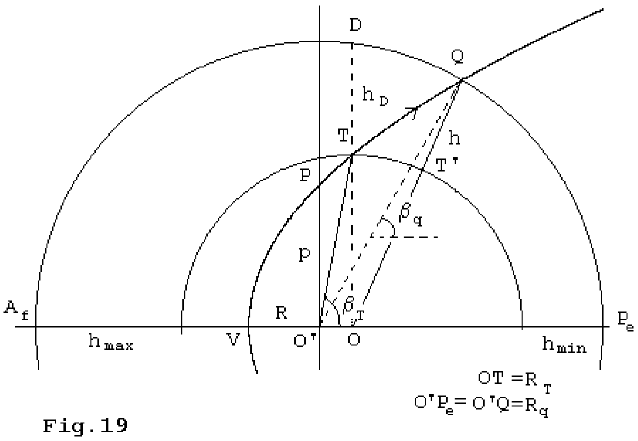

Fig.19

Nella Fig.19 supponiamo che il punto T della circonferenza di centro O, si muova secondo ρ (angolo tangente di una parabola, vedi Fig.7), *e percorra la parabola, di tipo (p+x), segnata e supponiamo anche, che nel punto Q torni a ruotare, come ci indica l' "Eq. del Moto degli Asteroidi", secondo una circonferenza che avrà centro O' (in quanto la parabola ha il Fuoco in O') e raggio* $\overline{O'Q} = R_q$.

Sappiamo anche che il punto O (centro della circonferenza di raggio $\overline{OT} = R_T$ *) per il TEOREMA DEI PIANETI, ha una distanza* $\overline{OQ}$*, che è il vettore al centro di una Ellisse di angolo* β_E *e di semi-assi* $(R_q + \overline{OO'}) = (R_T + h_{max}) = q$ *e* $(R_q - \overline{OO'}) = (R_T + h_{min}) = m$ *la cui Eq. Parametrica dell'Ellisse, con angolo parametrico* $\frac{\beta_q}{2} = \rho_q$ *(*ρ_q *angolo della tangente alla parabola in Q) è data dalle formule:*

$$\begin{cases} \left|\overline{OQ}\right| \cos\beta_E = m\cos\frac{\beta_q}{2} \\ \left|\overline{OQ}\right| \sin\beta_E = q\sin\frac{\beta_q}{2} \end{cases} \qquad \left|\overline{OQ}\right| = (m\cos\frac{\beta_q}{2})\cos\beta_E + (q\sin\frac{\beta_q}{2})\sin\beta_E$$

$$\tan\beta_E = \frac{q}{m}\tan\frac{\beta_q}{2}$$

Inoltre il parametro della parabola per definizione è:

$$p = \overline{O'P} = 2\overline{VO'} = 2R = R_T \tan\rho_T$$

(ρ_T *angolo della tangente alla parabola in T)*

(anche $\tan\rho_T = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$ *appunto* $p = R_T \tan\rho_T$ *)*

La distanza QT', essendo le due circonferenze di raggio R_q e R_T decentrate,cambierà di volta in volta a seconda la posizione del punto Q nella circonferenza di raggio R_q pertanto l'altezza sarà $h = \overline{QT'} = \left|\overline{OQ}\right| - R_T$, variabile per OQ.

IL MOTO CONCENTRICO

Interessante il caso in cui $h_{min}=h_{max}$ (Fig.20) perché OO' diventa zero ed O coincide con O'. E per tale coincidenza β_T di Fig.19 sarà:

$\beta_T = 90°$ $\rho_T = 45°$ (tangente in P=T per definizione di parabola) $|OQ| = R_q = R_T + \overline{QQ'} = 2R + \overline{QQ'} = p + \overline{QQ'}$

ma $|OQ| = (p + x)$ quindi QQ' coincide con la sua ascissa: $\overline{QQ'} = x$

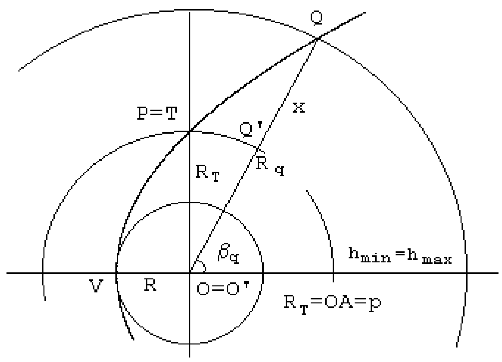

Fig.20

Per l'Eq. del moto degli Asteroidi il punto Q potrà ora ruotare secondo una circonferenza di centro O'≡O centro della parabola e concentrica alla circonferenza di partenza di raggio R_T.

