

ABSTRACT. The central force and the central resulting force.

## FORZA CENTRALE, E FORZA CENTRALE INDOTTA

### PARTE PRIMA

Si definisce FORZA CENTRALE una forza diretta verso un punto fisso S che agisca su un qualunque punto-massa P con intensità proporzionale alla sua distanza e con direzione e verso paralleli a tale distanza. Data come forza centrale in un punto S fisso, tutti i punti di una

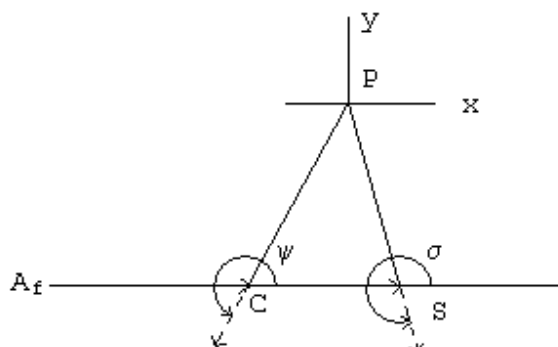


Fig.1

curva, quali i punti P e Af della Fig.1, sono punti attratti dal punto S. Ma anche un qualunque punto C (non appartenente alla curva), per definizione è attratto da S. Infatti il punto Af per la definizione stessa è attratto dal punto S secondo un valore proporzionale al segmento AfS e a maggior ragione ne sarà attratto (come punto-massa unitario) il punto C intermedio il cui valore di attrazione è dato da CS per cui possiamo scrivere

$$A_f \vec{S} = A_f \vec{C} + C \vec{S}$$

Tale espressione ci dice che il punto C è attratto da S ma che a sua volta attrae il punto Af.

Per il fatto che il punto C è interno alla curva in esame percorsa dal punto P, e proprio per l'esistenza di una forza centrale in S, esso attrae oltre che Af anche un qualunque punto P secondo quanto segnato in Fig.1.

Avendo postulato che tale forza centrale agisca con intensità proporzionale alla distanza e parallela ad essa, vale che i valori di tali distanze sono rappresentativi dei relativi valori delle intensità, a meno di una costante (prodotto delle masse), pertanto, posto per comodità un riferimento in P (con asse x parallelo a CS) e definiti gli angoli  $\psi$  e  $\sigma$  dei loro segmenti congiungenti come indicato in Fig.1 possiamo applicare la Regola della DISTANZA DI DUE PUNTI trattandosi di differenza di due segmenti orientati (somma di due vettori):

$$|PS| = |PC| \cos[(180 + \sigma) - (180 + \psi)] - |CS| \cos[(180 + \sigma) - 0^\circ] = |PC| \cos(\sigma - \psi) - |CS| \cos(180 + \sigma) \quad *]$$

Dalla \*] abbiamo l'eq. parametrica in forma generale:

$$\begin{cases} |PS| \cos \sigma = |PC| \cos \psi + |CS| \\ |PS| \sin \sigma = |PC| \sin \psi \end{cases} \quad **]$$

valevole per qualunque punto P di una generica curva.

La stessa equazione di sopra, può anche essere scritta:

$$\begin{cases} |PC| \cos \psi = |PS| \cos \sigma - |CS| \\ |PC| \sin \psi = |PS| \sin \sigma \end{cases} \quad |\overline{PC}| = (|PS| \cos \sigma - |CS|) \cos \psi + (|PS| \sin \sigma) \sin \psi$$

Ora se PS rappresenta l'intensità di una forza (rappresentata a sua volta dalle sue componenti ortogonali  $|PS| \cos \sigma$ ;  $|PS| \sin \sigma$ ) possiamo

affermare che  $\overline{PC}$  rappresenta l'intensità di una forza in un punto C, che agisce su ogni punto P della curva, con una *forza centrale indotta*, data dalla forza centrale ed uguale ad essa a meno del valore di una forza rappresentata da  $\overline{CS}$ .

Per estensione tale concetto di **forza indotta** è applicabile a qualunque punto di una curva chiusa che abbia una forza centrale.

