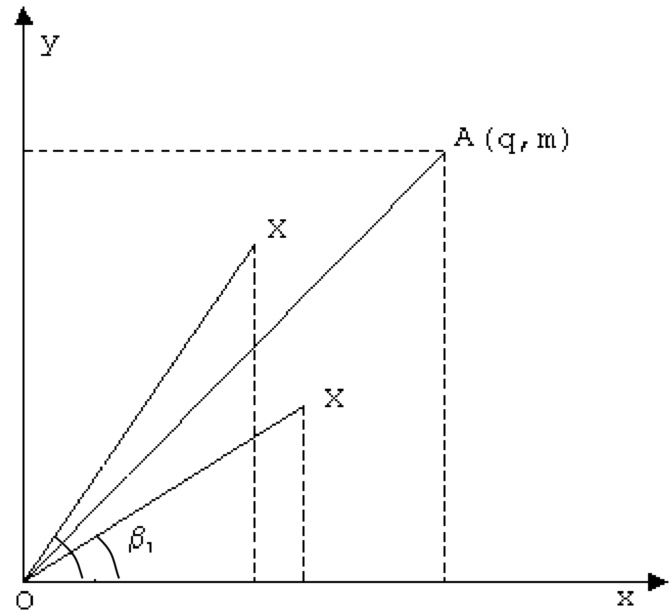
XV. PUNTI INTERNI,INSIEMI E L'EQ. DI VAG

PUNTI INTERNI



Sia l'espressione generica:

$$\begin{cases}\overline{OA}\cos\beta = x = q\cos\alpha_1\\ \overline{OA}\,\mathrm{sen}\,\beta = y = m\cos\alpha_2\end{cases}$$

per α_2 e α_1 compresi tra 0° e 90°

Se $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 2$ allora dovrà essere $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 1$ e quindi $\overline{OA}^2 = q^2 + m^2$ e $\tan\beta = \frac{m}{q}$ (vedi figura)

Per un qualunque altro valore dato per $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 < 2$ le coordinate x e y daranno punti X interni al rettangolo qm, rappresentati comunque dalla Eq. di Vag:

$$\begin{cases}\overline{OX}\cos\beta_1 = q\cos\alpha_1\\ \overline{OX}\,\mathrm{sen}\,\beta_1 = m\cos\alpha_2\end{cases} \qquad \overline{OX}^2 = q^2\cos^2\alpha_1 + m^2\cos^2\alpha_2 \qquad e \qquad \tan\beta_1 = \frac{m}{q}\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}$$

Mentre X sarà un punto esterno al rettangolo q·m nei casi:

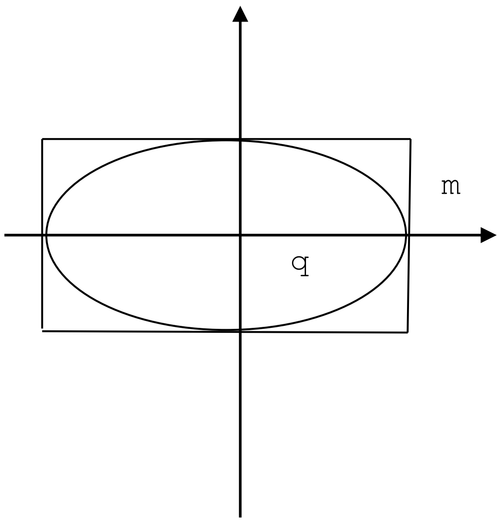
$$\overline{OX}^2 = \frac{q^2}{\cos^2\alpha_1} + \frac{m^2}{\cos^2\alpha_2} \qquad \text{e} \qquad \tan\beta_1 = \frac{m}{q}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$$

$$\overline{OX}^2 = \frac{q^2}{\cos^2\alpha_1} + m^2\cos\alpha_2 \qquad e \qquad \tan\beta_1 = \frac{m}{q}\cos\alpha_1\cos\alpha_2$$

$$\overline{OX}^2 = q^2\cos^2\alpha_1 + \frac{m^2}{\cos^2\alpha_2} \qquad e \qquad \tan\beta_1 = \frac{m}{q}\frac{1}{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}$$

