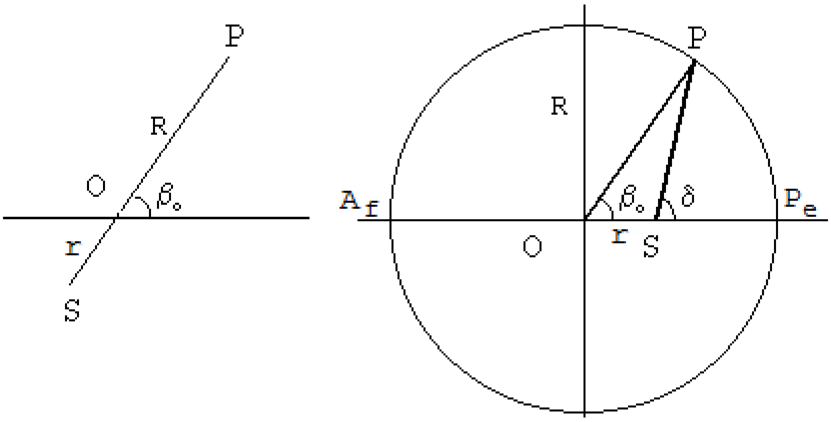
"IL TEOREMA DEI PIANETI"

Quando Keplero studiando le tavole compilate da Ticho B. dove la distanza dal Sole dei Pianeti, si accorse che le distanze erano vettori di ellisse.
Da ciò dedusse che i pianeti girano attorno al sole secondo una ellisse, quindi anche i pianeti giravano secondo ellissi rispetto al loro centro gravitazionale e poiché passavano una volta vicini e una lontani dal Sole affermò che questi doveva occupare necessariamente il fuoco di tale Ellisse. Fu una sorpresa perchè per la Fisica Classica il giusto moto di un corpo rispetto al suo centro avrebbe dovuto essere una circonferenza.
Partendo dal presupposto della giustezza delle misurazioni analizziamo la figura sotto:



in tale figura è ipotizzata il Moto di Rivoluzione di P rispetto a S, con S ipotizzato fermo (ma non necessariamente)dove abbiamo che la traiettoria di un qualunque punto P rispetto ad O è giusto una circonferenza, ma la sua ***traiettoria*** rispetto al punto S è una ellisse: questo è quanto afferma il Teorema dei Pianeti (vedi sotto una sintesi del Teorema dei Pianeti).

"IL TEOREMA DEI PIANETI": data una circonferenza, ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza sono vettori di ellisse, la traiettoria una ellisse e il punto fisso il suo centro.

Dunque assunto che un corpo ruoti secondo una circonferenza per il Teorema dei Pianeti, la sua traiettoria rispetto al Sole è giusto una traiettoria ellittica ed un qualunque Pianeta Satellite come la Luna, ruota secondo una circonferenza ma *la sua traiettoria rispetto alla Terra o al Sole è una traiettoria Ellittica.*
Si noti che i valori del vettore SP (nella Fig. sopra) sono compresi tra la distanza minima (perielio) e la distanza massima (afelio), giusta l'intuizione di Keplero.

Ci limitiamo a dare la dimostrazione per un punto interno ad una circonferenza, come in figura sotto (Per uno studio approfondito vedi in
Geometria parametrica.it Cap.VI "Traslazione/rotazione/Roto-Traslazione" Pagg.24 «Teorema dei Pianeti»

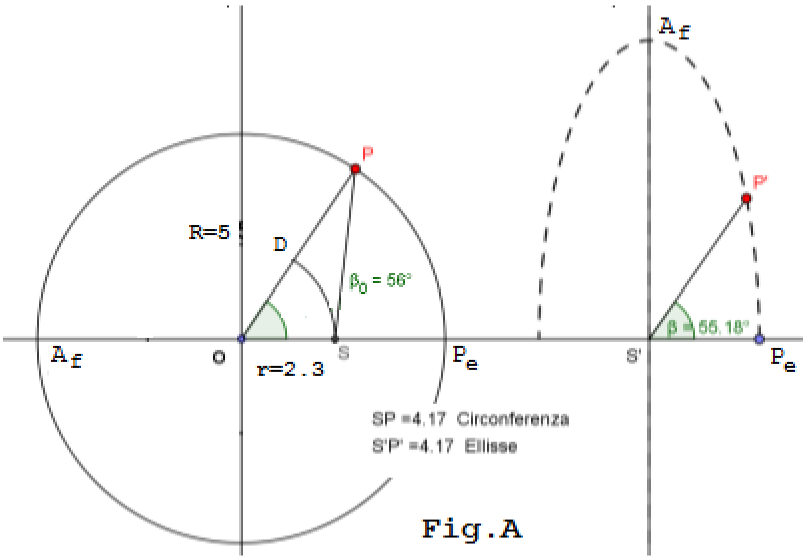


Fig.A

$$\overline{SP}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos 2\frac{\beta_0}{2} = R^2 + r^2 - 2rRr(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - sen^2\frac{\beta_0}{2}) =$$