Proseguendo nella analisi di Fig. 1 avendo posto come costante la distanza  $\overline{CS}$  e supposto di essere in presenza di una curva chiusa a cui P appartiene, possiamo fare le seguenti ipotesi:

- a) Se la generica curva chiusa ha  $\overline{CP} = \overline{CA_f} = R = \text{costante}$  (cioè una circonferenza di centro C) sappiamo che S punto di una forza centrale è Centro di una Ellisse, (Teorema dei Pianeti), di assi  $\overline{CA_f} + \overline{CS} = \overline{SA_f} = q$  e  $\overline{CA_f} - \overline{CS} = m$  ed angolo parametrico  $\psi/2$ , (con  $\psi$  angolo al centro di R) data da:

$$\begin{cases} |\overline{PS}| \cos \beta_E = (\overline{CA_f} + \overline{CS}) \cos \frac{\psi}{2} = q \cos \frac{\psi}{2} \\ |\overline{PS}| \sin \beta_E = (\overline{CA_f} - \overline{CS}) \sin \frac{\psi}{2} = m \sin \frac{\psi}{2} \end{cases} \quad \text{con } \tan \beta_E = \frac{(\overline{CA_f} - \overline{CS})}{(\overline{CA_f} + \overline{CS})} \tan \frac{\psi}{2}$$

(Quest'ultima equazione per il citato Teorema dei Pianeti vale anche per un punto S nello spazio, fatte le dovute considerazioni).

- b) Se la generica curva chiusa è rappresentata da una ellisse con la forza centrale nel punto S (Fuoco) con PC come distanza dal centro-ellisse e avendo posto **E** quale angolo parametrico (cioè l'angolo di una circonferenza di riferimento),  $\overline{CS}$  (preso come distanza Focale) e semiassi  $q > m$  (con  $\overline{CA_f} + \overline{CS} = \overline{SA_f} = q$ ), abbiamo la relativa equazione dell'ellisse con centro in C:

$$1) \begin{cases} |PC| \cos \psi = q \cos E = |PS| \cos \sigma + |CS| \\ |PC| \sin \psi = m \sin E = |PS| \sin \sigma \end{cases} \quad |\overline{PC}| = (|PS| \cos \sigma + |CS|) \cos \psi + (|PS| \sin \sigma) \sin \psi$$

oppure l'equazione della ellisse con centro nella forza centrale S (Fuoco):

$$2) \begin{cases} |PS| \cos \sigma = |PC| \cos \psi - |CS| = q \cos E - |CS| \\ |PS| \sin \sigma = |PC| \sin \psi = m \sin E \end{cases}$$

Nel caso 1) l'ellisse è determinata da una *forza centrale indotta* considerata in C;  
 nel caso 2) la stessa ellisse è determinata dalla *forza centrale* posta in S (Fuoco).

Quello che è importante notare è che

nell'ipotesi a) la curva determinata dalla *Forza Centrale Indotta* è una circonferenza, mentre la curva determinata dalla *Forza Centrale* è una ellisse, ma la posizione di tale Forza è libera e non deve soddisfare alcun vincolo, come vedremo, neanche quello della complanarità;

nell'ipotesi b) la *Forza Centrale Indotta* e la *Forza Centrale* determinano una stessa ellisse, ma tale soluzione implica la condizione che la Forza Centrale deve essere nel punto Fuoco e quindi sempre complanare al piano dell'orbita.

Se consideriamo il punto C un qualunque punto soggetto alla influenza della Forza Centrale posta in S, che abbia nel sistema di riferimento posto in P angolo  $\gamma$ , l'equazione \*\*] sarà:

$$\begin{cases} |PS| \cos \sigma = |PC| \cos \psi - |CS| \cos \gamma \\ |PS| \sin \sigma = |PC| \sin \psi - |CS| \sin \gamma \end{cases} \quad (\text{le due equazioni coincidono per } \gamma=0^\circ)$$

Possiamo in generale dire che due o più punti (corpi) in un sistema che abbia una Forza Centrale interagiranno tra loro come punti di Forze Centrali Indotte e tutte queste forze sono forze di tipo newtoniano.

## FORZA CENTRALE, E FORZA CENTRALE INDOTTA

### PARTE SECONDA

Il caso a noi più vicino di Forza Centrale Indotta è quello della Terra e della Luna: la Terra «obbedisce» alla forza centrale di tipo newtoniana posta nel Sole, mentre la Luna a sua volta reagisce alla forza newtoniana della Terra; infatti percorre anch'essa una ellisse.

Possiamo allora affermare che la Terra, secondo quanto abbiamo illustrato, è dotata di una forza indotta, mentre la Luna pur obbedendo alla Forza Centrale Indotta della Terra, è anche soggetta alla forza centrale del Sole, ma come risultato delle due forze in campo: Sole-Terra e Terra-Luna.