GLI INSIEMI

Volendo rappresentare gli Insiemi dei punti contenuti in una delle figure note (Cerchio, Ellisse, Iperbole, Parabola) è sufficiente modificare le condizioni poste dalla Eq. Di Vag ai valori dei coseni. La condizione $\cos^2\alpha_1 + \mathrm{sen}^2\alpha_1 = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1$ iniziale va considerata come un valore compreso tra $0 \le \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 \le 2$.
Ciò significa che se noi diamo alle coordinate due generici valori q ed m, i punti indicati dalla nostra Equazione di Vag sono i punti interni a tale rettangolo, che circoscriverà a sua volta la figura nota per il valore di $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1$. Pertanto i punti dati dai valori dei coseni $0 < \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 < 1$ sono punti interni alla figura, mentre per $1 \le \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 \le 2$ saranno i punti esterni alla figura ma compresi nel rettangolo che la circoscrive.



Nella Figura che vediamo si ha una Ellisse compresa nel rettangolo (q x m) per ciascuno dei quattro quadranti; i quattro quadranti si otterranno facendo variare il valore degli angoli dei coseni direttori da 0° a 360°.
Variando, dunque, il valore del quadrato dei coseni direttori è possibile rappresentare i punti interni alla figura, i punti della figura ed i punti esterni alla figura ma limitati dal rettangolo.

$$\begin{cases} x = q\cos\alpha_1 \\ y = m\cos\alpha_2 \end{cases}$$ Ellisse e Circonferenza con q = m

$$\begin{cases} x = \dfrac{q}{\cos\alpha_1} \\ y = \dfrac{m\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \end{cases}$$ Iperbole e Iperbole Eq. per q = m

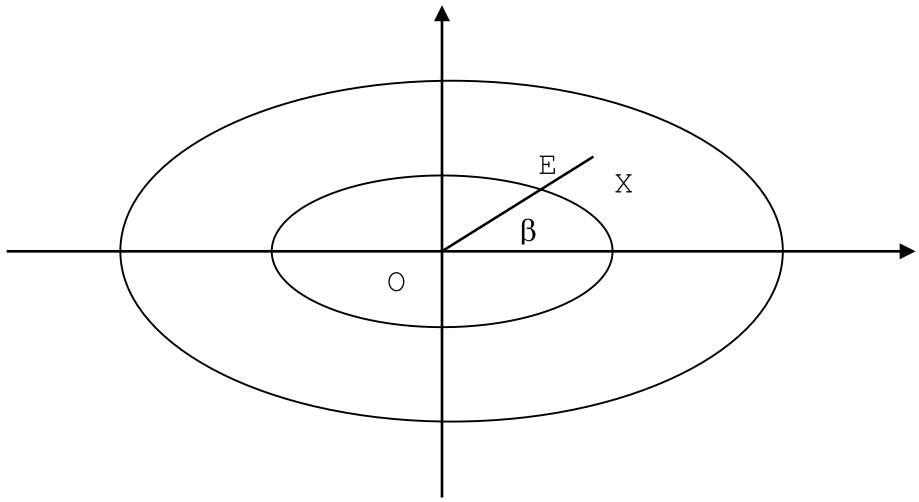
$$(p \pm x) = \begin{cases} x = \dfrac{p}{1 \mp \cos\alpha_1}\cos\alpha_1 \\ y = \dfrac{p}{1 \mp \cos\alpha_1}\cos\alpha_2 \end{cases} \qquad (p \pm y) = \begin{cases} x = \dfrac{p}{1 \mp \cos\alpha_2}\cos\alpha_1 \\ y = \dfrac{p}{1 \mp \cos\alpha_2}\cos\alpha_2 \end{cases}$$ Le quattro Parabole

Si intende che la Eq. di Vag, per ciascuna di esse è:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x \\ \overline{OA}\,\mathrm{sen}\,\beta = y \end{cases}$$ dove x ed y avranno i relativi valori attribuiti loro.

ELLISSE

Nelle indicazioni che seguono vogliamo mostrare le equazioni di un insieme compreso tra due figure note.
Nel disegno che mostriamo si hanno due Ellissi, cerchiamo di determinare l'Insieme compreso tra le due figure. Poiché i punti



interni alla Ellisse più esterna sappiamo potersi ottenere per i

valori di $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2<1$ dobbiamo cercare il valore del limite inferiore che è dato dalla figura dell'Ellisse interna.

