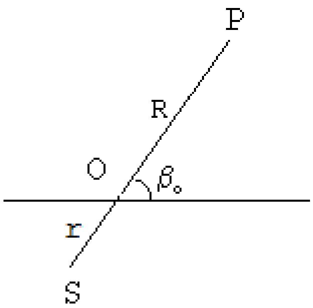
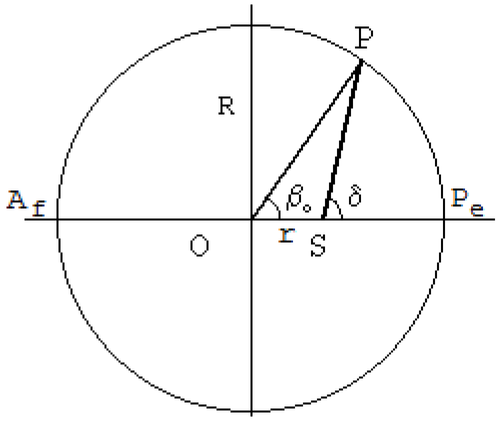
"IL TEOREMA DEI PIANETI"

Quando Keplero studiando le tavole compilate da Ticho B. dove la distanza dal Sole dei Pianeti, si accorse che le distanze erano vettori di ellisse.
Da ciò dedusse che i pianeti girano attorno al sole secondo una ellisse, quindi anche i pianeti giravano secondo ellissi rispetto al loro centro gravitazionale e poiché passavano una volta vicini e una lontani dal Sole affermò che questi doveva occupare necessariamente il fuoco di tale Ellisse. Fu una sorpresa perchè per la Fisica Classica il giusto moto di un corpo rispetto al suo centro avrebbe dovuto essere una circonferenza.
Partendo dal presupposto della giustezza delle misurazioni analizziamo la figura sotto:





nella prima figura è ipotizzata il Moto di Rivoluzione di P rispetto a S, alla loro massima distanza con il punto O loro centro di massa; nella seconda figura è posto un riferimento con centro in O mentre S è ipotizzato fermo (ma non necessariamente)dove abbiamo che la traiettoria di un qualunque punto P rispetto ad O è giusto una circonferenza, ma rispetto al punto S è una ***traiettoria*** ellittica, in quanto la distanza PS è raggio di ellisse: questo è quanto afferma il Teorema dei Pianeti.

"IL TEOREMA DEI PIANETI": data una circonferenza, ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza sono vettori di ellisse, la traiettoria una ellisse e il punto fisso il suo centro.

Dunque assunto che un corpo ruoti secondo una circonferenza per il Teorema dei Pianeti, la sua traiettoria rispetto al Sole è giusto una traiettoria ellittica ed un qualunque Pianeta Satellite come la Luna, che ruoti secondo una circonferenza *ha rispetto alla Terra o al Sole una traiettoria Ellittica.*

Ci limitiamo a dare la dimostrazione per un punto interno ad una circonferenza, come in figura sotto (Per uno studio approfondito vedi in

Geometria parametrica.it Cap.VI "Traslazione/rotazione/Roto-Traslazione" Pagg.24 «Teorema dei Pianeti»

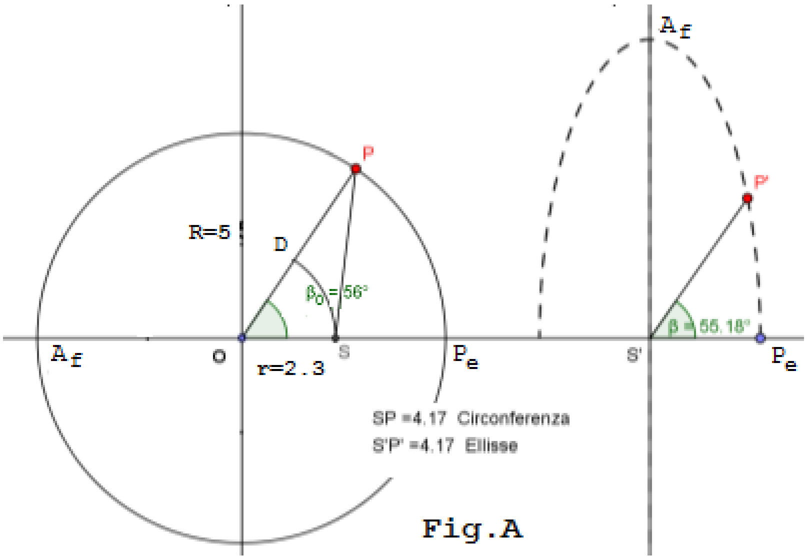


Fig.A

Applicando Carnot al triangolo SOP avremo:

$$\overline{SP}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos 2\frac{\beta_0}{2} = R^2 + r^2 - 2rRr(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - sen^2\frac{\beta_0}{2}) =$$