Per comodità del lettore cito un maestro:

"Come è noto, per la legge di Newton, due punti materiali  $O$  e  $P$  rispettivamente di massa  $M$  e  $m$  distanti tra loro  $\rho$  si attraggono (se  $K$  è la costante di gravitazione) con la forza  $F$  diretta secondo la loro congiungente e di intensità uguale a:

$$F = K \frac{Mm}{\rho^2}. \quad \text{Ovviamente, fissato } O, \text{ la forza agente su } F \text{ della forza newtoniana}$$

dipende solo dalla posizione di  $P$ . (Dario Graffi - MECCANICA RAZIONALE - Casa Editr. Prof. R. Patron)"

Interpretando la formula citata abbiamo  $F = \varphi(\rho)$  e dalle equazioni parametriche viste la possibilità di applicare le regole del parallelogramma a tali forze (come somma di vettori).

$$\varphi(\rho_s) = \varphi(\rho_T) + \varphi(\rho_L) \quad \text{e quindi} \quad K \frac{ST}{\rho_s^2} - K \frac{TL}{\rho_T^2} = K' \frac{SL}{\rho_L^2} \quad \text{con } S(\text{ole}), T(\text{erra}), L(\text{una}) \text{ masse}$$

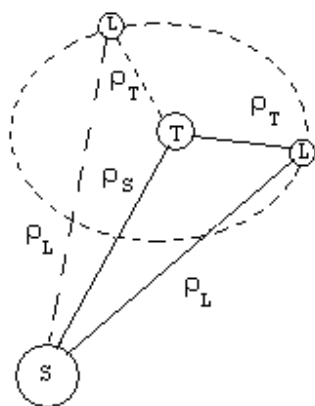


Fig. 2

ed anche

$$K \left( \frac{ST}{\rho_s^2} - \frac{TL}{\rho_T^2} \right) = \frac{K'}{\rho_L^2} SL$$

Di questa ultima espressione il primo membro è determinato tramite  $\rho_s$   $\rho_T$  (distanza Sole-Terra e Terra-Luna), secondo il concetto della forza newtoniana, mentre per il secondo abbiamo:

f) se  $K=K'$  allora anche il secondo membro deve sottostare alla forza newtoniana e quindi la massa  $L$  deve assumere posizioni tali da generare, per effetto della forza centrale di tipo newtoniano una ellisse rispetto a  $S$ ;

g) l'altra ipotesi è che sia  $K \neq K'$ . Ma allora il valore  $K'$  diventa un valore proporzionale alla distanza  $\rho_L$  perchè la posizione della massa  $L$  per valori invariati di  $\rho_s$  e  $\rho_T$  può assumere diverse posizioni e quindi diverse distanze  $\rho_L$  come si vede in Fig.2.

Nel caso g) è evidente che non siamo più in presenza di una forza di tipo newtoniano.

Invece nel caso f) tenendo presente la lettura dalla geometria (Cap.VI), indicata nel preambolo, possiamo affermare che la forza che tiene legate le masse  $S$  e  $L$  è una forza di tipo Newtoniano a condizione che  $L$  ruoti, intorno al proprio centro, secondo una circonferenza come mostrato in Fig. 3 e secondo quanto descritto in questo articolo Parte Prima nell'ipotesi a).

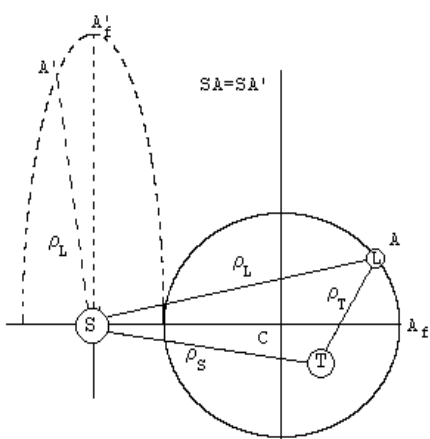


Fig. 3

La Fig. 3 (la traiettoria tratteggiata è ruotata di  $90^\circ$  per semplicità; in realtà  $A'_f \equiv A_f$ ) sulla base di quanto detto (teorema dei Pianeti), ci mostra che la distanza  $\rho_L$  è la distanza di un punto di ellisse dal suo centro in S (in quanto L ruota secondo una circonferenza di centro C) e che quindi la massa L descrive una traiettoria rispetto a S le cui distanze sono vettori di ellisse, conforme al concetto di forza newtoniana.