(A questo caso ci si deve rifare qualora dall'orbita del punto Q (Fig.19) si volesse passare ad una ulteriore orbita ma circolare rispetto al centro O; cioè la nuova parabola, che ne determinerà il passaggio dovrà avere il fuoco in O)

LA VELOCITA' DEL PUNTO Q.

Il generico punto Q, rispetto alle curve segnate, avrà differenti velocità:

1Q) Quale punto di una ellisse di semiasse maggiore $\overline{OA_f}$ e centro O, con **velocità orbitale** $V_E^2 = GM\left(\frac{2}{\overline{OQ}} - \frac{1}{\overline{OA_f}}\right)$

(G=costante di gravit.; M=massa del pianeta).

2Q) Quale punto di una parabola con fuoco nel centro O'e angolo tangente ρ_q

con **velocità parabolica** $V_P^2 = \frac{2GM'}{R_q} = 2R_q g \cos^2 \rho_q$

3Q) Quale punto di una circonferenza di centro O' di raggio $\overline{O'Q} = R_q$, e angolo tangente ρ_C

con **velocità circolare** $V_C^2 = \frac{GM'}{R_q} = R_q g \cos^2 \rho_q = R_q g \cos^2 \rho_C / 2$

Ora affinché il punto di parabola Q si trasformi in punto di circonferenza di raggio R_q la sua velocità deve passare da V_P, velocità parabolica, a V_C, velocità circolare:

> *«...occorre che la sua direzione sia normale al raggio vettore; in ogni altro caso la stessa velocità V_C produce una orbita ellittica...(F. Zagar-"ASTRONOMIA SFERICA E TEORICA"-Zanichelli E. Bologna)*

*La velocità circolare V_C in quanto tale ha direzione normale al raggio $\overline{O'Q} = R_q$ ed è quella che deve acquisire il punto Q per muoversi secondo la circonferenza di raggio R_q di centro O': **questo è ciò che rappresenta la nostra Eq. del moto degli Asteroidi**; inoltre il punto Q con la sua nuova traiettoria produce, rispetto al centro O una <u>traiettoria ellittica</u> data dalla generica distanza OQ la cui velocità rispetto al centro O è appunto la velocità orbitale V_E nel punto Q.*

NOTA. *Il punto Q rispetto al riferimento in O' assume lo stesso significato del punto P_3 visto in **Fig.11** (la Fig.19 risulta ruotata) per cui i casi 2Q) e 3Q) rientrano negli esempi visti in **"LA VELOCITA' DI FUGA"**. Tuttavia nei casi 2Q) e 3Q) la massa con centro in O' è indicata con M' perchè diversa dalla massa M di centro in O.*

❋❋❋❋❋❋❋❋❋❋

Applichiamo alcune formule della Geometria Parametrica al MOTO NON PERPENDICOLARE.

Sia $T(OO';R_T)$ un punto della parabola. Dalla **Fig.19** abbiamo:

a) $\beta_T = \arctan\frac{R_T}{OO'}$; e dai valori della parabola

b) $\rho_T = \frac{\beta_T}{2}$; **c)** $p = 2R = R_T \tan\rho_T = R_T \tan\frac{\beta_T}{2}$

si tenga presente che ρ_T è l'angolo della tangente alla parabola nel punto T, cioè l'angolo di partenza o **alzo,** che assume grande rilevanza poichè conoscendo l'angolo della tangente parabolica in T cioè l'**alzo** ρ_T vuol dire conoscere $\beta_T = 2\rho_T$, da cui è possibile partire per applicare le formule per il MOTO NON PERPENDICOLARE.

d) $\begin{cases} R_q = R_T + h_{min} + OO' \\ R_q = R_T + h_{max} - OO' \end{cases}$ uguagliando **e)** $\overline{OO'} = \frac{h_{max} - h_{min}}{2}$

Per definizione di parabola: $\overline{QO'} = p + x = R_q \qquad x = R_q - p$

pertanto **f)** $\beta_q = \arccos\frac{x}{R_q} = \arccos\frac{R_q - p}{R_q} = arc\cos\left(1 - \frac{R_T}{R_q}\tan\frac{\beta_T}{2}\right)$;