Sia l'Ellisse più esterna: $\begin{cases} OX\cos\beta = q\cos\alpha_1 \\ OX\,\mathrm{sen}\,\beta = m\cos\alpha_2 \end{cases}$ con assi q e m

e l'Ellisse più interna: $\begin{cases} OE\cos\beta = q_i\cos\alpha \\ OE\,\mathrm{sen}\,\beta = m_i\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$ con assi q_i e m_i

$$\tan\beta = \frac{m_i}{q_i}\tan\alpha = \frac{m\cos\alpha_2}{q\cos\alpha_1}; \qquad \tan\alpha = \frac{mq_i\cos\alpha_2}{qm_i\cos\alpha_1}$$

dovrà essere $\begin{cases} OX\cos\beta > OE\cos\beta \\ OX\,\mathrm{sen}\,\beta > OE\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases} = \begin{cases} q\cos\alpha_1 > q_i\cos\alpha \\ m\cos\alpha_2 > m_i\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} = \begin{cases} mq\cos\alpha_1 > mq_i\cos\alpha \\ qm\cos\alpha_2 > qm_i\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$

quadriamo e sommiamo: $(mq)^2(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_i) > (mq_i\cos\alpha)^2+(qm_i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2$

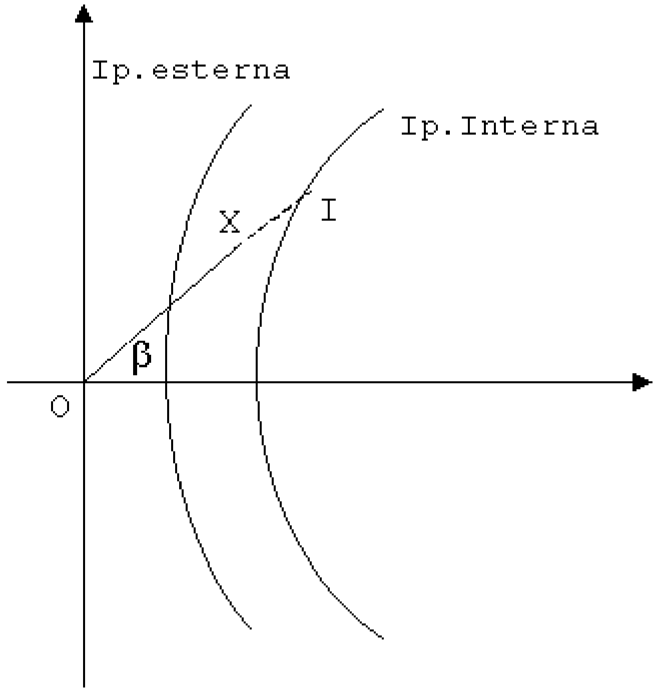
infine $1>\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2 > \left(\frac{q_i}{q}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{m_i}{m}\mathrm{sen}\,\alpha\right)^2$ (limite inferiore).

I punti compresi tra questi due limiti sono punti compresi tra le due figure.

Per $m_i=q_i=r$ si avrà $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2 > \left(\frac{r}{q}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{r}{m}\mathrm{sen}\,\alpha\right)^2$

Per $m_i=q_i=r$ e $m=q=R$ si avrà $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2 > \left(\frac{r}{R}\right)^2$

IPERBOLE



Analogo è il caso di due Iperboli di assi (m, q) l'esterna e (m_i,q_i) la interna (vedi figura); pertanto:

$$\begin{cases} OX\cos\beta = \dfrac{q}{\cos\alpha_1} \\ OX\,\mathrm{sen}\,\beta = \dfrac{m\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \end{cases} \quad \tan\beta = \frac{m}{q}\cos\alpha_2 \qquad \begin{cases} OI\cos\beta = \dfrac{q_i}{\cos\alpha} \\ OIsen\beta = \dfrac{m_i sen\alpha}{\cos\alpha} \end{cases} \quad \tan\beta = \frac{m_i}{q_i}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$\tan\beta = \dfrac{m}{q}\cos\alpha_2 = \dfrac{m_i}{q_i}\,\mathrm{sen}\,\alpha$; $\cos\alpha_2 = \dfrac{q}{m}\dfrac{m_i}{q_i}\,\mathrm{sen}\,\alpha$ (*) ; $\alpha = \mathrm{arcsen}\dfrac{m}{q}\dfrac{q_i}{m_i}\cos\alpha_2$