Inoltre non c'è bisogno che il Sole e Luna siano complanari, per l'applicazione del Teorema dei Pianeti, anche se nella Fig. 3 essi per comodità sono mostrati tali.

Prendiamo in esame il caso di due qualunque pianeti (ad esempio Terra e Venere come in Fig. 4). Per quanto è stato detto nella Parte Prima ipotesi a), sappiamo che le loro orbite, determinate dalla loro Forza Centrale Indotta sono circolari, mentre per effetto della Forza Centrale del Sole sono ellittiche.

Applicando il Teorema dei Pianeti (nello spazio) a V o a T, come punti della loro traiettoria circolare, avremo che la posizione di uno ha distanza dall'altro secondo una ellisse o meglio secondo un vettore di ellisse. Nella Fig. 4 V e T sono disegnati complanari, mentre non lo sono nella realtà, ed in posizione arbitraria, senza che tuttavia venga meno la logica del Teorema dei Pianeti.

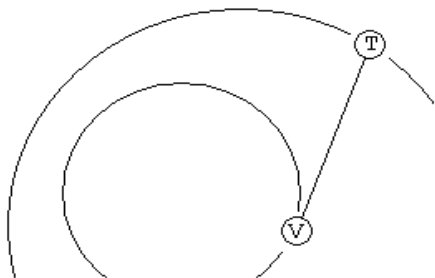


Fig. 4

La condizione perché si verifichi una distanza tra V e T di tipo newtoniano è che tali pianeti abbiano una orbita circolare. Il risultato sarà identico sia che si consideri indifferentemente V o T centro dell'ellisse (Pag. 23 e 26 sul

piano e Pag.

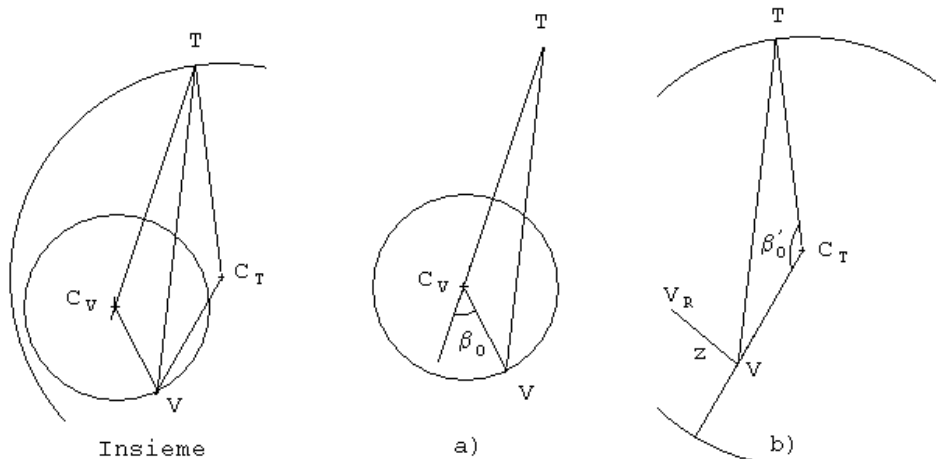


Fig. 5

13 nello spazio dei capitoli di geometria indicati), ma tale da dare un vettore di tipo newtoniano. Nella Fig. 5 sono indicate in a) e b) le due considerazioni che conducono allo stesso vettore VT.

$$\text{In formule: } \begin{cases} \overline{TV} \cos \beta_E = (\overline{C_V T} + \overline{C_V V}) \cos \frac{\beta_0}{2} \\ \overline{TV} \sin \beta_E = (\overline{C_V T} - \overline{C_V V}) \sin \frac{\beta_0}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{VT} \cos \beta'_E = (\overline{C_T T} + \overline{C_T V}) \cos \frac{\beta'_0}{2} \\ \overline{VT} \sin \beta'_E = (\overline{C_T T} - \overline{C_T V}) \sin \frac{\beta'_0}{2} \end{cases}$$

con  $(\overline{C_V T} \pm \overline{C_V V})$  e  $(\overline{C_T T} \pm \overline{C_T V})$  semi-assi delle Ellissi, e