$$= R^2(\cos^2\frac{\beta_0}{2} + sen^2\frac{\beta_0}{2}) + r^2(\cos^2\frac{\beta_0}{2} + sen^2\frac{\beta_0}{2}) - 2rRr(\cos^2\frac{\beta_0}{2} - sen^2\frac{\beta_0}{2}) = \quad **)$$

$$= (R-r)^2\cos^2\frac{\beta_0}{2} + (R+r)^2 sen^2\frac{\beta_0}{2}$$

Essendo quest' ultima espressione un quadrato del tipo $\overline{SP}^2 = x^2 + y^2$ potrò per L'Eq. Parametrica di Vag avere un angolo β tale che:

a) $$\begin{cases} \overline{SP}\cos\beta = (R-r)\cos\frac{\beta_0}{2} = m\cos\frac{\beta_0}{2} \\ \overline{SP}\ sen\beta = (R+r)sen\frac{\beta_0}{2} = q sen\frac{\beta_0}{2} \end{cases} \qquad \tan\beta = \frac{R+r}{R-r}\tan\frac{\beta_0}{2} = \frac{q}{m}\tan\frac{\beta_0}{2}$$

b) $$SP = \left(m\cos\frac{\beta_0}{2}\right)\cos\beta + \left(q\sin\frac{\beta_0}{2}\right)\sin\beta$$

(vedere l'Applet Il Teorema dei Pianeti)

1) *Importantissima è la corrispondenza **biunivoca** che si stabilisce tra Circonferenza ed Ellisse e viceversa.*
2) *Un semplice calcolo dimostra che SP=S'P'*
3) *Aree spazzate sull'Ellisse nello stesso tempo sono uguali.*
4) *L' area spazzata dal vettore raggio R, in un determinato tempo, cioè la **Velocità Areale** della Circonferenza, è due volte quella dell'Ellisse relativa (come dettato dalla dinamica). Infatti per* $q = R + r$ *e* $m = R - r$ *l'Area* $P_eSDP = \frac{(R^2 - r^2)}{2}\beta_0$

della circonferenza è doppia dell'area corrispondente della ellisse in quanto $P_eS'P'P_e = \frac{qm}{2}\frac{\beta_0}{2} = \frac{(R+r)(R-r)}{2}\frac{\beta_0}{2} = \frac{(R^2-r^2)}{2}\frac{\beta_0}{2}$.

5) *I valori del vettore SP (nella Fig.A) sono compresi tra la distanza minima (perielio) e la distanza massima (afelio). Si che* SP_e= $S'P_e$= ***Perielio*** , SA_f= $S'A'_f$= ***Afelio.***
6) *Il perimetro del quadrante della circonferenza di raggio R (Fig.A), è uguale al perimetro del quadrante della Ellisse (ma non i suoi valori intermedi: vedi "www.geometria parametrica.it" Cap. VII° AREA E PERIMETRO ELLISSE).*

Abbiamo affermato che: il Moto Circolare della Luna ha una traiettoria Ellittica rispetto al Sole come alla Terra, secondo "Il Teorema dei Pianeti", ed in entrambi i casi la sua Velocità Areale è doppia di quella della Terra e del Sole e le aree percorse sull'ellisse sono uguali per uno stesso tempo.
(uno sguardo veloce in Applet Traiettoria Luna Sole)

L'aver identificato che il moto di ogni Pianeta è circolare ci permetterà di comprendere la Seconda Legge sul Moto dei Pianeti.
Se un Punto (Massa) percorre una parabola il cui Fuoco è posto in un Riferimento Ortogonale Cartesiano, essa può convertire la sua curva Parabolica in una curva Circolare, con Centro nel centro di riferimento(Fuoco) e raggio uguale alla distanza dal Fuoco alla posizione del Punto(Massa) nell'istante in cui varia la sua velocità.
L'equazione che mi permette questo passaggio è data dalla Eq. Parametrica della Parabola.

(il tutto su Home di www.geometriaparametrica.it)