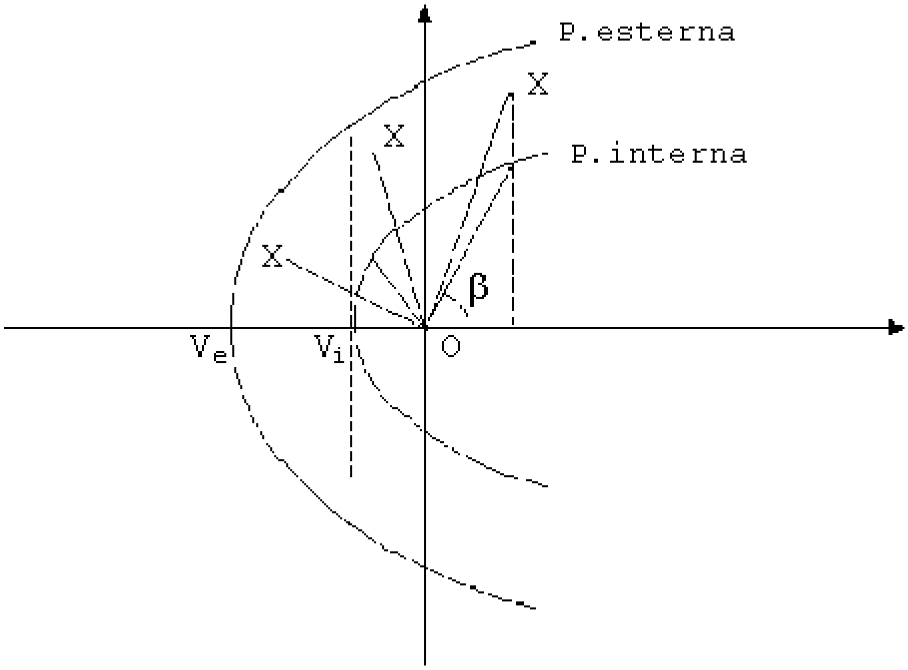
$$\begin{cases} OX\cos\beta < OI\cos\beta \\ OX\,\mathrm{sen}\,\beta < OI\,\mathrm{sen}\,\beta \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{q}{\cos\alpha_1} < \dfrac{q_i}{\cos\alpha} \quad = \quad \cos\alpha_1 > \dfrac{q}{q_i}\cos\alpha \\ \dfrac{m}{\cos\alpha_1}\cos\alpha_2 < \dfrac{m_i}{\cos\alpha}\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Nel secondo membro di questo sistema, sostituendo $\cos\alpha_2$ con il valore di (*) si ottiene $\dfrac{q}{q_i}\cos\alpha < \cos\alpha_1$ la stessa espressione del primo membro.

Quindi il limite inferiore dipende solo da $\left\{\cos\alpha_1 > \dfrac{q}{q_i}\cos\alpha\right\}$. Pertanto

$\left(\left(\dfrac{q}{q_i}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha_2\right) < \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 \le 1$ sono i limite della Ip. Esterna per avere i punti compresi tra le due Iperboli.

PARABOLA



$OV_e = -P_E/2$ Parabola Esterna
$OV_i = -p_I/2$ Parabola Interna

Parabola Esterna:

$$\begin{cases} x = \dfrac{P_E}{1-\cos\alpha_1}\cos\alpha_1 \\ y = \dfrac{P_E}{1-\cos\alpha_1}\cos\alpha_2 \end{cases}$$

Parabola Interna:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{p_I}{1-\cos\beta}\cos\beta \\ y' = \dfrac{p_I}{1-\cos\beta}sen\beta \end{cases}$$

Se dalla formula della Parabola Esterna ricaviamo x tramite il valore del $\cos\alpha_1$ il limite inferiore di $(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2)$ è implicito nel fatto che deve essere $V_e < x < V_i$. Se infatti x non fosse minore di V_i sarà x=x', quindi

$$P_E\cos\alpha_1(1-\cos\beta) = p_I\cos\beta(1-\cos\alpha_1)$$

$$\cos\beta = \frac{P_E\cos\alpha_1}{P_E + p_I(1-\cos\alpha_1)}$$

da cui ricavare senβ.

Possiamo allora risolvere y>y' vale a dire:

$$\cos^2\alpha_2 > \left[\frac{psen\beta}{P_E}\frac{1-\cos\alpha_1}{1-\cos\beta}\right]^2$$

In questa ultima espressione sommando $\cos^2\alpha_1$ ad entrambi i membri della disequazione si avrà il limite inferiore di $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2$ cercato