$$\tan \beta_E = \frac{\overline{C_V T} - \overline{C_V V}}{\overline{C_V T} + \overline{C_V V}} \tan \frac{\beta_0}{2} \quad \tan \beta'_E = \frac{\overline{C_T T} - \overline{C_T V}}{\overline{C_T T} + \overline{C_T V}} \tan \frac{\beta'_0}{2}$$

che è l'applicazione della geometria indicata e dove vediamo che la distanza VT e TV pur uguali e nella stessa posizione, sono ricavati in modo diverso ma entrambi indicano il vettore di una ellisse, quindi un vettore di tipo newtoniano. Ora la presenza di una Forza Centrale nel Sole dirà che i punti-massa V e T hanno una Forza Centrale Indotta, e se noi conosciamo le distanze  $\rho_T$  e  $\rho_V$  dei punti-massa T e V dal Sole, la distanza  $\rho$  tra i due punti dovrà essere un vettore di ellisse, affinché si possa applicare la legge di Newton, tale da soddisfare l'uguaglianza:

$$K \frac{ST}{\rho_T^2} - K \frac{SV}{\rho_V^2} = K \frac{TV}{\rho^2}$$

Dunque le tre distanze sono legate tra loro e note  $\rho_T$  e  $\rho_V$  avremo che la terza non potrà essere una distanza presa a caso ma deve essere ben determinata, sviluppata infatti l'uguaglianza si ottiene, con idonei passaggi:

$$\rho^2 = \frac{TV}{S} \frac{\rho_T^2 \rho_V^2}{T\rho_V^2 - V\rho_T^2}$$

L'aver considerato che le rivoluzioni dei due pianeti T e V avvengano sullo stesso piano ha favorito la spiegazione del problema.

La lettura del Cap. III°.....pag. 13: "IL TEOREMA DEI PIANETI NELLO SPAZIO" ci dice che se consideriamo il punto V (analizziamo il caso b) di Fig. 5) proiezione del punto-massa-reale  $V_R$  sul piano della rivoluzione di T e la distanza di tale proiezione è z,

i semi assi delle ellissi indicate dalle formule sopra, saranno  $\sqrt{(\overline{C_T T} + \overline{C_T V})^2 + z^2} = q$   
 $\sqrt{(\overline{C_T T} - \overline{C_T V})^2 + z^2} = m$  e  $\overline{VT}$  diventerà  $\overline{V_R T}$

Ora mentre le distanze  $\rho_T$  e  $\rho_V$  sono relative alla forza centrale (Sole) la distanza  $\rho$  è relativa alle forze centrali indotte di Terra e Venere, per cui noto l'angolo  $\tau$  tra i vettori  $\rho_T$  e  $\rho_V$  avremo

$$\rho^2 = \rho_V^2 + \rho_T^2 - 2\rho_V \rho_T \cos \tau = \left[ (\rho_V - \rho_T) \cos \frac{\tau}{2} \right]^2 + \left[ (\rho_V + \rho_T) \sin \frac{\tau}{2} \right]^2 \quad *)$$

Per cui il valore  $\rho$  è ancora un vettore di ellisse di angolo  $\beta_\tau$  dato dall' Eq.

Parametrica di Vag dell'Ellisse:

$$\rho = \left[ (\rho_V - \rho_T) \cos \frac{\tau}{2} \right] \cos \beta_\tau + \left[ (\rho_V + \rho_T) \sin \frac{\tau}{2} \right] \sin \beta_\tau \quad \text{con} \quad \tan \beta_\tau = \frac{\rho_V + \rho_T}{\rho_V - \rho_T} \tan \frac{\tau}{2}$$

Avendo postulato che le forze agiscono lungo le congiungenti le rispettive masse o parallelamente a queste congiungenti, e tenendo conto che forze e