$$= R^2(\cos^2\frac{\beta_0}{2} + sen^2\frac{\beta_0}{2}) + r^2(\cos^2\frac{\beta_0}{2} + sen^2\frac{\beta_0}{2}) - 2rRr(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - sen^2\frac{\beta_0}{2}) = \quad **)$$

$$= (R-r)^2\cos^2\frac{\beta_0}{2} + (R+r)^2 sen^2\frac{\beta_0}{2}$$

Essendo quest' ultima espressione un quadrato del tipo $\overline{SP}^2 = x^2 + y^2$ potrò per L'Eq. Parametrica di Vag avere un angolo β tale che:

a) $$\begin{cases} \overline{SP}\cos\beta = (R-r)\cos\frac{\beta_0}{2} = m\cos\frac{\beta_0}{2} \\ \overline{SP}\ sen\beta = (R+r)sen\frac{\beta_0}{2} = q sen\frac{\beta_0}{2} \end{cases} \qquad \tan\beta = \frac{R+r}{R-r}\tan\frac{\beta_0}{2} = \frac{q}{m}\tan\frac{\beta_0}{2}$$

b) $$SP = \left(m\cos\frac{\beta_0}{2}\right)\cos\beta + \left(q\sin\frac{\beta_0}{2}\right)\sin\beta$$

L'espressione b) rappresenta una ellisse di semi-assi q>m, rappresentata tratteggiata nella Fig.A. Essa è tratteggiata per indicare che non è data dal moto reale di P, che ha un moto circolare di centro O, ma dai valori delle distanze che SP assume al variare dell'angolo Beta, valori come è dimostrato dal "Teorema dei Pianeti", che sono raggi di ellisse. Tale considerazione mi permette di affermare, che il moto circolare del punto P può essere interpretato come moto ellittico rispetto a S.
(vedere l'Applet Il Teorema dei Pianeti)

L'analisi e lo studio di questo importante teorema permette di formulare le seguenti considerazioni:

1) *Importantissima è la corrispondenza* ***biunivoca*** *che si stabilisce tra Circonferenza ed Ellisse e viceversa.*
2) *Un semplice calcolo dimostra che SP=S'P'*
3) *Aree spazzate sull'Ellisse nello stesso tempo sono uguali.*
4) *La* ***velocità angolare*** *è* $\frac{d\beta_0}{dt} = \omega$ *per la circonferenza e* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta_0}{2}\right) = \omega'$ *per l'ellisse, cioè* $\omega' = \frac{\omega}{2}$.
5) *L' area spazzata dal vettore raggio R, in un determinato tempo, cioè la V**elocità Areale** della Circonferenza, è due volte quella dell'Ellisse relativa (come dettato dalla dinamica). Infatti per q=R+r e m=R-r, avremo che l'Area* $P_e SDP = \frac{(R^2 - r^2)}{2}\beta_0$ *della circonferenza è doppia dell'area corrispondente della ellisse in quanto* $P_e S'P'P_e = \frac{qm}{2}\frac{\beta_0}{2} = \frac{(R+r)(R-r)}{2}\frac{\beta_0}{2} = \frac{(R^2 - r^2)}{2}\frac{\beta_0}{2}$.
6) *I valori del vettore SP (nella Fig.A) sono compresi tra la distanza minima m=(R-r)(perielio) e la distanza massima q=(R+r) (afelio). Si che* SP_e*=* $S'P_e$*=m=* ***Perielio*** *,* SA_f*=* $S'A_f$*=q=* ***Afelio****, giusta l'intuizione di Keplero.*
7) *Il perimetro del quadrante della circonferenza di raggio R (Fig.A), è uguale al perimetro del quadrante della Ellisse (ma non i suoi valori intermedi: vedi "www.geometria parametrica.it" Cap. VII° AREA E PERIMETRO ELLISSE).*

Abbiamo affermato che: il Moto Circolare della Luna ha una traiettoria Ellittica rispetto al Sole come alla Terra, secondo "Il Teorema dei Pianeti", ed in entrambi i casi la sua Velocità Areale è doppia di quella della Terra e del Sole e le aree percorse sull'ellisse sono uguali per uno stesso tempo.
(uno sguardo veloce in Applet Traiettoria Luna Sole)

L'aver identificato che il moto di ogni Pianeta è circolare ci permetterà di comprendere la Seconda Legge sul Moto dei Pianeti.
Se un Punto (Massa) percorre una parabola, essa può convertire la sua curva Parabolica in una curva Circolare, con Centro nel Fuoco e raggio uguale alla distanza dal Fuoco alla posizione del Punto(Massa) nell'istante in cui varia la sua velocità.
L'equazione che mi permette questo passaggio è data dalla Eq. Parametrica della Parabola:

$$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}(1 - 2\cos\alpha)\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha} \pm \sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\ )\sin\beta$$

(il tutto su Home di www.geometriaparametrica.it)