Noto β_q possiamo scrivere l'Eq. della ellisse di angolo β_E e semiassi:

$$\begin{cases} R_q - OO' = R_T + h_{min} = m & \text{semiasse minore} \\ R_q + OO' = R_T + h_{max} = q & \text{semiasse maggiore} \end{cases}$$

g) $\begin{cases} \left|\overline{OQ}\right| \cos\beta_E = (R_q - OO')\cos\beta_q/2 \\ \left|\overline{OQ}\right| \sin\beta_E = (R_q + OO')\sin\beta_q/2 \end{cases}$ *) $\qquad \tan\beta_E = \frac{(R_q + OO')}{(R_q - OO')}\tan\frac{\beta_q}{2}$

$$|OQ| = \left(m\cos\frac{\beta_q}{2}\right)\cos\beta_E + \left(q\sin\frac{\beta_q}{2}\right)\sin\beta_E$$

quadrando e sommando la *) e considerando che β_q è angolo di parabola avremo $\beta_q/2=\rho_q$ (ρ_q angolo della tangente alla parabola nel punto Q):

$$\overline{OQ}^2 = R_q^2 + \overline{OO'}^2 - 2R_q\overline{OO'}\left[\cos^2\rho_q - \sin^2\rho_q\right]$$

h) $\left|\overline{OQ}\right| = \sqrt{R_q^2 + \overline{OO'}^2 - 2R_q\overline{OO'}\cos 2\rho_q}$ infine la distanza $|QT'| = h = |OQ| - R_T$.

Infine il PERIODO del punto Q è dato dalla circonferenza di raggio R_q:

$$\left(\frac{2R_q\pi}{T}\right)^2 = V^2 = \frac{GM}{R_q}\ ; \qquad \frac{T^2}{R_q^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}\ ; \qquad \textbf{m)}\ T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_q^3}{GM}}\ .$$

La Velocità orbitale al Perigeo:

$$\textbf{n)}\ V_{P_E}^2 = GM\left(\frac{2}{R_T + h_{\min}} - \frac{1}{R_T + h_{\max}}\right)$$

ESEMPIO.
Dal manuale “Il moto dei Corpi Celesti” di Antonio Leone, ricavo i dati del satellite Oscar-9:
Periodo = 660’= 11 ore (39600”)
La quota del perigeo: h_{min}=1460 Km
La quota all’apogeo: h_{max}=36026,3126 Km.

Poiché non è dato l’alzo o angolo di partenza utilizziamo le due quote, e applichiamo le formule viste per ottenere l’Eq. della Ellisse; QT’; TD; e il periodo (vedi Fig.19).
Il raggio medio terrestre sia R_T=6367,365Km

e) $OO' = \frac{36026{,}3126 - 1460}{2} = 17283{,}156\,Km$ *(distanza dei due centri)*

a) $\beta_T = arc\tan\frac{6367{,}365}{17283{,}156} = 20{,}224528$ ***b)*** $\frac{\beta_T}{2} = \rho_T = 10{,}112264$ *(**l’alzo**)*

d) $R_q = 6367{,}365 + 1460 + 17283{,}156 = 25110{,}521\ Km$
(Antonio Leone: R_q=25110,52 tramite il Periodo 660’)

c) $p = 6367{,}365\tan 10{,}112264 = 1135{,}6\ E5$ *;* $x = 25110{,}521 - 1135{,}6 = 23974{,}921\,Km$

f) $\beta_q = arc\cos\frac{23974{,}921}{25110{,}521} = 17{,}297085$ $\frac{\beta_q}{2} = \rho_q = 8{,}6485424$

$6367{,}365 + 1460 = 7827{,}365$ *semiasse minore*

$6367{,}365 + 36026{,}31260 = 42393{,}677$ *semiasse maggiore*

g) $\begin{cases} \left|\overline{OQ}\right|\cos\beta_E = (7827{,}365)\cos 8{,}6485424 = 7738{,}3627\,Km \\ \left|\overline{OQ}\right|\sin\beta_E = (42393{,}677)\sin 8{,}6485424 = 6374{,}8639\ \ Km \end{cases}$ *(eq. Ellisse)*

h) $\left|\overline{OQ}\right| = \sqrt{1{,}0052\ E8} = 10026{,}023\,Km$ $\left|QT'\right| = h = \left|OQ\right| - R_T = 3658{,}6585\ \text{Km}$

m) $T = \sqrt{\frac{4\pi^2(25110{,}521\,E5)^3}{6{,}67\,E-8\cdot 5{,}976\,E27}} = 39600{,}005$ *contro i 39600 indicati.*

LE VELOCITA’.

n)=Caso 1Q) $V_{P_E}^2 = 6{,}67E-8\cdot 5{,}976E27\left(\frac{2}{7827{,}365E5} - \frac{1}{42393{,}677E5}\right) =$

$$= 3{,}986E20\left[(2{,}5551E-9) - (\,2{,}3588E-10)\right] = 9{,}2444E11$$

	(velocità orbitale al perigeo)	$V_{P_E} = 9,6148\ E5$
analogamente	*(velocità orbitale all'apogeo)*	$V_{A_F} = 3,0663\ E5$
	(velocità orbitale nel punto Q)	$V_Q = 8,3732\ E5$