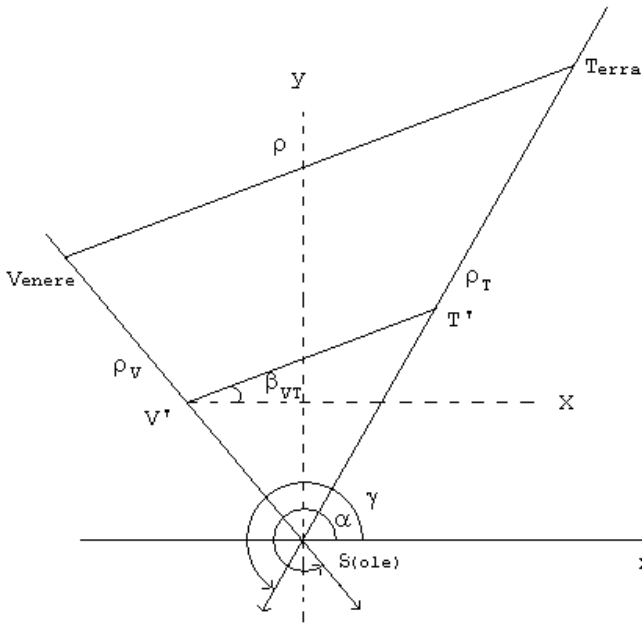


Fig 6

congiungenti sono inversamente proporzionali a meno di una costante (la gravitazione per le masse), nelle formule viste le distanze possono essere sostituite dalle relative forze. Vediamo come.

Nella Fig6 avendo posto un riferimento con origine in S(ole), abbiamo interpretato graficamente le distanze e le forze che da queste derivano:

$$\overline{ST'} = F_T = \varphi(\rho_T) \quad \overline{SV'} = F_V = \varphi(\rho_V)$$

$$\overline{V'T'} = F_{VT} = \varphi(\rho)$$

In figura abbiamo tracciato le due forze  $F_V$  e  $F_T$  coincidenti alle distanze  $\rho_V$  e  $\rho_T$ , mentre la  $\overline{V'T'} = F_{VT}$  è tracciata parallela a  $\rho$ : ma anche se la ipotesi del parallelismo non fosse vera (contraddicendo così il postulato) è sempre possibile applicare la formula della distanza di due segmenti orientati a  $F_V$  e  $F_T$ :

$$\begin{aligned} F_{VT} &= F_V \cos[\beta_{VT} - (180 + \gamma)] - F_T \cos[\beta_{VT} - (180 + \alpha)] = \\ &= -F_V \cos \beta_{VT} \cos \gamma - F_V \sin \beta_{VT} \sin \gamma + F_T \cos \beta_{VT} \cos \alpha + F_T \sin \beta_{VT} \sin \alpha \end{aligned}$$

la cui soluzione è l'Equazione Parametrica di Vag di una ellisse data in forma lineare

$$F_{VT} = [F_T \cos \alpha - F_V \cos \gamma] \cos \beta_{VT} + [F_T \sin \alpha - F_V \sin \gamma] \sin \beta_{VT}$$

da cui l'Eq. Parametrica di Vag in forma generale:

$$**) \quad \begin{cases} F_{VT} \cos \beta_{VT} = F_T \cos \alpha - F_V \cos \gamma \\ F_{VT} \sin \beta_{VT} = F_T \sin \alpha - F_V \sin \gamma \end{cases} \quad \text{con} \quad \tan \beta_{VT} = \frac{(F_T \sin \alpha - F_V \sin \gamma)}{(F_T \cos \alpha - F_V \cos \gamma)}$$

che ci indica il valore della scomposizione della forza  $F_{VT}$ , rappresentante un vettore di ellisse, in due forze perpendicolari tra loro  $F_{VT} \cos \beta_{VT}$  e  $F_{VT} \sin \beta_{VT}$ . Quadrando e sommando la \*\*) abbiamo:

$(F_{VT})^2 = F_T^2 + F_V^2 - 2F_T F_V \cos(\alpha - \gamma)$  e con  $(\alpha - \gamma) = \tau$  perveniamo ad una ellisse simile a quella ottenuta con i valori  $\rho_V; \rho_T; \rho$  in \*), avendo in pratica sostituito alle distanze il valore delle forze: possiamo allora affermare che in un caso l'ellisse rappresenta il valore della variabile ( $\rho$ ); nell'altro l'ellisse dà il valore della funzione  $F_{VT} = \varphi(\rho)$ . I valori degli angoli ellittici  $\beta_{VT}$  e  $\beta_\tau$  saranno uguali soltanto se l'ipotesi del parallelismo tra  $F_{VT}$  e  $\rho$  è valida, ed in tale ipotesi avremo che nella rappresentazione grafica la distanza di due punti-Massa può indicare ( $\rho$ ) oppure  $F = \varphi(\rho)$ .

Possiamo così concludere che anche le forze, tra masse aventi una Forza Centrale Indotta rientrano nelle leggi newtoniane e che gli equilibri delle Forze che agiscono tra le masse vanno studiate nell'ambito delle equazioni analizzate.